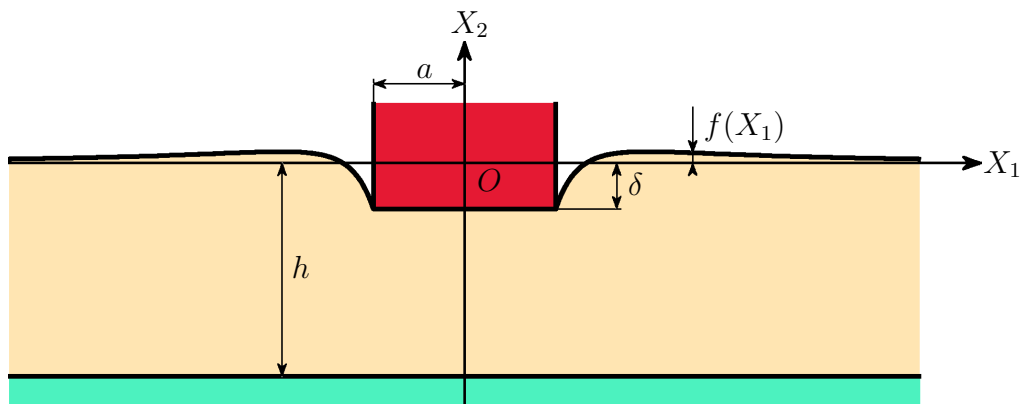
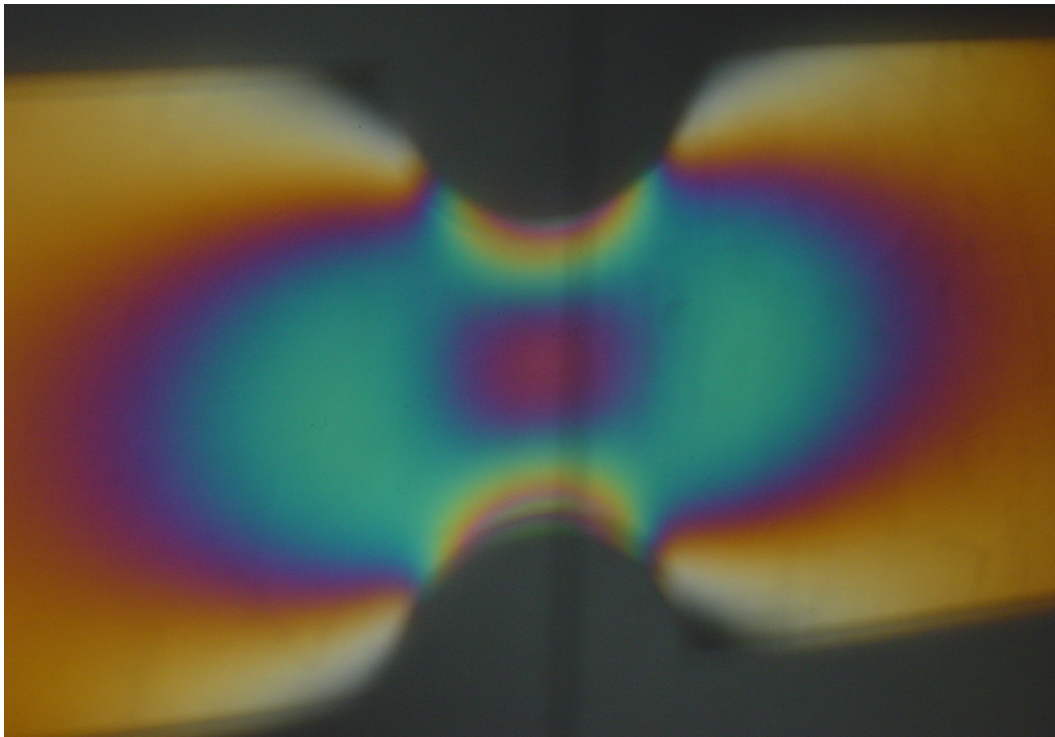


# MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## COURS, EXERCICES ET PROBLÈMES

P. ROYIS<sup>1</sup>



<sup>1</sup>École Nationale des Travaux Publics de l'État, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France.



# Mécanique des Milieux Continus

## Cours, Exercices et Problèmes

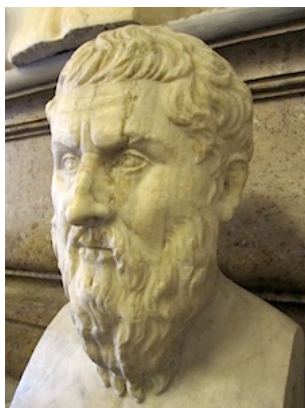
P. Royis <sup>2</sup>

6 septembre 2019

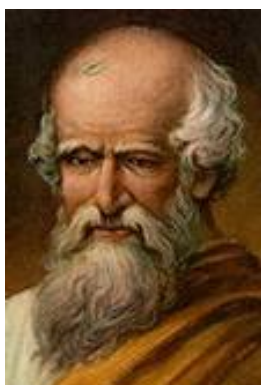
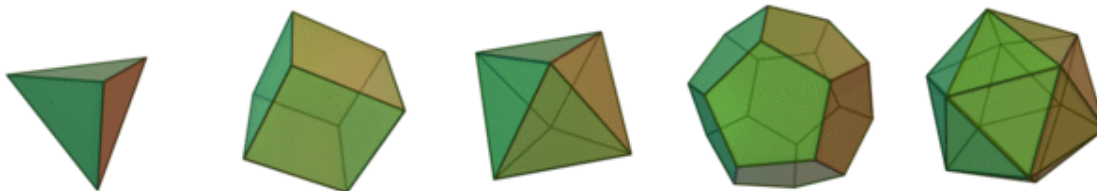
<sup>2</sup>Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France.



# ἄγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω



Πλάτων (428 — 348 av. J.-c)



Ἀρχιμήδης  
(287 — 212 av. J.-c)



LEONARDO DI SER  
PIERO DA VINCI  
(1452 — 1519)



SÉBASTIEN LE PRESTRE  
DE VAUBAN  
(1633 — 1707)



GUSTAVE EIFFEL  
(1832 — 1923)




EUGÈNE FREYSSINET  
(1879 — 1962)



ALBERT CAQUOT  
(1881 — 1976)



# Avant-propos

 [audavpro.html](#) La mécanique des milieux continus a pour objet la modélisation mathématique des corps matériels (solides ou fluides) déformables. Elle constitue une matière scientifique fondamentale dont l'étude est indispensable pour qui souhaite aborder dans les meilleures conditions d'autres disciplines scientifiques et techniques plus spécialisées telles que la mécanique des solides et le calcul des structures, la mécanique des sols et des roches, la mécanique des fluides et l'hydraulique, la mécanique des phénomènes vibratoires, le béton armé ou précontraint, les constructions métalliques. Elle se pose ainsi en base scientifique nécessaire à l'exercice du métier d'ingénieur ou de chercheur dans des domaines aussi variés que les ouvrages d'art, le bâtiment, les chaussées, la géotechnique, les milieux marins et les voies navigables, la météorologie, la dynamique des ouvrages, le génie parasismique, l'acoustique routière et l'acoustique du bâtiment.

Le présent ouvrage, principalement destiné aux étudiants des écoles d'ingénieurs et des seconds cycles d'universités scientifiques où la mécanique des milieux continus constitue une discipline de base ou d'option, s'adresse également aux jeunes chercheurs et ingénieurs soucieux d'approfondir cette discipline. Divisé en six chapitres et trois annexes suivis d'un index détaillé, son étude s'appuie sur les acquis scientifiques des classes préparatoires ou des premiers cycles universitaires. Toutefois, des éléments de calcul tensoriel constituant les outils mathématiques de base nécessaires, dès le premier chapitre, aux développements du cours sont rassemblés dans l'annexe A dont la lecture préalable est donc vivement conseillée. Par ailleurs, un formulaire que l'auteur espère être suffisamment complet constitue la matière de l'annexe B. Enfin, chacun des six chapitres dont le contenu est décrit ci-après se compose du cours proprement dit, suivi d'un récapitulatif des formules essentielles puis d'exercices et de problèmes de difficulté progressive. Ces derniers sont accompagnés d'éléments de réponse pour lesquels l'auteur s'est efforcé d'intégrer au mieux le niveau de difficulté. Ainsi, les réponses aux exercices les plus simples sont généralement fournies sans développements, tandis qu'à l'opposé les problèmes les plus ardues comportent un corrigé détaillé.

Le chapitre 1 est consacré à la cinématique des corps matériels déformables. Après avoir dégagé le concept de milieu continu, on s'attache à décrire le mouvement de tels corps en

introduisant notamment les notions de transformation et de transformation linéaire tangente puis celles de champs des déplacements et des vitesses. Les points de vue résultant de descriptions eulériennes ou lagrangiennes sont alors exposés en s'appuyant sur les familles de courbes que constituent trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission. La dérivation matérielle d'une grandeur physique est ensuite introduite et utilisée pour établir l'expression eulérienne du champ des accélérations puis celle des dérivées matérielles du gradient de la transformation et de son jacobien ainsi que d'intégrales sur des domaines matériels. Enfin, les équations de conservation de la masse issues des points de vue tant eulérien que lagrangien concluent le chapitre.

L'objet du chapitre 2 est d'introduire les outils mathématiques permettant de quantifier les déformations d'un corps continu. Après une première section regroupant des considérations physiques destinées à dégager l'idée intuitive que l'on peut avoir des déformations, on définit tout d'abord, en adoptant un point de vue lagrangien puis eulérien, les tenseurs de déformation de Cauchy à droite et de Green-Lagrange puis ceux de Cauchy à gauche et d'Almansi-Euler. On s'intéresse ensuite à la décomposition polaire de la transformation linéaire tangente et à son importante signification physique avant de quantifier, grâce aux tenseurs précédemment introduits et d'un point de vue tant eulérien que lagrangien, les différents aspects des déformations que constituent les variations de longueur, d'angle, d'aire ou de volume. Enfin, après avoir établi l'expression des dérivées matérielles des tenseurs de déformations, une dernière section est consacrée au cas particulier mais en pratique fréquent des transformations infinitésimales.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse aux efforts intérieurs, ou contraintes, développés au sein d'un milieu continu soumis à un système d'actions mécaniques extérieures. Comme dans le chapitre précédent, une première section s'attache à dégager un certain nombre de considérations physiques destinées tant à guider le lecteur dans les développements théoriques ultérieurs qu'à étayer et justifier ces derniers. On introduit alors, après une classification des actions mécaniques aboutissant à la définition du vecteur contrainte, le tenseur eulérien des contraintes de Cauchy puis les tenseurs mixte de Boussinesq et lagrangien de Piola-Kirchhoff. De la relation fondamentale de la dynamique, on tire ensuite les équations indéfinies eulériennes et lagrangiennes du mouvement puis, en excluant l'étude des milieux de type Cosserat, la symétrie des tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff. Enfin, après avoir exhibé l'expression des dérivées matérielles des contraintes, une étude détaillée du tenseur des contraintes de Cauchy est conduite dans la dernière section où l'on s'intéresse notamment aux invariants scalaires de ce tenseur et à leur signification physique ainsi qu'aux représentations géométriques d'un état de contrainte.

Le chapitre 4 constitue quant à lui une introduction à cette discipline à part entière qu'est la rhéologie des corps déformables, c'est-à-dire l'étude, tant expérimentale que théorique, des



relations entre contraintes et déformations, plus couramment dénommées relations de comportement. À l'image des deux chapitres précédents, une première section tente d'illustrer, en s'appuyant sur des considérations physiques issues d'exemples de comportement de milieux solides et fluides, la diversité de ces comportements. Une part importante du chapitre est tout d'abord consacrée aux modèles de l'élasticité et de la thermoélasticité linéaires et isotropes ainsi qu'à l'importante notion de critère de limite élastique. Les équations de comportement du fluide visqueux newtonien sont ensuite décrites. Enfin, une ultime section est dédiée à l'exemple de couplage rhéoptique que constitue l'effet photoélastique et à l'analyse des contraintes par photoélasticimétrie plane.

Le chapitre 5 regroupe un certain nombre de principes généraux, c'est-à-dire indépendants des relations de comportement, suivis de leurs applications à quelques comportements particuliers de type solide et fluide. Après un rappel de résultats précédemment énoncés, on y établit tout d'abord les formes locale et globale du théorème d'Euler, les théorèmes des puissances virtuelles et de l'énergie cinétique ainsi que le très important théorème des travaux virtuels. L'application aux fluides des principes précédents conduit ensuite au théorème de Bernoulli dans le cas des fluides parfaits puis aux équations de Navier-Stokes pour les fluides visqueux newtoniens. Enfin, la traduction de ces mêmes principes dans le cas des solides élastiques linéaires et isotropes fournit les équations de Lamé-Navier, l'expression de l'énergie de déformation d'un solide élastique ainsi que le très important théorème de l'énergie potentielle.

L'ultime chapitre 6 constitue pour sa part une brève introduction à l'une des méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution approchée de problèmes aux limites en mécanique, la méthode des éléments finis. Une première section, inspirée des notes du cours de méthodes numériques que dispensa le professeur Le Tallec à l'ENTPE de 1985 à 1988, est tout d'abord consacrée à l'étude d'un problème modèle intentionnellement simple puisque consistant en la recherche d'une unique fonction réelle de variable réelle. Après écriture d'une formulation variationnelle du problème initial, l'approximation de cette dernière par un problème de Galerkin est alors exposée dans un cadre tout à fait général. Une solution approchée est ensuite obtenue après construction d'un espace d'éléments finis monodimensionnels, les caractéristiques propres à cette dernière étape étant alors détaillées. Cette solution approchée est enfin comparée à la solution analytique du problème initial. La seconde section de ce chapitre s'intéresse quant à elle au problème de l'élastostatique infinitésimale. Comme pour le problème modèle précédent, une formulation variationnelle à un champ du problème initial est tout d'abord écrite. Enfin, une application numérique détaillée consistant en la résolution par éléments finis bidimensionnels du problème d'équilibre d'un barrage poids élastique conclut cette section.



# Table des matières

Avant-propos	5
Table des matières	19
Table des figures	24
Liste des tableaux	25
<b>1 Cinématique des milieux continus</b>	<b>27</b>
1.1 Définition d'un milieu continu - Hypothèses de base	27
1.1.1 Notion de particule	27
1.1.2 Hypothèse de continuité	28
1.2 Repérage des milieux continus	28
1.2.1 Configuration de référence et configuration actuelle	29
1.2.2 Relation entre les configurations actuelle et de référence : la transformation du milieu continu	31
1.2.3 Transformation linéaire tangente	32
1.2.4 Jacobien de la transformation	36
1.2.5 Champ des déplacements et champ des vitesses	39
1.3 Descriptions lagrangienne et eulérienne	40
1.3.1 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission	40
1.3.1.1 Définitions	40
1.3.1.2 Cas d'un mouvement permanent	42
1.3.2 Point de vue lagrangien et point de vue eulérien	43
1.4 Dérivée matérielle	43
1.4.1 Définition	43
1.4.2 Champ des accélérations	45
1.4.3 Dérivées matérielles du gradient et du jacobien de la transformation	47
1.4.4 Dérivées d'intégrales sur des domaines matériels	49
1.4.4.1 Dérivée d'une intégrale de volume	49
1.4.4.2 Dérivée d'une intégrale de surface	50
1.4.4.3 Dérivée d'une intégrale curviligne	53
1.5 Équations de conservation de la masse	54

1.5.1	Point de vue eulérien . . . . .	54
1.5.2	Point de vue lagrangien . . . . .	56
1.6	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	58
1.6.1	Repérage des milieux continus . . . . .	58
1.6.2	Descriptions lagrangienne et eulérienne . . . . .	58
1.6.3	Dérivée matérielle . . . . .	59
1.6.4	Équations de conservation de la masse . . . . .	59
1.7	Exercices et problèmes . . . . .	60
1.7.1	Énoncés des exercices . . . . .	60
E1.1	Potentiel des accélérations . . . . .	60
E1.2	Théorème de Lagrange . . . . .	60
E1.3	Théorème de Lord Kelvin . . . . .	60
E1.4	Écoulement sphérique d'un fluide incompressible . . . . .	60
E1.5	Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique . . . . .	61
E1.6	Traction-torsion d'une barre cylindrique . . . . .	61
E1.7	Transformations infinitésimales . . . . .	62
E1.8	Tassement d'un sol incompressible . . . . .	62
1.7.2	Énoncés des problèmes . . . . .	63
P1.1	Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant . . . . .	63
P1.2	Étude d'un écoulement plan . . . . .	64
P1.3	Roulement sans glissement d'un disque indéformable . . . . .	64
P1.4	Un modèle de houle : la houle trochoïdale . . . . .	65
1.7.3	Indications et éléments de réponse . . . . .	65
E1.1	Potentiel des accélérations . . . . .	65
E1.2	Théorème de Lagrange . . . . .	65
E1.3	Théorème de Lord Kelvin . . . . .	66
E1.4	Écoulement sphérique d'un fluide incompressible . . . . .	66
E1.5	Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique . . . . .	66
E1.6	Traction-torsion d'une barre cylindrique . . . . .	66
E1.7	Transformations infinitésimales . . . . .	67
E1.8	Tassement d'un sol incompressible . . . . .	67
P1.1	Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant . . . . .	67
P1.2	Étude d'un écoulement plan . . . . .	67
P1.3	Roulement sans glissement d'un disque indéformable . . . . .	69
P1.4	Un modèle de houle : la houle trochoïdale . . . . .	70
<b>2</b>	<b>Déformations</b>	<b>73</b>
2.1	Considérations intuitives . . . . .	73
2.2	Tenseurs des déformations . . . . .	74

2.2.1	Tenseurs de Cauchy à droite et de Green-Lagrange . . . . .	75
2.2.1.1	Tenseur de Cauchy à droite . . . . .	75
2.2.1.2	Tenseur de Green-Lagrange . . . . .	77
2.2.1.3	Décomposition en fonction du champ des déplacements . . . . .	78
2.2.2	Tenseurs de Cauchy à gauche et d'Almansi-Euler . . . . .	79
2.2.2.1	Tenseur de Cauchy à gauche . . . . .	79
2.2.2.2	Tenseur d'Almansi-Euler . . . . .	80
2.2.2.3	Décomposition en fonction du champ des déplacements . . . . .	81
2.2.3	Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente . . . . .	83
2.2.4	Variations de longueur d'un vecteur matériel élémentaire . . . . .	86
2.2.5	Variations d'angle entre les directions de deux vecteurs matériels élémentaires . . . . .	90
2.2.6	Variations de volume matériel élémentaire . . . . .	93
2.2.7	Variations d'aire d'une surface matérielle élémentaire . . . . .	94
2.3	Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .	97
2.3.1	Tenseurs des taux de déformation et de rotation . . . . .	97
2.3.2	Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .	99
2.3.2.1	Tenseurs lagrangiens . . . . .	99
2.3.2.2	Tenseurs eulériens . . . . .	100
2.3.2.3	Tenseurs mixtes . . . . .	101
2.4	Cas des transformations infinitésimales . . . . .	102
2.4.1	Définitions . . . . .	102
2.4.2	Tenseurs des petites déformations et des petites rotations . . . . .	104
2.4.3	Variations de longueur . . . . .	108
2.4.4	Variations d'angle droit . . . . .	110
2.4.5	Variations de volume . . . . .	112
2.4.6	Variations d'aire . . . . .	114
2.4.7	Déviateur des déformations . . . . .	116
2.4.8	Représentations géométriques d'un état de déformation plane . . . . .	117
2.4.8.1	Cercle de Mohr des déformations planes . . . . .	119
2.4.8.2	Ellipse de Lamé des déformations planes . . . . .	121
2.4.9	Équations de compatibilité des petites déformations . . . . .	122
2.5	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	126
2.5.1	Tenseurs des déformations . . . . .	126
2.5.2	Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .	127
2.5.3	Cas des transformations infinitésimales . . . . .	127
2.6	Exercices et problèmes . . . . .	129
2.6.1	Énoncés des exercices . . . . .	129
E2.1	Transformations linéaires planes . . . . .	129

E2.2	Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques . . . . .	129
E2.3	Déformation d'un tube épais . . . . .	130
E2.4	Quadriques directrices des dilatations . . . . .	130
E2.5	Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes . . .	131
E2.6	Effet transversal dans une jauge d'extensométrie . . . . .	131
E2.7	Extensométrie par jauges électriques . . . . .	132
E2.8	Écoulement irrotationnel de fluide incompressible . . . . .	133
E2.9	Petites ou grandes transformations? . . . . .	133
E2.10	Mouvement de corps rigide . . . . .	134
2.6.2	Énoncés des problèmes . . . . .	134
P2.1	Expansion plane homogène . . . . .	134
P2.2	Concentration plane homogène . . . . .	135
P2.3	Transformation tridimensionnelle homogène . . . . .	137
P2.4	Transformation finie d'un tube épais . . . . .	138
2.6.3	Indications et éléments de réponse . . . . .	139
E2.1	Transformations linéaires planes . . . . .	139
E2.2	Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques . . . . .	139
E2.3	Déformation d'un tube épais . . . . .	139
E2.4	Quadriques directrices des dilatations . . . . .	140
E2.5	Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes . . .	140
E2.6	Effet transversal dans une jauge d'extensométrie . . . . .	140
E2.7	Extensométrie par jauges électriques . . . . .	140
E2.8	Écoulement irrotationnel de fluide incompressible . . . . .	141
E2.9	Petites ou grandes transformations? . . . . .	142
E2.10	Mouvement de corps rigide . . . . .	142
P2.1	Expansion plane homogène . . . . .	143
P2.2	Concentration plane homogène . . . . .	144
P2.3	Transformation tridimensionnelle homogène . . . . .	147
P2.4	Transformation finie d'un tube épais . . . . .	149

### 3 Contraintes 153

3.1	Considérations intuitives . . . . .	153
3.1.1	Fluide au repos . . . . .	153
3.1.2	Poutre en traction simple . . . . .	155
3.2	Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes . . . . .	156
3.2.1	Classification des actions mécaniques . . . . .	156
3.2.1.1	Actions mécaniques extérieures . . . . .	157
3.2.1.2	Actions mécaniques intérieures : Définition du vecteur contrainte . . . . .	158

3.2.2	Tenseurs des contraintes . . . . .	161
3.2.2.1	Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	161
3.2.2.2	Tenseurs des contraintes de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff . . . . .	167
3.2.3	Relation fondamentale de la dynamique . . . . .	170
3.2.3.1	Équations indéfinies eulériennes du mouvement . . . . .	171
3.2.3.2	Équations indéfinies lagrangiennes du mouvement . . . . .	173
3.2.3.3	Symétrie des tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff . . . . .	175
3.3	Dérivées matérielles des contraintes . . . . .	178
3.3.1	Dérivées matérielles des tenseurs des contraintes . . . . .	178
3.3.2	Dérivée matérielle du vecteur contrainte . . . . .	179
3.4	Étude du tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	181
3.4.1	Théorème de Cauchy . . . . .	181
3.4.2	Directions principales des contraintes . . . . .	182
3.4.3	Déviateur des contraintes . . . . .	184
3.4.4	Invariants scalaires du tenseur des contraintes . . . . .	185
3.4.5	Représentations géométriques d'un état de contrainte plane . . . . .	189
3.4.5.1	Ellipse de Lamé des contraintes planes . . . . .	190
3.4.5.2	Cercle de Mohr des contraintes planes . . . . .	191
3.4.6	Représentations géométriques d'un état de contrainte tridimensionnel . . . . .	194
3.4.6.1	Ellipsoïde de Lamé des contraintes . . . . .	195
3.4.6.2	Tricercle de Mohr des contraintes . . . . .	195
3.5	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	200
3.5.1	Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes . . . . .	200
3.5.2	Dérivées matérielles des contraintes . . . . .	200
3.5.3	Étude du tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	201
3.6	Exercices et problèmes . . . . .	202
3.6.1	Énoncés des exercices . . . . .	202
E3.1	Solide d'isocontrainte . . . . .	202
E3.2	Essai de traction monoaxiale . . . . .	202
E3.3	États types de contrainte plane . . . . .	203
E3.4	Utilisation d'une plaque fissurée . . . . .	203
E3.5	État homogène de contrainte plane . . . . .	203
E3.6	Quadriques directrices des contraintes normales . . . . .	204
E3.7	Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques . . . . .	204
E3.8	Contraintes au parement amont d'un barrage . . . . .	205
E3.9	Boîte de Casagrande . . . . .	205
3.6.2	Énoncés des problèmes . . . . .	206
P3.1	Contraintes dans une chaudière . . . . .	206

	P3.2	Contraintes dans un câble de précontrainte . . . . .	207
	P3.3	Contraintes dans une poutre en potence . . . . .	208
3.6.3		Indications et éléments de réponse . . . . .	209
	E3.1	Solide d'isocontrainte . . . . .	209
	E3.2	Essai de traction monoaxiale . . . . .	209
	E3.4	Utilisation d'une plaque fissurée . . . . .	209
	E3.5	État homogène de contrainte plane . . . . .	210
	E3.6	Quadriques directrices des contraintes normales . . . . .	210
	E3.7	Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques . . .	211
	E3.8	Contraintes au parement amont d'un barrage . . . . .	211
	E3.9	Boîte de Casagrande . . . . .	211
	P3.1	Contraintes dans une chaudière . . . . .	211
	P3.2	Contraintes dans un câble de précontrainte . . . . .	211
	P3.3	Contraintes dans une poutre en potence . . . . .	212
<b>4</b>		<b>Prolégomènes à la rhéologie des corps continus</b>	<b>213</b>
4.1		Considérations intuitives . . . . .	213
4.1.1		Exemples de comportements de milieux solides . . . . .	214
4.1.1.1		Comportement élastique . . . . .	214
4.1.1.2		Comportement élastoplastique . . . . .	215
4.1.2		Exemples de comportements de milieux fluides . . . . .	216
4.1.2.1		Fluide parfait . . . . .	216
4.1.2.2		Fluide visqueux . . . . .	217
4.2		Élasticité linéaire isotrope . . . . .	218
4.2.1		Approche en déformations . . . . .	219
4.2.2		Approche en contraintes . . . . .	224
4.2.3		Synthèse des deux approches . . . . .	226
4.2.4		Thermoélasticité linéaire isotrope . . . . .	230
4.2.5		Exemple de sollicitation thermomécanique . . . . .	230
4.3		Notion de critère de limite élastique . . . . .	232
4.3.1		Exemples de critères indépendants de la contrainte moyenne . . . . .	233
4.3.1.1		Critère de Tresca . . . . .	233
4.3.1.2		Critère de Von-Mises . . . . .	236
4.3.2		Exemples de critères dépendants de la contrainte moyenne . . . . .	237
4.3.2.1		Critère de Mohr-Coulomb . . . . .	237
4.3.2.2		Critère de Drucker-Prager . . . . .	242
4.4		Fluide visqueux newtonien . . . . .	243
4.4.1		Relations de comportement . . . . .	243
4.4.2		Application . . . . .	244



4.5	Un exemple de couplage rhéoptique : l'effet photoélastique . . . . .	246
4.5.1	Matériaux photoélastiques . . . . .	247
4.5.1.1	Polarisation rectiligne d'une onde lumineuse plane . . . . .	247
4.5.1.2	Matériaux parfaitement photoélastiques . . . . .	247
4.5.2	Photoélasticimétrie plane . . . . .	249
4.5.2.1	Analyse rectiligne . . . . .	249
4.5.2.2	Analyse circulaire . . . . .	251
4.6	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	255
4.6.1	Élasticité linéaire isotrope . . . . .	255
4.6.2	Notion de critère de limite élastique . . . . .	255
4.6.3	Fluide visqueux newtonien . . . . .	256
4.7	Exercices et problèmes . . . . .	257
4.7.1	Énoncés des exercices . . . . .	257
E4.1	Massif de sol pesant uniformément chargé . . . . .	257
E4.2	Coin élastique . . . . .	257
E4.3	Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène . . . . .	258
E4.4	Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène . . . . .	259
E4.5	Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible . . . . .	259
E4.6	Vernis craquelant . . . . .	260
E4.7	Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes . . . . .	261
E4.8	Rhéomètre de Couette . . . . .	262
E4.9	Distorsion pure . . . . .	263
E4.10	Expansion plane . . . . .	264
4.7.2	Énoncés des problèmes . . . . .	264
P4.1	Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux . . . . .	264
P4.2	Torsion pure d'un cylindre . . . . .	265
P4.3	Matériau composite . . . . .	267
P4.4	Barrage poids . . . . .	268
P4.5	Fluide de Bingham . . . . .	270
4.7.3	Indications et éléments de réponse . . . . .	271
E4.1	Massif de sol pesant uniformément chargé . . . . .	271
E4.2	Coin élastique . . . . .	271
E4.3	Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène . . . . .	271
E4.4	Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène . . . . .	272
E4.5	Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible . . . . .	272

E4.6	Vernis craquelant . . . . .	273
E4.7	Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes . . . . .	273
E4.8	Rhéomètre de Couette . . . . .	274
E4.9	Distorsion pure . . . . .	274
E4.10	Expansion plane . . . . .	274
P4.1	Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux . . . . .	275
P4.2	Torsion pure d'un cylindre . . . . .	276
P4.3	Matériau composite . . . . .	277
P4.4	Barrage poids . . . . .	278
P4.5	Fluide de Bingham . . . . .	279
<b>5</b>	<b>Principes généraux et leurs applications</b>	<b>281</b>
5.1	Principes généraux . . . . .	281
5.1.1	Rappels de résultats précédemment énoncés . . . . .	282
5.1.1.1	Équation eulérienne de conservation de la masse . . . . .	282
5.1.1.2	Équations indéfinies eulériennes du mouvement . . . . .	282
5.1.2	Théorème d'Euler . . . . .	283
5.1.2.1	Forme locale . . . . .	283
5.1.2.2	Forme globale . . . . .	284
5.1.2.3	Application . . . . .	285
5.1.3	Puissances virtuelles et énergie cinétique . . . . .	287
5.1.3.1	Théorème des puissances virtuelles . . . . .	287
5.1.3.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	290
5.1.4	Théorème des travaux virtuels . . . . .	290
5.2	Application aux fluides . . . . .	295
5.2.1	Hydrostatique . . . . .	295
5.2.2	Fluide parfait en mouvement — Théorème de Bernoulli . . . . .	296
5.2.3	Fluide visqueux newtonien - Équations de Navier-Stokes . . . . .	298
5.3	Application aux solides élastiques linéaires isotropes . . . . .	300
5.3.1	Équations de Lamé-Navier . . . . .	300
5.3.2	Énergie de déformation d'un solide élastique . . . . .	302
5.3.3	Théorème de l'énergie potentielle . . . . .	305
5.3.4	Application . . . . .	309
5.4	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	314
5.4.1	Principes généraux . . . . .	314
5.4.2	Application aux fluides . . . . .	314
5.4.3	Application aux solides élastiques linéaires isotropes . . . . .	315
5.5	Exercices et problèmes . . . . .	316
5.5.1	Énoncés des exercices . . . . .	316

E5.1	Équations indéfinies du mouvement . . . . .	316
E5.2	Théorème d'Archimède . . . . .	316
E5.3	Réservoir cylindrique en rotation . . . . .	316
E5.4	Principe du venturi . . . . .	317
E5.5	Tube de Pitot . . . . .	317
E5.6	Ajutage de Borda . . . . .	318
E5.7	Auget Pelton . . . . .	319
E5.8	Tube de Poiseuille . . . . .	320
E5.9	Viscosimètre plan-plan . . . . .	320
E5.10	Torsion d'un disque annulaire . . . . .	321
E5.11	Sphère creuse sous pression . . . . .	322
E5.12	Vibrations longitudinales d'une poutre . . . . .	323
5.5.2	Énoncés des problèmes . . . . .	324
P5.1	Compression-confinement d'un cylindre creux . . . . .	324
P5.2	Sertissage d'un cylindre . . . . .	325
P5.3	Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre) . . . . .	327
P5.4	Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné . . . . .	328
P5.5	Pale d'hélicoptère . . . . .	329
P5.6	Action d'un jet sur un obstacle . . . . .	330
P5.7	Écoulement dans une conduite de section carrée . . . . .	331
P5.8	Fluide visqueux sur un plan incliné . . . . .	332
P5.9	Fluide visqueux non-newtonien . . . . .	334
P5.10	Viscosimètre cône-plan . . . . .	335
5.5.3	Indications et éléments de réponse . . . . .	336
E5.2	Théorème d'Archimède . . . . .	336
E5.3	Réservoir cylindrique en rotation . . . . .	336
E5.4	Principe du venturi . . . . .	336
E5.5	Tube de Pitot . . . . .	337
E5.6	Ajutage de Borda . . . . .	337
E5.7	Auget Pelton . . . . .	337
E5.8	Tube de Poiseuille . . . . .	337
E5.9	Viscosimètre plan-plan . . . . .	338
E5.10	Torsion d'un disque annulaire . . . . .	338
E5.11	Sphère creuse sous pression . . . . .	338
E5.12	Vibrations longitudinales d'une poutre . . . . .	339
P5.1	Compression-confinement d'un cylindre creux . . . . .	339
P5.2	Sertissage d'un cylindre . . . . .	341
P5.3	Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre) . . . . .	343
P5.4	Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné . . . . .	343

P5.5	Pale d'hélicoptère . . . . .	344
P5.6	Action d'un jet sur un obstacle . . . . .	346
P5.7	Écoulement dans une conduite de section carrée . . . . .	346
P5.8	Fluide visqueux sur un plan incliné . . . . .	347
P5.9	Fluide visqueux non-newtonien . . . . .	348
P5.10	Viscosimètre cône-plan . . . . .	349
<b>6</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>	<b>351</b>
6.1	Étude d'un problème modèle : La corde sur fondation élastique . . . . .	352
6.1.1	Le problème initial . . . . .	352
6.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	353
6.1.2.1	Un théorème . . . . .	353
6.1.2.2	Une définition . . . . .	355
6.1.3	Méthodes de Galerkin . . . . .	357
6.1.3.1	Écriture abstraite d'un problème variationnel . . . . .	357
6.1.3.2	Formulation variationnelle approchée de Galerkin . . . . .	358
6.1.3.3	Résolution numérique d'un problème approché de Galerkin . . . . .	359
6.1.3.4	Les méthodes de Galerkin . . . . .	360
6.1.4	Construction d'un espace d'éléments finis . . . . .	360
6.1.4.1	Premier outil : définition d'un élément fini . . . . .	361
6.1.4.2	Deuxième outil : triangulation . . . . .	362
6.1.4.3	Troisième outil : matrice de connectivité . . . . .	362
6.1.4.4	Construction finale des fonctions $\psi_i$ , $i \in \{1, \dots, M_h\}$ . . . . .	363
6.1.4.5	Résolution numérique d'un problème de Galerkin par la méthode des éléments finis . . . . .	365
6.2	Étude du problème de l'élastostatique infinitésimale . . . . .	368
6.2.1	Le problème initial . . . . .	368
6.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	370
6.2.3	Exemple numérique : équilibre d'un barrage poids élastique . . . . .	372
6.2.3.1	Choix d'un élément fini bidimensionnel . . . . .	373
6.2.3.2	Triangulation . . . . .	374
6.2.3.3	Matrice de connectivité . . . . .	375
6.2.3.4	Expressions locales des déplacements, des déformations et des contraintes . . . . .	377
6.2.3.5	Résolution numérique . . . . .	380
6.3	Exercices . . . . .	386
6.3.1	Énoncés . . . . .	386
E6.1	Essai de compression œdométrique . . . . .	386
E6.2	Pale d'hélicoptère . . . . .	386

E6.3	Poutre en flexion . . . . .	387
6.3.2	Indications et éléments de réponse . . . . .	387
E6.1	Essai de compression œdométrique . . . . .	387
E6.2	Pale d'hélicoptère . . . . .	388
E6.3	Poutre en flexion . . . . .	389
<b>A</b>	<b>Éléments de calcul tensoriel en bases orthonormées</b>	<b>391</b>
A.1	Convention d'indice muet . . . . .	391
A.2	Tenseurs euclidiens en bases orthonormées . . . . .	392
A.3	Tenseurs isotropes . . . . .	394
A.4	Tenseurs gradient et divergence . . . . .	395
A.5	Cas de l'espace $\mathbb{R}^3$ orthonormé . . . . .	396
<b>B</b>	<b>Formulaire</b>	<b>399</b>
B.1	Tenseurs de Kronecker $\delta$ et d'orientation $\epsilon$ . . . . .	399
B.1.1	Caractérisation . . . . .	399
B.1.2	Propriétés . . . . .	400
B.2	Opérateurs différentiels . . . . .	400
B.2.1	Caractérisation . . . . .	400
B.2.2	Propriétés . . . . .	402
B.3	Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques . . . . .	403
B.3.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	403
B.3.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	406
B.3.3	Coordonnées sphériques . . . . .	408
B.4	Unités . . . . .	411
B.4.1	Unités de base et unités supplémentaires . . . . .	411
B.4.2	Unités espace-temps . . . . .	412
B.4.3	Unités de mécanique et unités dérivées . . . . .	412
B.4.4	Symboles des préfixes décimaux . . . . .	413
B.5	Extensométrie par rosettes de trois jauges . . . . .	414
<b>C</b>	<b>Ouvrages de référence</b>	<b>415</b>
C.1	Ouvrages de Mécanique des Milieux Continus et d'Élasticité . . . . .	415
C.2	Ouvrages de Mathématiques : Calcul Tensoriel et Calcul Variationnel . . . . .	416
C.3	Ouvrages sur la Méthode des Éléments Finis . . . . .	416
C.4	Ouvrages sur les Méthodes Expérimentales en Élasticité . . . . .	417
	<b>Index</b>	<b>419</b>



# Table des figures

1.1	Apparition d'une surface de glissement . . . . .	29
1.2	Configuration de référence et configuration actuelle . . . . .	30
1.3	Variation de volume matériel élémentaire . . . . .	37
1.4	Déplacement $\vec{u}$ de la particule $P$ à l'instant $t$ . . . . .	39
1.5	Variation de surface matérielle élémentaire . . . . .	51
1.6	Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique . . . . .	61
1.7	Traction-torsion d'une barre cylindrique . . . . .	62
1.8	Tassement d'un sol incompressible . . . . .	63
1.9	Roulement sans glissement d'un disque indéformable . . . . .	64
1.10	Écoulement autour d'un pilier cylindrique : lignes de courant et trajectoires . . . . .	66
1.11	Lignes de courant à l'instant $t$ . . . . .	68
1.12	Trajectoires des particules de coordonnées initiales $(-a, a)$ et $(a, a)$ . . . . .	68
1.13	Ligne d'émission de l'origine du plan $(Ox_1, Ox_2)$ à l'instant $t$ . . . . .	69
1.14	Roulement d'un disque indéformable : trajectoires . . . . .	70
1.15	Roulement d'un disque indéformable : lignes de courant . . . . .	70
2.1	Compression simple homogène d'un échantillon cubique . . . . .	73
2.2	Variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires . . . . .	75
2.3	Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente . . . . .	86
2.4	Représentation géométrique d'un état de déformation plane . . . . .	119
2.5	Cercle de Mohr des déformations planes . . . . .	120
2.6	Ellipse de Lamé des déformations planes . . . . .	122
2.7	Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes . . . . .	123
2.8	Transformations linéaires planes . . . . .	129
2.9	Déformation d'un tube épais . . . . .	130
2.10	Jauge électrique d'extensométrie . . . . .	131
2.11	Rosette à trois jauges . . . . .	132
2.12	Barres articulées soumises à un chargement vertical . . . . .	133
2.13	Transformation finie d'un tube épais . . . . .	139
2.14	Quadriques directrices des dilatations . . . . .	140
2.15	Ellipses de Lamé et cercles de Mohr des déformations planes . . . . .	141

2.16	Exemple de conduite permettant un tel écoulement . . . . .	142
2.17	Lignes d'émission $\mathcal{E}_t$ du point $M$ et cercles $\mathcal{C}_t$ associés pour $\tau \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . . . . .	144
2.18	Variations de $a$ et $b$ en fonction de $\tau = \alpha t$ . . . . .	145
2.19	Tracé de quelques trajectoires . . . . .	145
2.20	Lignes de courant passant par le point $M$ aux instants $\frac{t_0}{2}$ , $t_0$ et $2t_0$ . . . . .	146
2.21	Graphes de $\mathcal{E}_t$ et $\mathcal{T}_t$ pour $x_1^M = 1$ , $x_2^M = 0$ et $t = 10\alpha^{-1}$ . . . . .	147
2.22	Évolution de la déformation principale $L = \frac{1}{2}(a^2(t) - 1)$ . . . . .	147
2.23	Évolution des dilatations $\varepsilon_{NN}$ dans les directions $\vec{N} = \vec{k}$ et $\vec{N} \perp \vec{k}$ . . . . .	148
2.24	Variations de $\theta$ en fonction de $\tau = \alpha t$ . . . . .	149
2.25	Transformées des segments matériels $R = R_0$ , $R = R_1$ et $R = \frac{R_0 + R_1}{2}$ . . . . .	150
2.26	Lignes de courant à l'instant $t = 0$ . . . . .	151
3.1	Fluide au repos . . . . .	153
3.2	Poutre en traction simple . . . . .	155
3.3	Efforts intérieurs sur le plan de normale $\vec{n}$ . . . . .	159
3.4	Décomposition du vecteur contrainte . . . . .	160
3.5	Volume matériel élémentaire tétraédrique au point $P_t$ et à l'instant $t$ . . . . .	162
3.6	Volume matériel élémentaire prismatique au point $P_t$ et à l'instant $t$ . . . . .	165
3.7	Définition du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff . . . . .	168
3.8	Relation fondamentale de la dynamique appliquée au volume matériel $\mathcal{V}$ . . . . .	171
3.9	Réciprocité des contraintes tangentielles . . . . .	183
3.10	Système d'axes orthonormés associé aux contraintes principales $\sigma_1$ , $\sigma_2$ et $\sigma_3$ . . . . .	186
3.11	Représentation géométrique d'un état de contrainte plane . . . . .	191
3.12	Ellipse de Lamé des contraintes planes . . . . .	192
3.13	Cercle de Mohr des contraintes planes . . . . .	193
3.14	Tricercle de Mohr des contraintes . . . . .	198
3.15	Solide d'isocontrainte . . . . .	202
3.16	Essai de traction monoaxiale . . . . .	202
3.17	État homogène de contrainte plane (unité : daN.mm <sup>-2</sup> ) . . . . .	203
3.18	Parement amont d'un barrage . . . . .	205
3.19	Boîte de Casagrande . . . . .	206
3.20	Chaudière soumise à une surpression intérieure $p$ . . . . .	206
3.21	Câble de précontrainte . . . . .	207
3.22	Poutre en potence . . . . .	208
3.23	Quadriques directrices des contraintes normales . . . . .	210
4.1	Essai de traction simple d'un ruban de caoutchouc . . . . .	214
4.2	Essai de traction simple d'un barreau d'acier doux . . . . .	215
4.3	Rhéomètre de Couette . . . . .	217
4.4	Poutre en traction simple équipée de jauges . . . . .	219



4.5	Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique . . . . .	231
4.6	Représentation du critère de Tresca dans le plan de Mohr . . . . .	233
4.7	Critères de Tresca et de Von-Mises . . . . .	235
4.8	Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr . . . . .	238
4.9	Critères de Drücker-Prager et de Mohr-Coulomb . . . . .	239
4.10	Écoulement d'un fluide visqueux newtonien entre deux plaques . . . . .	245
4.11	Onde lumineuse plane polarisée rectilignement . . . . .	247
4.12	Biréfringence accidentelle . . . . .	249
4.13	Polariscope plan . . . . .	250
4.14	Polariscope circulaire . . . . .	252
4.15	Analyse des contraintes par photoélasticimétrie plane . . . . .	254
4.16	Massif de sol pesant uniformément chargé . . . . .	257
4.17	Coin élastique . . . . .	258
4.18	Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène . . . . .	259
4.19	Sollicitation thermomécanique d'une poutre hétérogène . . . . .	259
4.20	Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible . . . . .	260
4.21	Vernis craquelant . . . . .	261
4.22	Poutre console en flexion . . . . .	262
4.23	Rhéomètre de Couette . . . . .	262
4.24	Torsion d'un cylindre creux . . . . .	265
4.25	Matériau composite . . . . .	267
4.26	Barrage poids . . . . .	269
4.27	Écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique . . . . .	270
4.28	Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes . . . . .	273
4.29	Variations de $\frac{E(\alpha)}{E}$ avec $\alpha$ . . . . .	277
5.1	Écoulement d'un fluide visqueux newtonien entre deux plaques . . . . .	286
5.2	Essai de compression œdométrique . . . . .	310
5.3	Solide immergé . . . . .	316
5.4	Réservoir cylindrique en rotation . . . . .	317
5.5	Venturi . . . . .	318
5.6	Tube de Pitot . . . . .	318
5.7	Ajutage de Borda . . . . .	319
5.8	Auget Pelton . . . . .	319
5.9	Tube de Poiseuille . . . . .	320
5.10	Viscosimètre plan-plan . . . . .	321
5.11	Torsion d'un disque annulaire . . . . .	322
5.12	Sphère creuse sous pression . . . . .	322
5.13	Vibrations longitudinales d'une poutre . . . . .	323

5.14	Compression-confinement d'un cylindre creux . . . . .	324
5.15	Sertissage d'un cylindre . . . . .	326
5.16	Cylindre creux infini sous pression . . . . .	327
5.17	Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné . . . . .	328
5.18	Pale d'hélicoptère en rotation . . . . .	329
5.19	Action d'un jet sur un obstacle . . . . .	330
5.20	Écoulement dans une conduite de section carrée . . . . .	331
5.21	Fluide visqueux sur un plan incliné . . . . .	333
5.22	Écoulement d'un fluide non-newtonien dans une conduite cylindrique . . . . .	334
5.23	Viscosimètre cône-plan . . . . .	335
5.24	Variations de $\frac{E_d}{E}$ en fonction de $\frac{\omega l}{v_l}$ . . . . .	340
5.25	Variations de $\alpha_l$ et $\alpha_f$ en fonction de $h$ . . . . .	344
6.1	La corde sur fondation élastique . . . . .	352
6.2	Élément monodimensionnel linéaire de Lagrange . . . . .	362
6.3	Triangulation de $\bar{\Omega}$ . . . . .	362
6.4	Construction finale des fonctions $\psi_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . . . . .	364
6.5	Barrage poids en argile . . . . .	369
6.6	Élément bidimensionnel linéaire de Lagrange . . . . .	373
6.7	Triangulation du barrage . . . . .	375
B.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	403
B.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	406
B.3	Coordonnées sphériques . . . . .	408

# Liste des tableaux


1.1	Dérivée matérielle d'une grandeur physique scalaire . . . . .	44
2.1	Dilatations dans les directions du repère orthonormé fixe $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	89
2.2	Distorsions entre les directions du repère orthonormé fixe $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	93
2.3	Dilatations surfaciques dans les plans normaux aux directions du repère orthonormé fixe $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	97
2.4	Dilatations infinitésimales dans les directions du repère $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	109
2.5	Distorsions infinitésimales entre les directions du repère $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	112
2.6	Dilatations surfaciques infinitésimales dans les plans normaux aux directions du repère $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . . . . .	116
2.7	Valeurs principales des tenseurs $\mathbf{L}$ , $\mathbf{C}$ et $\mathbf{U}$ . . . . .	148
2.8	Dilatations dans les directions $\vec{e}_R$ , $\vec{e}_\Theta$ et $\vec{e}_Z$ . . . . .	151
3.1	Bilan des actions de contact sur la frontière du tétraèdre . . . . .	163
3.2	Bilan des actions de contact sur la frontière du prisme . . . . .	165
4.1	Constantes mécaniques élastiques de différents matériaux . . . . .	228
6.1	Matrice de connectivité associée à la triangulation de la figure 6.3 . . . . .	363
6.2	Valeurs exactes et approchées de la solution aux noeuds du maillage . . . . .	368
6.3	Valeurs des différentes constantes mécaniques . . . . .	373
6.4	Matrice de connectivité nodale associée à la triangulation de la figure 6.7 . . . . .	376
6.5	Matrice de connectivité (d.d.l.) associée à la triangulation de la figure 6.7 . . . . .	377
6.6	Composantes nodales du déplacement $\mathbf{u}_h$ . . . . .	383
6.7	Composantes des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_h^e$ au sein de chaque élément . . . . .	384
6.8	Composantes des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_h^e$ au sein de chaque élément . . . . .	385



# Chapitre 1

## Cinématique des milieux continus

### 1.1 Définition d'un milieu continu - Hypothèses de base

 [tab11.html](#) Si la structure de la matière est discrète, ce caractère lacunaire n'est en général pas décelable à l'échelle macroscopique. Ainsi, l'idée intuitive que donnent, lorsqu'observés à cette échelle, un solide qui se déforme (chaussée soumise au trafic routier, poutre métallique en flexion), un liquide qui s'écoule (cours d'eau, lave sur la pente d'un volcan) ou encore un gaz que l'on comprime (gonflement d'un pneumatique) est celle de corps matériels occupant en totalité (de façon continue) un domaine donné de l'espace physique. Cette idée est à la base du concept de milieu continu (on dit aussi corps matériel continu), modèle mathématique de la réalité physique dont la validité repose sur la confrontation de ses prédictions aux observations issues d'expériences.

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{M}$  désigne un milieu, ou corps matériel, solide, liquide ou gaz. Le concept de continuité de ce milieu repose sur une notion, celle de particule, et sur une hypothèse, l'hypothèse de continuité.

#### 1.1.1 Notion de particule

Cette notion est illustrée par la

**Définition 1 (Particule)**  [def1t.html](#)  [def1p.html](#) Soit  $\mathcal{M}$  un corps matériel. On appelle particule de  $\mathcal{M}$  un élément matériel de masse  $dm$  occupant au point  $M$  de l'espace physique le volume élémentaire  $dv$ .

Une particule  $P$  est donc caractérisée par le triplet  $(M, dm, dv)$ . La définition précédente montre que l'on assimile le volume élémentaire  $dv$  à un infiniment petit en totalité empli de matière. Bien qu'en contradiction avec le caractère lacunaire de celle-ci, cette modélisation est



justifiée par l'idée intuitive que donne le milieu matériel  $\mathcal{M}$  lorsqu'observé à notre échelle. De façon plus imagée, ce volume élémentaire est, d'un point de vue macroscopique, "suffisamment petit" pour pouvoir être assimilé à un infiniment petit, tout en restant représentatif de la matière c'est-à-dire en contenant un nombre "suffisamment grand" de molécules du corps considéré. Cette représentativité sera d'ailleurs souvent requise à des échelles très différentes : celle des cristaux constituant un métal (nm), des feuillets dont se compose une argile ( $\mu\text{m}$ ), des grains d'un sable (mm), des granulats entrant dans la composition d'un béton (cm), voire même des blocs d'un barrage en enrochements (m).

Si  $\rho$  désigne la masse volumique au point  $M$ , on a

$$dm = \rho dv \quad (1.1)$$

### 1.1.2 Hypothèse de continuité


Énonçons à présent l'

**Hypothèse 1 (Continuité)**  [hyp1t.html](#)  [hyp1p.html](#) Soit  $\mathcal{M}$  un corps matériel continu, ou milieu continu. L'ensemble des particules de  $\mathcal{M}$  occupe, à chaque instant  $t$ , un domaine  $\Omega_t$  ouvert et connexe de l'espace physique. À tout point de  $\Omega_t$  correspond une et une seule particule de  $\mathcal{M}$ .

Cette hypothèse établit donc, à chaque instant  $t$ , une bijection entre le milieu continu  $\mathcal{M}$ , ensemble de ses particules, et le domaine  $\Omega_t$  de l'espace physique qu'il occupe à cet instant. Les particules de  $\mathcal{M}$  s'identifient ainsi, à l'instant  $t$ , aux points de  $\Omega_t$ . Conséquemment, deux particules distinctes à un instant  $t$  donné dans  $\Omega_t$  l'ont été à tout instant  $\tau < t$  dans  $\Omega_\tau$  et le resteront à tout instant  $\tau' > t$  dans  $\Omega_{\tau'}$ .

L'hypothèse de continuité est parfois mise en défaut. C'est notamment le cas lors de l'apparition de surfaces de glissement (figure 1.1) ou de rupture au sein d'un solide, ou encore de phénomènes de cavitation dans un fluide.

## 1.2 Repérage des milieux continus

 [tab12.html](#) Soit  $\mathcal{O}$  un observateur et soit  $\mathcal{R}$  le référentiel lié à  $\mathcal{O}$ , ensemble des points de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  animés du même mouvement (translation et rotation fonctions du temps) que cet observateur. Dans tout ce qui suit,  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  désigne un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , supposé fixe dans ce référentiel.

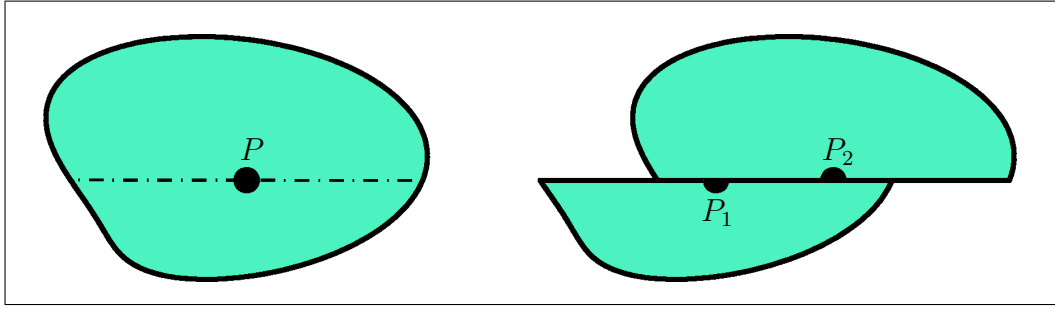




FIG. 1.1 – Apparition d’une surface de glissement

### 1.2.1 Configuration de référence et configuration actuelle

 [tab13.html](#)

**Définition 2 (Configuration de référence)**  [def2p.html](#) Soit  $\mathcal{M}$  un milieu continu. On appelle configuration de référence, ou configuration non déformée, de  $\mathcal{M}$  l’ensemble  $\Omega_{t_0}$  des positions de ses particules à un instant de référence  $t_0$  quelconque mais fixé.

**Remarque** Dans de nombreuses situations, l’instant de référence est celui où commence l’observation du processus d’évolution du milieu matériel  $\mathcal{M}$ , l’origine des temps étant alors choisie de façon à avoir  $t_0 = 0$ . La configuration de référence est alors appelée configuration initiale et notée  $\Omega_0$ . Bien qu’un tel choix d’instant de référence ne constitue pas une règle (l’instant de référence est fixé mais il peut être quelconque), c’est, dans un souci de simplicité, cette dernière notation que nous retiendrons.

Soit  $P$  une particule de  $\mathcal{M}$  quelconque mais fixée. La configuration de référence  $\Omega_0$  étant observée relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de l’espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , la position  $P_0$  de  $P$  à l’instant de référence  $t_0$  est alors repérée par le vecteur  $\vec{X} = \overrightarrow{OP_0} = X_K \vec{e}_K$  (figure 1.2).

Nous désignerons par  $\mathcal{K}_0$  l’application de  $\mathcal{M}$  sur  $\Omega_0$  qui à toute particule  $P$  de  $\mathcal{M}$  associe le vecteur  $\vec{X} = X_K \vec{e}_K$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \Omega_0 \\ P & \xrightarrow{\mathcal{K}_0} & \vec{X} = \mathcal{K}_0(P) \end{array} \quad (1.2)$$

Cette application est bijective, compte tenu de l’hypothèse 1. Les variables  $(X_1, X_2, X_3)$ , coordonnées des particules de  $\mathcal{M}$  à l’instant de référence  $t_0$ , sont appelées **variables de Lagrange**. Elles autorisent, ainsi que nous le verrons dans la section 1.3.2, une description du mouvement de  $\mathcal{M}$  privilégiant la particule (**point de vue lagrangien**).

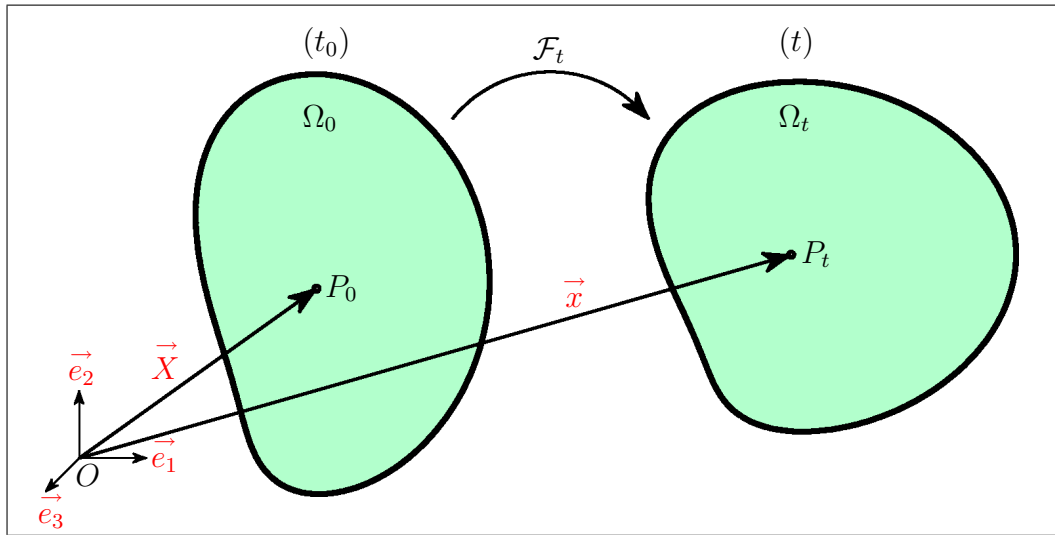


FIG. 1.2 – Configuration de référence et configuration actuelle

On donne à présent la

**Définition 3 (Configuration actuelle)**  [def3p.html](#) Soit  $t$  l'instant actuel (on dit aussi l'instant courant). On appelle configuration actuelle, ou encore configuration déformée, de  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  l'ensemble  $\Omega_t$  des positions de ses particules à cet instant.

Nous conviendrons, dans un souci de simplicité, d'observer les configurations actuelles successives de  $\mathcal{M}$  relativement au même repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  que la configuration de référence  $\Omega_0$ . Soit alors  $P$  la particule de  $\mathcal{M}$  quelconque mais fixée considérée plus haut. La position  $P_t$  de cette particule à l'instant courant  $t$  est à présent repérée par le vecteur  $\vec{x} = \overrightarrow{OP_t} = x_i \vec{e}_i$  (figure 1.2).

Soit  $\mathcal{K}_t$  l'application de  $\mathcal{M}$  sur  $\Omega_t$  qui à chaque particule  $P$  de  $\mathcal{M}$  associe le vecteur  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \Omega_t \\ P & \xrightarrow{\mathcal{K}_t} & \vec{x} = \mathcal{K}_t(P) \end{array} \quad (1.3)$$


Comme  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_t$  est bijective en vertu de l'hypothèse 1. Les variables  $(x_1, x_2, x_3)$ , coordonnées des particules de  $\mathcal{M}$  à l'instant courant  $t$ , sont appelées **variables d'Euler**. Nous verrons dans la section 1.3.2 qu'elles conduisent à une description du mouvement de  $\mathcal{M}$  qui privilégie un domaine donné de l'espace physique, au sein duquel on regarde défilier les particules (**point de vue eulérien**).

## Remarques



1. La configuration de référence  $\Omega_0$  est une configuration actuelle particulière, relative à un instant de référence  $t_0$  quelconque mais fixé.
2. Les variables de Lagrange  $X_K$ ,  $K \in \{1, 2, 3\}$ , sont représentées par une lettre et un indice majuscules, tandis qu'aux variables d'Euler  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont associés une lettre et un indice minuscules. Cette précaution nous permettra, dans ce qui suit, d'identifier sans ambiguïté et de façon systématique la nature des différentes grandeurs physiques (vectorielles ou tensorielles) que nous serons amenés à introduire. Nous parlerons ainsi de grandeurs lagrangiennes (resp<sup>t</sup> eulériennes) lorsqu'elles auront été en totalité définies relativement à la configuration de référence  $\Omega_0$  (resp<sup>t</sup> à la configuration actuelle  $\Omega_t$ ), et de grandeurs mixtes lorsqu'elles seront bâties sur ces deux configurations.

### 1.2.2 Relation entre les configurations actuelle et de référence : la transformation du milieu continu

 [tab14.html](#) L'application  $\mathcal{K}_0$  de  $\mathcal{M}$  sur  $\Omega_0$  définie dans la section 1.2.1 étant bijective (conséquence de l'hypothèse 1), l'application réciproque  $\mathcal{K}_0^{-1}$  existe et est également une bijection. On a

$$\forall P \in \mathcal{M}, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0, \quad \vec{X} = \mathcal{K}_0(P) \Leftrightarrow P = \mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X}) \quad (1.4)$$

et l'on peut donc écrire

$$\forall t, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t, \quad \vec{x} = \mathcal{K}_t(P) = \mathcal{K}_t\left(\mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X})\right) = (\mathcal{K}_t \circ \mathcal{K}_0^{-1})(\vec{X}) \quad (1.5)$$

Posons alors

$$\boxed{\mathcal{F}_t = \mathcal{K}_t \circ \mathcal{K}_0^{-1}} \quad (1.6)$$

L'application  $\mathcal{F}_t$  de  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t$  ainsi définie est appelée **transformation** du milieu continu  $\mathcal{M}$  **relative à l'instant**  $t$ . Composée d'applications bijectives, elle est elle-même une bijection de  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t$ . Les relations (1.7) résument les différentes étapes de sa construction.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \mathcal{M} & \Omega_t \\ \vec{X} \xrightarrow{\mathcal{K}_0^{-1}} P = \mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X}) \xrightarrow{\mathcal{K}_t} \vec{x} = \underbrace{(\mathcal{K}_t \circ \mathcal{K}_0^{-1})(\vec{X})}_{\mathcal{F}_t} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} \Omega_0 & & \Omega_t \\ \vec{X} \xrightarrow{\mathcal{F}_t} \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) \end{array}} \quad (1.7)$$

La transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant  $t$  présente l'avantage, que ne possèdent ni  $\mathcal{K}_0$  ni  $\mathcal{K}_t$ , de ne plus impliquer l'ensemble  $\mathcal{M}$  des particules du corps matériel, mais les ensembles  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$  associés aux configurations de référence et actuelle, domaines de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  doués de meilleures propriétés que  $\mathcal{M}$ .

Nous appellerons par ailleurs **transformation** du milieu continu  $\mathcal{M}$  et désignerons par  $\mathcal{F}$  l'application qui à  $\vec{X}$  et  $t$  associe le vecteur  $\vec{x}$ . On a donc

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_t(\vec{X}) \quad (1.8)$$

Usant de l'abus d'écriture classique consistant à identifier une application à son résultat, nous écrirons également parfois

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t)\vec{e}_i \iff \begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \quad (1.9)$$

La transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant  $t$  étant bijective, l'application réciproque existe et est une bijection de  $\Omega_t$  sur  $\Omega_0$ . On a donc



$$\begin{array}{ccc} \Omega_t & & \Omega_0 \\ \vec{x} & \xrightarrow{\mathcal{F}_t^{-1}} & \vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}) \end{array} \quad (1.10)$$

et nous écrirons aussi parfois, en usant du même abus d'écriture que ci-dessus,

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) = X_K(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_K \iff \begin{cases} X_1 = X_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_2 = X_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Transformation linéaire tangente


L'idée intuitive que donne, lorsqu'observé à notre échelle, un milieu matériel  $\mathcal{M}$  évoluant au cours du temps suggère une certaine régularité de sa transformation  $\mathcal{F}$  par rapport aux différentes variables d'espace et de temps. Cette intuition physique est à l'origine des hypothèses énoncées ci-après.

**Hypothèse 2 (Continuité de la transformation)**  [hyp2t.html](#)  [hyp2p.html](#) Soit  $t$  l'instant actuel quelconque mais fixé. La transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à cet instant est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t$  (i.e.  $\mathcal{F}_t$  est une bijection continuellement différentiable et il en est de même de sa réciproque  $\mathcal{F}_t^{-1}$ ). Soit par ailleurs  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconque mais fixé. Les applications  $t \mapsto \mathcal{F}(\vec{X}, t)$  ainsi que  $t \mapsto \partial_K \mathcal{F}(\vec{X}, t)$ ,  $K \in \{1, 2, 3\}$ , sont continues.

#### Remarques

1. La régularité de  $\mathcal{F}$  que traduit l'hypothèse précédente revêt deux aspects : une régularité, à  $t$  fixé, par rapport aux variables d'espace  $(X_1, X_2, X_3)$  d'une part, et d'autre part, à  $\vec{X}$  fixé cette fois, par rapport à la variable temps.

2. La continue-différentiabilité de  $\mathcal{F}_t$  ou de  $\mathcal{F}_t^{-1}$  est parfois mise en défaut, notamment dans le cas de milieux déformables constitués de plusieurs matériaux aux propriétés mécaniques différentes. C'est pourquoi dans certaines situations l'on exigera seulement que  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{F}_t^{-1}$  soient continuellement différentiables par morceaux.

 **tab15.html** Soient alors  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à cet instant. L'hypothèse 2 nous autorise à effectuer, dans un voisinage du point  $P_0$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  (figure 1.2), la linéarisation de  $\mathcal{F}_t$  en considérant son gradient  $\mathbf{grad}_X \mathcal{F}_t$  en ce point. Ce gradient, noté  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ , ou  $\mathbf{F}_t(\vec{X})$ , ou plus simplement  $\mathbf{F}_t$  et même  $\mathbf{F}$  lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, est un tenseur du second ordre appelé **transformation linéaire tangente** au point  $P_0$  et à l'instant  $t$ . Il est caractérisé par

$$\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) : \quad \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathcal{F}_t(\vec{X}) \iff d\vec{x} = \mathbf{F}(\vec{X}, t).d\vec{X} \quad (1.12)$$

Ses composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ont alors pour expression, en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,


$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (1.13)$$

La transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$  est donc représentée, relativement à ce repère, par une matrice à trois lignes et trois colonnes que nous désignerons encore par  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$


et la relation intrinsèque (1.12) s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}}_{\vec{dx}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}}_{\vec{dX}} \quad (1.15)$$

 **tab16.html** Soient à présent  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{F}_t^{-1}$  la réciproque de la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à cet instant. L'hypothèse 2 nous permet également d'effectuer, dans un voisinage du point  $P_t$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  (figure 1.2), la linéarisation de  $\mathcal{F}_t^{-1}$  en considérant son gradient  $\mathbf{grad}_x(\mathcal{F}_t^{-1})$  en ce point. La relation intrinsèque (1.12) appliquée à  $\mathcal{F}_t^{-1}$  nous montre alors que ce gradient n'est autre que le tenseur du second ordre inverse de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$

$$\mathbf{grad}_x(\mathcal{F}_t^{-1})(\vec{x}) = \left( \mathbf{grad}_X \mathcal{F}_t(\vec{X}) \right)^{-1} = \left( \mathbf{F}(\vec{X}, t) \right)^{-1} \quad (1.16)$$

Nous avons donc établi le

**Théorème 1 (Inverse de la transformation linéaire tangente)**  **theo1p.html**

Soient  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à cet instant. Alors la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathcal{F}_t$  au point  $P_0$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à l'instant  $t$  est inversible. Son inverse, noté  $\mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)$ , ou  $\mathbf{F}_t^{-1}(\vec{X})$ , ou plus simplement  $\mathbf{F}_t^{-1}$  et même  $\mathbf{F}^{-1}$  lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, n'est autre que le gradient  $\mathbf{grad}_x(\mathcal{F}_t^{-1})$  de  $\mathcal{F}_t^{-1}$  au point  $P_t$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$ , avec  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  l'image de  $\vec{X}$  par  $\mathcal{F}_t$ .

Omettons à nouveau, dans un souci de simplicité, les variables d'espace et de temps. Les composantes de  $\mathbf{F}^{-1}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ont alors pour expression

$$F_{\kappa i}^{-1} = \frac{\partial X_\kappa}{\partial x_i} \quad \forall (K, i) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (1.17)$$

et sa matrice représentative s'écrit, avec le même abus d'écriture que pour  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

La relation intrinsèque  $\vec{dX} = \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) \cdot \vec{dx}$  inverse de (1.12) adopte ainsi, relativement à ce repère, la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}}_{\vec{dX}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}}_{\vec{dx}} \quad (1.19)$$

### Remarques

1. Les composantes de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  possèdent deux indices, l'un majuscule et l'autre minuscule. Ce tenseur est donc une grandeur mixte, bâtie sur les deux configurations  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$ . Il en est bien entendu de même pour  $\mathbf{F}^{-1}$ , la nature des indices étant alors inversée.
2. La linéarisation de  $\mathcal{F}_t$  et l'introduction de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}_t$ , passage d'un point de vue global à un point de vue local, trouvent leur justification dans les développements des chapitres suivants. Nous verrons par exemple, dans le chapitre 2, comment cette dernière permet à elle seule de quantifier la notion intuitive que l'on peut avoir des déformations.
3. Les expressions (1.13) et (1.17) des composantes de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}^{-1}$ , de même que les expressions (1.14) et (1.18) de leurs matrices représentatives, ne valent que pour un système de coordonnées cartésiennes. Dans le cas d'autres systèmes de coordonnées (coordonnées cylindriques ou sphériques par exemple), elles doivent être adaptées en reconsidérant notamment la relation intrinsèque (1.12) (voir pour cela l'annexe B, section B.3 page 403).
4. Nous avons tiré parti, pour démontrer l'inversibilité de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}_t$  au point de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  et à l'instant  $t$ , de la continue-différentiabilité de l'inverse  $\mathcal{F}_t^{-1}$  de la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à cet instant. Cette propriété de  $\mathcal{F}_t^{-1}$  est essentielle dans la mesure où il n'existe pas de relation particulière entre la bijectivité de  $\mathcal{F}_t$  et l'inversibilité de son gradient  $\mathbf{F}_t$  en un point : la première est une propriété globale, tandis que la seconde constitue une caractéristique locale. Ainsi,  $\mathcal{F}_t$  peut être bijective et continuellement différentiable tout en possédant un gradient singulier en certains points. A contrario,  $\mathbf{F}_t$  peut être inversible en tout point sans que  $\mathcal{F}_t$  soit bijective. À titre d'exemple, le lecteur pourra s'intéresser à la transformation suivante du plan  $\mathbb{R}^2$ , qui est bijective et continuellement différentiable sur tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ne contenant pas l'origine (elle est de plus homogène de degré 1), mais dont le gradient est singulier en tout point de la droite

$$X_2 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 \\ x_2 &= \frac{X_2^3}{X_1^2 + X_2^2} \end{cases} \quad (1.20)$$

ainsi qu'à la transformation du plan complexe définie par

$$z = e^{i\theta} \longmapsto f(z) = e^{2i\theta} \quad (1.21)$$

dont le gradient est inversible en tout point mais qui n'est manifestement pas bijective.


5. Lorsque la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}_t$  ne dépend pas des variables d'espace  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant  $t$  est **affine** et l'on a

$$\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) = \vec{a}(t) + \mathbf{F}_t \cdot \vec{X} \quad (1.22)$$

La matrice représentative du gradient d'une transformation affine est donc la même en tout point, et cette transformation est encore dite homogène. Si de plus  $\vec{a}(t) = \vec{0}$ , la transformation  $\mathcal{F}_t$  est **linéaire** et coïncide alors avec son gradient  $\mathbf{F}_t$ .

## 1.2.4 Jacobien de la transformation

 [tab17.html](#) Introduisons tout d'abord la notion de domaine matériel. C'est la

**Définition 4 (Domaine matériel)**  [def4p.html](#) *Un domaine (volume, surface, courbe, vecteur) est dit matériel s'il est constitué à chaque instant des mêmes particules. Un domaine matériel est dit élémentaire lorsqu'il peut être assimilé à un infiniment petit.*

Ainsi, une particule au sens de la définition 1 est un volume matériel élémentaire.

Soient alors  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à cet instant. Anticipant sur les développements du chapitre 2, considérons, au point  $P_0$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , un volume matériel élémentaire  $dV$  bâti sur les trois vecteurs matériels élémentaires non liés  $d\vec{X}^1$ ,  $d\vec{X}^2$  et  $d\vec{X}^3$  (figure 1.3). On a donc

$$dV = \left( d\vec{X}^1 | d\vec{X}^2 | d\vec{X}^3 \right) = \det \left[ d\vec{X}^1, d\vec{X}^2, d\vec{X}^3 \right] \quad (1.23)$$

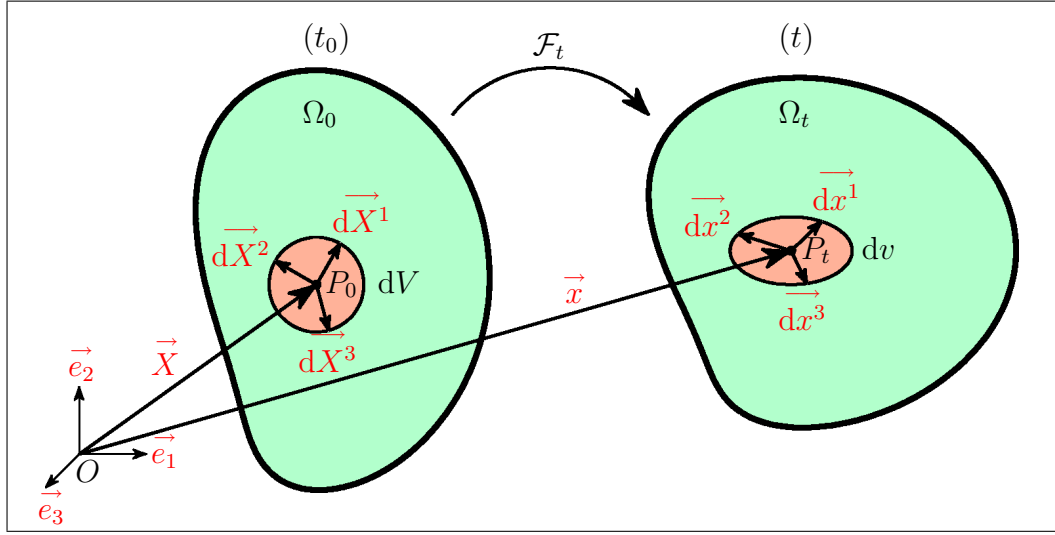


FIG. 1.3 – Variation de volume matériel élémentaire

La transformée de ce volume matériel dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  est alors le volume élémentaire  $dv$  bâti, au point  $P_t$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , sur les trois vecteurs élémentaires non liés  $\vec{dx}^1$ ,  $\vec{dx}^2$  et  $\vec{dx}^3$  définis par  $\vec{dx}^\alpha = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , où  $\mathbf{F}$  désigne la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$  (figure 1.3). Il vient alors, en omettant la variable temps ainsi que les variables d'espace  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  dans un souci de simplicité,

$$\begin{aligned}
 dv &= \det \left[ \vec{dx}^1, \vec{dx}^2, \vec{dx}^3 \right] \\
 &= \det \left[ \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^1, \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^2, \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^3 \right] \\
 &= \det \left( \mathbf{F} \cdot \left[ d\vec{X}^1, d\vec{X}^2, d\vec{X}^3 \right] \right) \\
 &= \det \mathbf{F} \det \left[ d\vec{X}^1, d\vec{X}^2, d\vec{X}^3 \right] \\
 &= \det \mathbf{F} dV
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Notons que la dernière des égalités précédentes implique le déterminant de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le jacobien de la transformation  $\mathcal{F}_t$  en ce point, que nous désignerons par  $J(\vec{X}, t)$ , ou  $J_t(\vec{X})$ , ou plus simplement  $J_t$  et même  $J$  lorsqu'il n'y a pas ambiguïté


$$\forall t, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0, \quad J(\vec{X}, t) = \det \mathbf{F}(\vec{X}, t) \tag{1.25}$$

La dernière des égalités (1.24) devient alors, en omettant à nouveau les variables de temps et d'espace,

$$\boxed{\frac{dv}{dV} = J} \quad (1.26)$$

La signification physique de cette grandeur locale (i.e. relative au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ ) est la suivante. Lorsque  $J > 1$ , il y a entre les instants  $t_0$  et  $t$  augmentation du volume matériel élémentaire  $dV$ . Si  $J < 1$ , ce volume élémentaire diminue, tandis que  $J = 1$  traduit sa conservation.

Enfin, les résultats établis dans la section 1.2.3 nous permettent d'énoncer le

**Théorème 2 (Signe du jacobien de la transformation)**  [theo2p.html](#) Soient  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à cet instant. Soit par ailleurs  $J(\vec{X}, t)$  le jacobien de  $\mathcal{F}_t$  au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , déterminant de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  en ce point et à l'instant  $t$ . On a alors

$$\boxed{\forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0, J(\vec{X}, t) > 0} \quad (1.27)$$


**Preuve** Soit  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconque mais fixé. La transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  étant inversible (c'est le théorème 1), on a  $J(\vec{X}, t) \neq 0, \forall t$ . L'application  $t \mapsto J(\vec{X}, t)$  étant par ailleurs continue en vertu de l'hypothèse 2, le signe de  $J(\vec{X}, t)$  est à chaque instant le même. Or à l'instant  $t = t_0$  on a  $\mathcal{F}_0 = \mathbf{I}_d$ , où  $\mathbf{I}_d$  désigne l'application identique de  $\Omega_0$  sur lui-même. Cette application étant linéaire, il vient, compte tenu de la remarque 5 de la page 36,  $\mathbf{F}(\vec{X}, t_0) = \mathbf{I}_d$  et donc  $J(\vec{X}, t_0) = 1$ , ce qui établit bien le théorème 2.  $\square$

**Remarque** Nous donnons ci-dessous une autre démonstration de la relation (1.24), fondée sur l'utilisation du tenseur d'orientation  $\epsilon$  (voir la section A.5 de l'annexe A, page 396) et de la notation indicielle.

$$\begin{aligned} dv &= \det \left[ \vec{dx}^1, \vec{dx}^2, \vec{dx}^3 \right] \\ &= \epsilon_{ijk} dx_i^1 dx_j^2 dx_k^3 \\ &= \epsilon_{ijk} F_{iK} dX_K^1 F_{jL} dX_L^2 F_{kM} dX_M^3 \\ &= (\epsilon_{ijk} F_{iK} F_{jL} F_{kM}) dX_K^1 dX_L^2 dX_M^3 \\ &= \det \mathbf{F} \epsilon_{KLM} dX_K^1 dX_L^2 dX_M^3 \\ &= \det \mathbf{F} dV \end{aligned} \quad (1.28)$$



### 1.2.5 Champ des déplacements et champ des vitesses

 **tab18.html** Soit  $t$  l'instant actuel quelconque mais fixé, et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à cet instant. Soit par ailleurs  $P$  une particule quelconque mais fixée de  $\mathcal{M}$ , de position dans la configuration de référence  $\Omega_0$  le point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , et de position dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  le point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ . Le déplacement de la particule  $P$  à cet instant est alors le vecteur  $\vec{u} = \vec{P_0P_t} = \vec{x} - \vec{X}$  (figure 1.4).

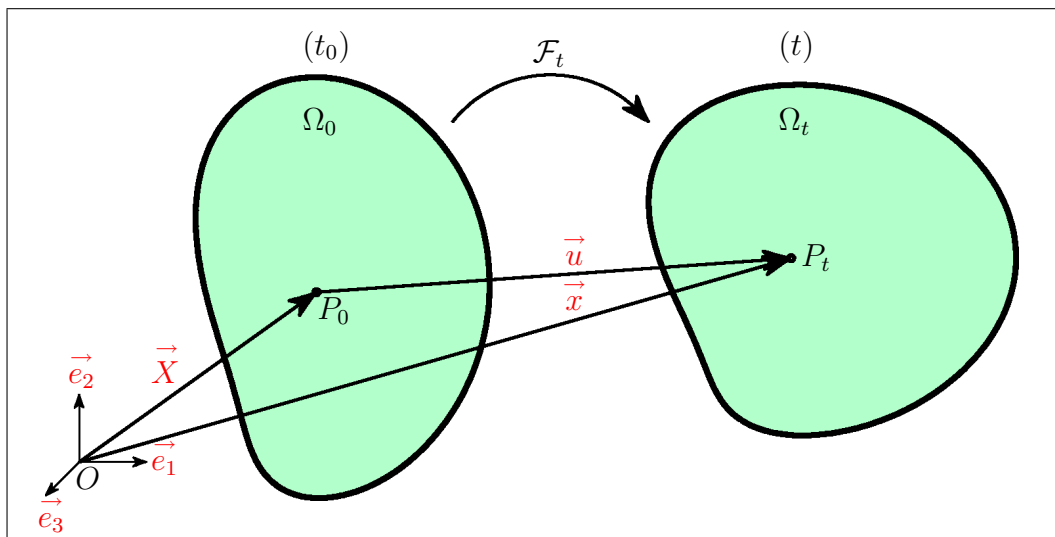



FIG. 1.4 – Déplacement  $\vec{u}$  de la particule  $P$  à l'instant  $t$

Nous appellerons **champ des déplacements** et désignerons par  $\mathbf{u}$  l'application qui à  $t$  et  $\vec{X}$  associe le vecteur déplacement  $\vec{u}$  de la particule  $P = \mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X})$  à cet instant. Usant de notations analogues à celles introduites pour les relations (1.9), nous écrirons

$$\vec{u} = \mathbf{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} = u_i(X_1, X_2, X_3, t)\vec{e}_i \iff \begin{cases} u_1 = u_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_2 = u_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_3 = u_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \quad (1.29)$$

Le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  est donc entièrement défini, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , par ses trois composantes  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , fonctions du temps et des trois variables d'espace  $X_1, X_2$  et  $X_3$  (variables de Lagrange). Son expression (1.29) impliquant à la fois  $\vec{X}$  et  $\vec{x}$ , nous écrirons indifféremment  $\vec{u} = u_i\vec{e}_i$  ou  $\vec{u} = u_K\vec{e}_K$ .

 **tab19.html** La vitesse  $\vec{v}$  de la particule  $P = \mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X})$  à l'instant courant  $t$  n'est alors autre que la dérivée par rapport au temps du déplacement  $t \mapsto \mathbf{u}(\vec{X}, t)$  de cette particule,

évaluée à cet instant,

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (1.30)$$

Exprimée sous cette forme, elle est ainsi fonction du temps et des variables de Lagrange  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , coordonnées de la particule  $P$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . Malheureusement, nombreuses sont les situations où cette description lagrangienne de la vitesse est inadaptée. C'est notamment le cas pour l'étude des écoulements de fluides, où les notions de configuration de référence et de position "initiale" des particules ne présentent pas d'intérêt. On préfère alors privilégier un domaine donné de l'espace physique au sein duquel on regarde défilier les particules (point de vue eulérien). Nous exprimerons donc la vitesse  $\vec{v}$  de la particule  $P$  à l'instant  $t$  en fonction du temps et des variables d'Euler  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , coordonnées de cette particule dans la configuration actuelle  $\Omega_t$ . Il suffit pour cela d'utiliser l'inverse  $\mathcal{F}_t^{-1}$  de la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant courant  $t$  afin de remplacer, dans la définition (1.30) de  $\vec{v}$ ,  $\vec{X}$  par son expression fonction de  $\vec{x}$  et de  $t$  fournie par (1.10). Il vient alors

$$\vec{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t) \quad (1.31)$$

Nous appellerons **champ des vitesses** et désignerons par  $\mathbf{v}$  l'application qui à  $t$  et  $\vec{x}$  associe la vitesse  $\vec{v}$  de la particule  $P = \mathcal{K}_t^{-1}(\vec{x})$  à cet instant. Usant des mêmes notations que ci-dessus, nous écrirons

$$\vec{v} = \mathbf{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t) = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \vec{e}_i \iff \begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad (1.32)$$


Le champ des vitesses  $\mathbf{v}$  est donc entièrement défini, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , par ses trois composantes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ , fonctions du temps et des trois variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (variables d'Euler).

**Remarque** Le mouvement du milieu continu  $\mathcal{M}$ , ou dans le cas d'un fluide son écoulement, sont dits **irrotationnels** lorsqu'en tout point et à tout instant  $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

## 1.3 Descriptions lagrangienne et eulérienne

### 1.3.1 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission

#### 1.3.1.1 Définitions

**Définition 5 (Trajectoires)**  [def5p.html](#) Soit  $P$  une particule quelconque mais fixée du milieu continu  $\mathcal{M}$ . On appelle trajectoire de  $P$  le lieu des positions successives de cette particule au cours du temps.


Soit  $\vec{X} = \mathcal{K}_0(P)$  le vecteur position de la particule  $P$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ , et soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant courant  $t$ . La trajectoire de  $P$  est alors la courbe géométrique ayant pour équation de paramètre  $t$

$$t \longmapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) \quad (1.33)$$

Si  $\mathbf{v}$  désigne le champ (eulérien) des vitesses, la trajectoire de la particule  $P$  est également solution du système différentiel à conditions “initiales”

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{v}(\vec{x}, t) \quad \forall t, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{X} \quad (1.34)$$

L'ensemble des trajectoires de toutes les particules de  $\mathcal{M}$  est donc une famille de courbes géométriques à trois paramètres correspondant aux coordonnées  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  des positions de ces particules à l'instant de référence  $t_0$ .

**Définition 6 (Lignes de courant)**  [def6p.html](#) Soit  $t$  l'instant actuel quelconque mais fixé. On appelle lignes de courant à l'instant  $t$  les courbes enveloppes du champ des vitesses  $\mathbf{v}(\cdot, t)$  relatif à cet instant.


Les lignes de courant à l'instant  $t$  sont donc les courbes géométriques solutions du système différentiel

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (1.35)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{v_2(x_1, x_2, x_3, t)}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} \\ \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} \end{cases} \quad (1.36)$$

Les lignes de courant à l'instant  $t$  constituent donc une famille de courbes géométriques à deux paramètres correspondant, par exemple, aux valeurs prises par  $x_2$  et  $x_3$  lorsque  $x_1 = 0$ .

**Définition 7 (Lignes d'émission)**  [def7p.html](#) Soient  $t$  l'instant actuel et  $M$  un point géométrique de l'espace physique, quelconques mais fixés. On appelle ligne d'émission du point  $M$  à l'instant  $t$  le lieu, à cet instant, des positions des particules qui sont passées en  $M$ .


Soit  $\vec{x}_M = \overrightarrow{OM}$ , soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ , et soit  $\mathcal{F}_\tau^{-1}$  la transformation inverse de  $\mathcal{M}$  aux instants  $\tau \leq t$ . La ligne d'émission du point  $M$  à l'instant  $t$  est alors la courbe géométrique ayant pour équation de paramètre  $\tau$

$$\tau \longmapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t \left( \mathcal{F}_\tau^{-1}(\vec{x}_M) \right) \quad \tau \leq t \quad (1.37)$$

Ainsi, l'ensemble des lignes d'émission à l'instant  $t$  de tous les points de l'espace physique est une famille de courbes géométriques à trois paramètres correspondant aux coordonnées  $x_{M1}$ ,  $x_{M2}$  et  $x_{M3}$  de ces points.

**Remarque** Bien qu'en contradiction avec le sens du verbe "émettre", certains auteurs définissent la ligne d'émission du point  $M$  à l'instant  $t$  comme le lieu, à cet instant, des positions des particules qui non seulement sont passées en  $M$ , mais également qui y passeront. La relation (1.37) fournit alors la partie amont de la ligne d'émission, la partie aval étant quant à elle obtenue en y remplaçant  $\tau \leq t$  par  $\tau > t$ .

### 1.3.1.2 Cas d'un mouvement permanent

**Définition 8 (Mouvement permanent)**  [def8p.html](#) *Le mouvement du milieu continu  $\mathcal{M}$  est dit permanent, ou stationnaire, lorsque le champ (eulérien) des vitesses  $\mathbf{v}$  est indépendant du temps. La vitesse  $\vec{v}$  d'une particule  $P$  à l'instant  $t$  ne dépend alors que de la position  $\vec{x}$  de cette particule à cet instant :  $\vec{v} = \mathbf{v}(\vec{x})$ .*

De l'équation (1.34) des trajectoires des particules de  $\mathcal{M}$ , on tire alors le système différentiel


$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3)} \quad (1.38)$$

Les composantes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  de  $\mathbf{v}$  étant indépendantes du temps, ce système est alors identique au système (1.35) définissant les lignes de courant.

Dans un mouvement permanent de milieu continu, les trajectoires et les lignes de courant sont donc confondues et constituent une famille de courbes géométriques à deux paramètres indépendantes du temps. Conséquemment, les particules situées sur une ligne de courant donnée décrivent toutes la même trajectoire, identique à cette ligne de courant. Il s'ensuit que la ligne d'émission du point géométrique  $M$  à l'instant  $t$  coïncide avec la partie aval de la trajectoire passant par  $M$ . Les lignes d'émission sont donc aussi une famille de courbes géométriques à deux paramètres, indépendantes du temps et constituées, compte tenu de la définition 7, par les parties aval des trajectoires passant aux points géométriques considérés. Notons qu'elles coïncident

avec l'intégralité de ces dernières lorsqu'on adopte la définition fournie par la remarque de la section 1.3.1.1 page 42.

### 1.3.2 Point de vue lagrangien et point de vue eulérien

 [tab111.html](#) Nous avons vu, dans la section 1.3.1.1, que l'ensemble des trajectoires des particules du milieu continu  $\mathcal{M}$  est une famille de courbes géométriques à trois paramètres correspondant aux variables de Lagrange  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ . Reconsidérons alors l'équation (1.33), paramétrée en temps, de la trajectoire d'une particule  $P$  quelconque mais fixée de  $\mathcal{M}$ . Dans ce mode de description associé aux variables de Lagrange  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , nous adoptons un point de vue consistant à "suivre" les particules dans leur mouvement. Ce point de vue, où l'on privilégie la particule, est appelé **point de vue lagrangien**, et la description du mouvement du milieu continu  $\mathcal{M}$  qui en résulte est dite lagrangienne. Ainsi, la définition (1.29) du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  de même que l'expression (1.30) du vecteur vitesse  $\vec{v}$  de la particule  $P$  résultent d'un point de vue lagrangien.


Considérons à présent le système différentiel (1.35) dont la résolution fournit l'ensemble des lignes de courant à l'instant  $t$ . Dans ce mode de description, associé aux variables d'Euler  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , l'instant bien que quelconque est cette fois fixé. On ne privilégie plus les particules, mais l'espace géométrique, ou une zone d'observation donnée de celui-ci ("fenêtre"), que l'on "photographie" à différents instants. Les particules situées en un point géométrique donné de cette zone à deux instants différents seront en général différentes. Ainsi en est-il lorsqu'immobile au bord d'un cours d'eau on la regarde s'écouler. Un tel point de vue, où l'on privilégie un domaine donné de l'espace physique au sein duquel on regarde défiler les particules, est appelé **point de vue eulérien**, et la description du mouvement du milieu continu  $\mathcal{M}$  qui en découle est dite eulérienne. La définition (1.31) du champ des vitesses  $\mathbf{v}$  découle ainsi d'un point de vue eulérien.

Enfin, notons que le passage d'un mode de description à l'autre s'effectue simplement à l'aide de la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant  $t$  ou de son inverse  $\mathcal{F}_t^{-1}$ .

## 1.4 Dérivée matérielle

### 1.4.1 Définition

 [tab112.html](#)

**Définition 9 (Dérivée Matérielle)**  [def9p.html](#) Soit  $P$  une particule quelconque mais fixée du milieu continu  $\mathcal{M}$  et soit  $g(P, t)$  une grandeur physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle) liée à la matière, ou grandeur matérielle. On appelle *dérivée matérielle*, ou *dérivée*

totale, ou encore dérivée particulière de  $g$ , et l'on note  $\dot{g}$ , ou  $\frac{dg}{dt}$ , le taux de variation de cette grandeur lorsqu'on suit la particule  $P$  dans son mouvement. En d'autres termes, la dérivée matérielle  $\dot{g}$  de  $g$  n'est autre que celle de la fonction  $t \mapsto g(P, t)$  de variable  $t$ .

Nous nous limitons, dans cette section, au cas où  $g$  est une grandeur scalaire. Soient alors  $(X_1, X_2, X_3)$  les coordonnées de la particule  $P$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$  (variables de Lagrange), et soient  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées de cette même particule dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  (variables d'Euler).

Adoptons tout d'abord un point de vue lagrangien. On a alors  $g(P, t) = g(X_1, X_2, X_3, t)$ , et l'expression de la dérivée matérielle  $\dot{g}$  de  $g$  vient immédiatement

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad (1.39)$$

Si l'on adopte à présent un point de vue eulérien, on a cette fois  $g(P, t) = g(x_1, x_2, x_3, t)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{grad}_x g \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Une synthèse des résultats précédents est fournie par le tableau 1.1.

TAB. 1.1 – Dérivée matérielle d'une grandeur physique scalaire


Point de vue lagrangien	Point de vue eulérien
$g = g(X_1, X_2, X_3, t)$	$g = g(x_1, x_2, x_3, t)$
$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t}$	$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathbf{grad}_x g$

## Remarques

1. La dérivée matérielle d'une grandeur scalaire lagrangienne s'identifie à sa dérivée partielle par rapport au temps. Ceci résulte du fait que les variables de Lagrange  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  ne dépendent pas du temps, illustrant ainsi la caractéristique d'une description lagrangienne du mouvement qui consiste à suivre les particules dans leur évolution.

2. La dérivée matérielle d'une grandeur scalaire eulérienne  $g$  se compose quant à elle de deux termes. Le premier,  $\frac{\partial g}{\partial t}$ , provient des variations de  $g$  en fonction du temps au point géométrique de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . Le second,  $\vec{v} \cdot \mathbf{grad}_x g$ , est qualifié de convectif et résulte du fait que les variables d'Euler  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , coordonnées de la particule  $P$  à l'instant  $t$ , sont fonctions du temps. Ainsi, entre les instants  $t$  et  $t + dt$  la particule s'est déplacée de  $\vec{dx} = \vec{v} dt$ , et la variation de la grandeur matérielle  $g$  est alors  $g(\vec{x} + \vec{v} dt, t + dt) - g(\vec{x}, t)$ .
3. La dérivée matérielle d'une grandeur vectorielle ou tensorielle exprimée dans un système de coordonnées cartésiennes s'obtient aisément en dérivant chacune de ses composantes à l'aide des relations fournies par le tableau 1.1.

### 1.4.2 Champ des accélérations

 **tab113.html** Soit  $P$  une particule quelconque mais fixée du milieu continu  $\mathcal{M}$ . L'accélération  $\vec{\gamma}$  de cette particule à l'instant  $t$  n'est autre que la dérivée matérielle de sa vitesse à cet instant. Son expression lagrangienne s'obtient aisément en considérant celle de  $\vec{v}$  fournie par (1.30). On obtient alors

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\vec{X}, t) \quad (1.41)$$

Adoptons à présent un point de vue eulérien. Si  $\mathbf{v}$  désigne le champ (eulérien) des vitesses, il vient

$$\vec{\gamma} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\vec{x}, t) \quad (1.42)$$


Nous appellerons **champ des accélérations** et désignerons par  $\gamma$  l'application qui à  $t$  et  $\vec{x}$  associe l'accélération  $\vec{\gamma}$  de la particule  $P = \mathcal{K}_t^{-1}(\vec{x})$  à cet instant. Usant de notations analogues à celles introduites pour les relations (1.9), (1.29) et (1.32), nous écrirons

$$\vec{\gamma} = \gamma(\vec{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\vec{x}, t) = \gamma_i(x_1, x_2, x_3, t) \vec{e}_i \iff \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \gamma_2 = \gamma_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ \gamma_3 = \gamma_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad (1.43)$$


Le champ des accélérations  $\gamma$  est donc entièrement défini, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , par ses trois composantes  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$ , fonctions du temps et des trois variables d'espace  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . La remarque 3 de la page 45 jointe à l'expression de la dérivée matérielle d'une grandeur scalaire eulérienne donnée dans le tableau 1.1 nous permet alors d'écrire

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (1.44)$$

Ces trois relations scalaires, qui ne valent que pour un système de coordonnées cartésiennes, peuvent être unifiées en une égalité vectorielle qui est alors intrinsèque. C'est le

**Théorème 3 (Accélération en variables d'Euler)**  [theo3p.html](#) Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  la vitesse et l'accélération d'une particule  $P$  quelconque mais fixée du milieu continu  $\mathcal{M}$ , exprimées en variables d'Euler. On a alors

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \vec{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (1.45)$$

**Preuve**  [demth3p.html](#) Dans tout ce qui suit et dans le souci d'alléger l'écriture, nous désignerons par  $\partial_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_i$  :  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Si  $\vec{a}$  est une expression vectorielle telle que par exemple  $\vec{a} = (\mathbf{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v}$ , nous conviendrons de désigner par  $[\vec{a}]_i$  sa composante sur  $\vec{e}_i$  :  $[\vec{a}]_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$ . On a alors, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et en tirant parti de la notation indicielle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{grad}_x \vec{v}^2]_i &= \frac{1}{2} \partial_i (\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_i (v_k v_k) \\ &= v_k \partial_i v_k \end{aligned} \quad (1.46)$$

On a par ailleurs, en utilisant le tenseur d'orientation  $\epsilon$  (voir la section A.5 de l'annexe A, page 396) ainsi que le formulaire donné en annexe B (section B.1.2 page 400),

$$\begin{aligned} [(\mathbf{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v}]_i &= \epsilon_{ijk} [\mathbf{rot}_x \vec{v}]_j v_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \partial_l v_m v_k \\ &= (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) \partial_l v_m v_k \\ &= v_k \partial_k v_i - v_k \partial_i v_k \end{aligned} \quad (1.47)$$

Combinant (1.46) et (1.47), nous obtenons

$$\left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \vec{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \vec{v}) \wedge \vec{v} \right]_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \partial_k v_i \quad (1.48)$$


et l'on retrouve le membre de droite de l'égalité (1.44), ce qui démontre bien le théorème 3.  $\square$

Enfin, notons que l'égalité vectorielle (1.45) conduit à la relation de champs

$$\gamma = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \quad (1.49)$$



### 1.4.3 Dérivées matérielles du gradient et du jacobien de la transformation

 [tab114.html](#) Soient  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ , et soit  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  la transformation linéaire tangente au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à cet instant.

Intéressons-nous tout d'abord à la dérivée matérielle de cette grandeur physique fonction des variables de Lagrange  $(X_1, X_2, X_3)$  et du temps, dont les composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont fournies par (1.13). Il vient alors, en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité et compte tenu de la remarque 3 de la page 45 ainsi que des résultats regroupés dans le tableau 1.1,

$$\dot{F}_{iK} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right) = \frac{\partial}{\partial X_K} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_K} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (1.50)$$

et l'on voit que  $\dot{\mathbf{F}}$  s'identifie au gradient des vitesses relativement aux variables de Lagrange

$$\dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{v}(\mathcal{F}_t(\vec{X}), t) \quad (1.51)$$

Or le champ des vitesses  $\mathbf{v}$  est fonction des variables d'Euler  $(x_1, x_2, x_3)$  et du temps, de sorte qu'il n'est pas naturel d'introduire son gradient "lagrangien"  $\mathbf{grad}_X \mathbf{v}$ . Il n'en est bien entendu pas de même du gradient  $\mathbf{G}$  de  $\mathbf{v}$  relativement aux variables d'Euler défini par

$$\mathbf{G}(\vec{x}, t) = \mathbf{grad}_x \mathbf{v}(\vec{x}, t) \quad (1.52)$$

avec  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  l'image de  $\vec{X}$  par  $\mathcal{F}_t$ , et dont les composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  s'écrivent, en omettant à nouveau les variables d'espace et de temps,

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (1.53)$$

Reconsidérant (1.50), nous obtenons


$$\dot{F}_{iK} = \frac{\partial v_i}{\partial X_K} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} = G_{ij} F_{jK} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (1.54)$$

c'est-à-dire

$$\dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) = \mathbf{G}(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad (1.55)$$

ou plus simplement

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \quad (1.56)$$



 [pap114.html](#) De  $\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}_d$ , on tire par ailleurs

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{0} \implies \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \implies \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (1.57)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.56),

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G} \quad (1.58)$$

et le lecteur prendra garde à ne pas confondre  $\dot{\mathbf{F}}^{-1}$ , dérivée matérielle de  $\mathbf{F}^{-1}$ , avec l'inverse de  $\dot{\mathbf{F}}$  lorsque cette dernière existe.

 [tab115.html](#)  [pap115.html](#) On s'intéresse à présent à la dérivée particulière du jacobien  $J(\vec{\mathbf{X}}, t)$  de la transformation  $\mathcal{F}$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$ , déterminant de  $\mathbf{F}(\vec{\mathbf{X}}, t)$ . On a alors, en omettant les variables d'espace et de temps et compte tenu des développements précédents,

$$\begin{aligned} j &= \frac{d}{dt}(\epsilon_{IJK} F_{1I} F_{2J} F_{3K}) \\ &= \epsilon_{IJK} \dot{F}_{1I} F_{2J} F_{3K} + \epsilon_{IJK} F_{1I} \dot{F}_{2J} F_{3K} + \epsilon_{IJK} F_{1I} F_{2J} \dot{F}_{3K} \\ &= \epsilon_{IJK} G_{1I} F_{1I} F_{2J} F_{3K} + \epsilon_{IJK} F_{1I} G_{2m} F_{mJ} F_{3K} + \epsilon_{IJK} F_{1I} F_{2J} G_{3n} F_{nK} \\ &= G_{1I} \epsilon_{IJK} F_{1I} F_{2J} F_{3K} + G_{2m} \epsilon_{IJK} F_{1I} F_{mJ} F_{3K} + G_{3n} \epsilon_{IJK} F_{1I} F_{2J} F_{nK} \\ &= G_{1I} \delta_{1I} J + G_{2m} \delta_{m2} J + G_{3n} \delta_{n3} J \\ &= J(G_{11} + G_{22} + G_{33}) \\ &= J \operatorname{div}_x \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.59)$$

En résumé, on a

$$\dot{J}(\vec{\mathbf{X}}, t) = J(\vec{\mathbf{X}}, t) \operatorname{div}_x \mathbf{v}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.60)$$

ou plus simplement

$$\dot{J} = J \operatorname{div}_x \mathbf{v} \quad (1.61)$$


## Remarques

1. Le gradient des vitesses  $\mathbf{G}$  défini par (1.52) est un tenseur du second ordre eulérien. On remarquera en effet, dans l'expression (1.53) de ses composantes, les deux indices minuscules.
2. Il découle de (1.60) que la conservation du volume matériel élémentaire, ou incompressibilité locale, traduite d'un point de vue lagrangien par  $J = 1$ , se caractérise également, d'un point de vue eulérien cette fois, par  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ .

$$J(\vec{\mathbf{X}}, t) = 1 \quad \forall t \iff \operatorname{div}_x \mathbf{v}(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad \forall (\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_t(\vec{\mathbf{X}}), t) \quad (1.62)$$

## 1.4.4 Dérivées d'intégrales sur des domaines matériels

### 1.4.4.1 Dérivée d'une intégrale de volume

 [tab116.html](#) Soit  $t$  l'instant courant quelconque mais fixé, et soit  $\mathcal{V}$  un volume matériel occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à cet instant, le domaine  $\mathcal{V}_t$  de l'espace physique. Soit par ailleurs  $g$  une grandeur scalaire eulérienne. Intéressons-nous alors à l'intégrale  $I(t)$  de  $g$  sur le domaine géométrique  $\mathcal{V}_t$

$$I(t) = \int_{\mathcal{V}_t} g(\vec{x}, t) \, dv \quad (1.63)$$

et plus précisément à sa dérivée par rapport au temps  $\dot{I}(t)$ . La difficulté résidant ici dans le fait que le domaine d'intégration  $\mathcal{V}_t$  dépend lui-même du temps, nous allons chercher à tirer parti de la transformation  $\mathcal{F}_t$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$  pour remplacer l'expression (1.63) de  $I(t)$  par une intégrale sur un domaine indépendant du temps, en effectuant le changement de variables d'espace  $\vec{X} \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  que suggère cette transformation.

Soit donc  $G$  la fonction de variables  $\vec{X}$  et  $t$  définie par

$$G(\vec{X}, t) = g(\mathcal{F}_t(\vec{X}), t) \quad (1.64)$$

et soit  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{V}_t)$  le domaine de l'espace physique qu'occupe le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . On a alors, compte tenu de (1.26),

$$I(t) = \int_{\mathcal{V}_0} G(\vec{X}, t) J(\vec{X}, t) \, dV \quad (1.65)$$

Omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité, nous obtenons, avec (1.61),

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{\mathcal{V}_0} \frac{d}{dt}(GJ) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} (\dot{G}J + G\dot{J}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} (\dot{G}J + GJ \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} (\dot{G} + G \operatorname{div}_x \mathbf{v}) J \, dV \end{aligned} \quad (1.66)$$


Le retour dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  s'effectue ensuite grâce au changement de variables  $\vec{x} \mapsto \vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x})$  associé à la transformation inverse  $\mathcal{F}_t^{-1}$ . Il vient

$$\dot{I}(t) = \int_{\mathcal{V}_t} (\dot{g} + g \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \, dv \quad (1.67)$$

et l'on a donc


$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} g \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} (\dot{g} + g \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \, dv \quad (1.68)$$

#### 1.4.4.2 Dérivée d'une intégrale de surface

 [pap1442a.html](#) Soit à présent  $\mathcal{S}$  une surface matérielle occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant courant  $t$ , le domaine  $\mathcal{S}_t$  de l'espace physique. Soit par ailleurs  $\vec{a}$  une grandeur vectorielle eulérienne, et soit  $I(t)$  son flux à travers le domaine géométrique  $\mathcal{S}_t$

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}_t} \vec{a}(\vec{x}, t) \cdot \vec{ds} \quad (1.69)$$

La dérivation de cette intégrale par rapport au temps se heurte, là encore, à la difficulté rencontrée dans la section 1.4.4.1, liée à la dépendance du domaine d'intégration  $\mathcal{S}_t$  vis-à-vis de cette variable. Il nous faut donc, comme précédemment, substituer à l'expression (1.69) de  $I(t)$  une intégrale sur un domaine indépendant du temps, en effectuant le changement de variables d'espace  $\vec{X} \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  fourni par la transformation  $\mathcal{F}_t$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ . L'examen de (1.69) montre alors que cette substitution requiert l'expression de la transformée  $\vec{ds}$ , dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , d'un élément de surface matériel  $\vec{dS}$  pris dans la configuration de référence  $\Omega_0$ .

 [pap1442b.html](#) Soit donc  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconque mais fixé. Anticipant sur les développements du chapitre 2, considérons, au point  $P_0$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , une surface matérielle élémentaire  $\vec{dS}$  bâtie sur les deux vecteurs matériels élémentaires non liés  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$  (figure 1.5). En d'autres termes, on a

$$\vec{dS} = \vec{dX}^1 \wedge \vec{dX}^2 \quad (1.70)$$

La transformée  $\vec{ds}$  de cette surface matérielle dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  est alors la surface élémentaire bâtie, au point  $P_t$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  extrémité du vecteur

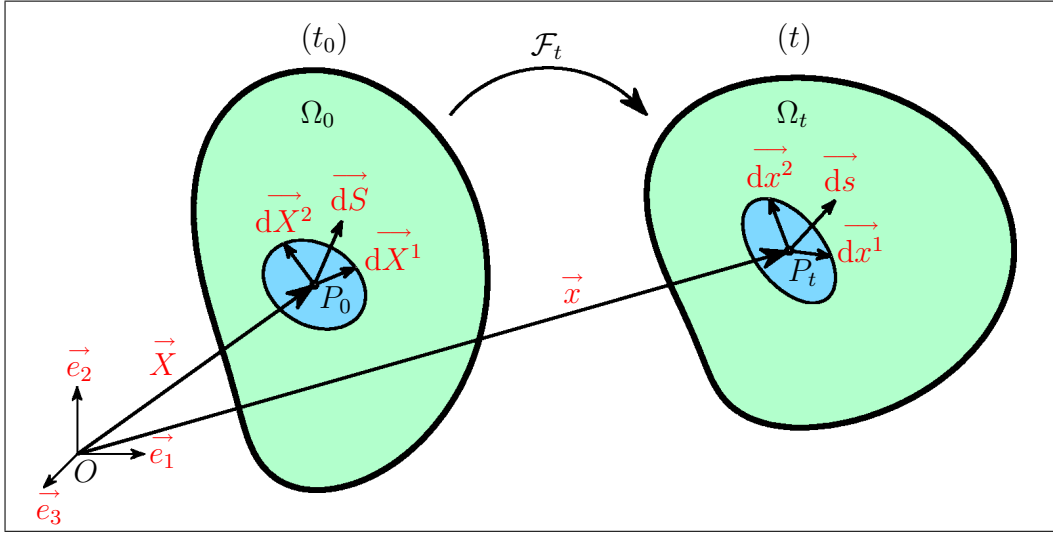


FIG. 1.5 – Variation de surface matérielle élémentaire

$\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , sur les deux vecteurs élémentaires non liés  $\vec{dx}^1$  et  $\vec{dx}^2$  définis par  $\vec{dx}^\alpha = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , où  $\mathbf{F}$  désigne la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$  (figure 1.5). On a donc  $\vec{ds} = \vec{dx}^1 \wedge \vec{dx}^2$  et il vient, en omettant la variable temps ainsi que les variables d'espace  $X_1, X_2$  et  $X_3$  dans un souci de simplicité,

$$\begin{aligned} ds_i &= \left[ \vec{dx}^1 \wedge \vec{dx}^2 \right]_i \\ &= \epsilon_{ijk} dx_j^1 dx_k^2 \\ &= \epsilon_{ijk} F_{jL} dX_L^1 F_{kM} dX_M^2 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (1.71)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F_{iN} ds_i &= F_{iN} \epsilon_{ijk} F_{jL} dX_L^1 F_{kM} dX_M^2 \\ &= \epsilon_{ijk} F_{iN} F_{jL} F_{kM} dX_L^1 dX_M^2 \\ &= J \epsilon_{NLM} dX_L^1 dX_M^2 \\ &= J dS_N \quad \forall N \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (1.72)$$

On a donc

$${}^t \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \vec{ds} = J(\vec{X}, t) \vec{dS} \quad (1.73)$$

c'est-à-dire

$$\vec{ds} = J(\vec{X}, t) {}^t \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) \cdot \vec{dS} \quad (1.74)$$

 pap1442c.html Soit alors  $\vec{A}$  la fonction de variables  $\vec{X}$  et  $t$  définie par

$$\vec{A}(\vec{X}, t) = \vec{a}(\mathcal{F}_t(\vec{X}), t) \quad (1.75)$$

et soit  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{S}_t)$  le domaine de l'espace physique occupé par la surface matérielle  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . Il vient alors, avec (1.74),

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}_0} \vec{A}(\vec{X}, t) \cdot \left( J(\vec{X}, t) {}^t\mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) \cdot \vec{dS} \right) \quad (1.76)$$

ou encore, en tirant parti de la notation indicielle tout en omettant, dans un souci de simplicité, les variables d'espace et de temps,

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}_0} J A_i F_{K^i}^{-1} dS_K \quad (1.77)$$

On a alors, compte tenu de (1.58) et (1.61),

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{\mathcal{S}_0} \frac{d}{dt} (J A_i F_{K^i}^{-1}) dS_K \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( \dot{J} A_i F_{K^i}^{-1} + J \dot{A}_i F_{K^i}^{-1} + J A_i \dot{F}_{K^i}^{-1} \right) dS_K \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( J \operatorname{div}_x \mathbf{v} A_i F_{K^i}^{-1} + J \dot{A}_i F_{K^i}^{-1} - J A_i F_{K^j}^{-1} G_{ji} \right) dS_K \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( J \operatorname{div}_x \mathbf{v} A_i F_{K^i}^{-1} + J \dot{A}_i F_{K^i}^{-1} - J A_j F_{K^i}^{-1} G_{ij} \right) dS_K \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( \operatorname{div}_x \mathbf{v} A_i + \dot{A}_i - G_{ij} A_j \right) J F_{K^i}^{-1} dS_K \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( \operatorname{div}_x \vec{A} + \frac{d\vec{A}}{dt} - \mathbf{G} \cdot \vec{A} \right) \cdot \left( J {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{dS} \right) \end{aligned} \quad (1.78)$$


et le retour dans la configuration actuelle  $\Omega_t$ , effectué grâce au changement de variables  $\vec{x} \mapsto \vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x})$  associé à la transformation inverse  $\mathcal{F}_t^{-1}$ , conduit à

$$\dot{I}(t) = \int_{\mathcal{S}_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + \operatorname{div}_x \mathbf{v} \vec{a} - \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot \vec{ds} \quad (1.79)$$

Nous avons donc finalement

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_t} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathcal{S}_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + \operatorname{div}_x \mathbf{v} \vec{a} - \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot \vec{ds}} \quad (1.80)$$

### 1.4.4.3 Dérivée d'une intégrale curviligne

 [pap1443.html](#) Considérons maintenant une courbe matérielle  $\mathcal{C}$  occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant courant  $t$ , le domaine  $\mathcal{C}_t$  de l'espace physique, et intéressons-nous à la circulation  $I(t)$  de la grandeur vectorielle eulérienne  $\vec{a}$  sur ce domaine géométrique

$$I(t) = \int_{\mathcal{C}_t} \vec{a}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx} \quad (1.81)$$

Effectuons alors la dérivation par rapport au temps de  $I(t)$  en adoptant la démarche des sections précédentes 1.4.4.2 et 1.4.4.1. Soit donc  $\vec{A}$  la fonction de variables  $\vec{X}$  et  $t$  définie par (1.75), et soit  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{C}_t)$  le domaine de l'espace physique qu'occupe la courbe matérielle  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . On a alors, compte tenu de (1.12),

$$I(t) = \int_{\mathcal{C}_0} \vec{A}(\vec{X}, t) \cdot (\mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \vec{dX}) \quad (1.82)$$

ou encore, avec la notation indicielle et en omettant les variables d'espace et de temps,

$$I(t) = \int_{\mathcal{C}_0} A_i F_{iK} dX_K \quad (1.83)$$

Il vient alors, avec (1.56),

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{\mathcal{C}_0} \frac{d}{dt} (A_i F_{iK}) dX_K \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} (\dot{A}_i F_{iK} + A_i \dot{F}_{iK}) dX_K \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} (\dot{A}_i F_{iK} + A_i G_{ij} F_{jK}) dX_K \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} (\dot{A}_i F_{iK} + A_j G_{ji} F_{iK}) dX_K \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} (\dot{A}_i + G_{ji} A_j) F_{iK} dX_K \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} + {}^t \mathbf{G} \cdot \vec{A} \right) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{dX}) \end{aligned} \quad (1.84)$$



Effectuant le retour dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  comme dans les sections 1.4.4.2 et 1.4.4.1, nous obtenons

$$\dot{I}(t) = \int_{\mathcal{C}_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + {}^t \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot \vec{dx} \quad (1.85)$$

et l'on a donc


$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_t} \vec{a} \cdot d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + {}^t \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot d\vec{x} \quad (1.86)$$

## 1.5 Équations de conservation de la masse

**Hypothèse 3 (Conservation de la masse)**  [hyp3t.html](#)  [hyp3p.html](#) *Le milieu continu  $\mathcal{M}$  n'est le siège d'aucun phénomène de diffusion, d'aucune réaction chimique et d'aucun phénomène de changement de phase.*

Conséquemment, la masse d'un volume matériel donné de  $\mathcal{M}$  se conserve au cours du temps.

### 1.5.1 Point de vue eulérien

 [tab117.html](#) Soit  $t$  l'instant courant quelconque mais fixé, et soit  $\mathcal{V}$  un volume matériel occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à cet instant, le domaine géométrique  $\mathcal{V}_t$  de l'espace physique. Soit par ailleurs  $\rho$  le champ eulérien des masses volumiques. La masse du volume matériel  $\mathcal{V}$  est alors

$$m = \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) dv \quad (1.87)$$

Cette masse étant indépendante de la variable temps (conséquence de l'hypothèse 3), on a  $\dot{m} = 0$  c'est-à-dire, compte tenu de (1.68),

$$\int_{\mathcal{V}_t} \left( \dot{\rho}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \operatorname{div}_x \mathbf{v}(\vec{x}, t) \right) dv = 0 \quad (1.88)$$

Cette relation étant vérifiée pour tout volume matériel  $\mathcal{V}$ , on en déduit, presque partout sur  $\Omega_t$ , l'équation locale de conservation de la masse en variables d'Euler

$$\dot{\rho}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \operatorname{div}_x \mathbf{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.89)$$

Nous avons également, en exprimant la dérivée matérielle  $\dot{\rho}$  de  $\rho$  grâce à la relation fournie par le tableau 1.1,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \mathbf{grad}_x \rho(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \operatorname{div}_x \mathbf{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.90)$$




On en déduit alors la relation suivante, équivalente à (1.89),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \operatorname{div}_x \left( \rho(\vec{x}, t) \mathbf{v}(\vec{x}, t) \right) = 0 \quad (1.91)$$

ou plus simplement

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.92)$$

**Remarque**  [pap151.html](#) Soit  $g$  une grandeur scalaire eulérienne. On a alors, avec (1.68),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho g \, dv &= \int_{\mathcal{V}_t} \left( \frac{d(\rho g)}{dt} + \rho g \operatorname{div}_x \mathbf{v} \right) dv \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} (\dot{\rho} g + \rho \dot{g} + \rho g \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} (\rho \dot{g} + (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \mathbf{v}) g) \, dv \end{aligned} \quad (1.93)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.89),

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho g \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \dot{g} \, dv \quad (1.94)$$

Soit à présent  $\mathbf{g}$  une grandeur vectorielle ou tensorielle exprimée en variables d'Euler. Appliquant la relation précédente (1.94) à chacune des composantes de  $\mathbf{g}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons la relation intrinsèque

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{g} \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \dot{\mathbf{g}} \, dv \quad (1.95)$$

À titre d'exemple, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \, dv \quad (1.96)$$


ainsi que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} \, dv \quad (1.97)$$

et l'on retrouve là deux résultats connus. La relation (1.96) traduit en effet l'égalité entre la dérivée matérielle de la résultante  $\vec{\mathcal{R}}^c(\mathcal{V}_t)$  du torseur cinétique  $\mathcal{T}^c(\mathcal{V}_t)$  (i.e. des quantités de mouvement) du volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  et la résultante  $\vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t)$  de son torseur

dynamique  $\mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t)$  (i.e. des quantités d'accélération) à ce même instant. La relation (1.97) exprime quant à elle l'identité entre la dérivée matérielle de l'énergie cinétique  $\mathcal{E}^c(\mathcal{V}_t)$  de  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  et la puissance  $\mathcal{P}^d(\mathcal{V}_t)$  de ses quantités d'accélération à cet instant.

## 1.5.2 Point de vue lagrangien

 [tab118.html](#) Considérons à nouveau un volume matériel  $\mathcal{V}$  occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant courant  $t$ , le domaine géométrique  $\mathcal{V}_t$  de l'espace physique. Ainsi que nous l'avons vu dans la section précédente 1.5.1, la masse de ce volume matériel est donnée par

$$m = \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) dv \quad (1.98)$$

où  $\rho$  désigne le champ eulérien des masses volumiques.

Effectuons alors, comme dans la section 1.4.4.1, le changement de variables d'espace  $\vec{X} \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  fourni par la transformation  $\mathcal{F}_t$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ . Soit donc  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{V}_t)$  le domaine de l'espace physique occupé par le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . Si nous convenons de continuer à désigner par le même symbole (cet abus d'écriture bien que parfois dangereux est au demeurant classique) la fonction de  $\vec{X}$  et  $t$  image réciproque de  $\rho$  par le changement de variables précédent, il vient, compte tenu de (1.26),

$$m = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(\vec{X}, t) J(\vec{X}, t) dV \quad (1.99)$$

La relation (1.98) écrite à l'instant de référence  $t_0$  donne par ailleurs

$$m = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(\vec{X}, t_0) dV \quad (1.100)$$

La masse  $m$  du volume matériel  $\mathcal{V}$  étant indépendante du temps (conséquence de l'hypothèse 3), il vient

$$\int_{\mathcal{V}_0} \left( \rho(\vec{X}, t_0) - \rho(\vec{X}, t) J(\vec{X}, t) \right) dV = 0 \quad (1.101)$$

Le volume matériel  $\mathcal{V}$  étant quelconque, on en déduit, presque partout sur  $\Omega_0$ , l'équation locale de conservation de la masse en variables de Lagrange

$$\rho(\vec{X}, t_0) = J(\vec{X}, t) \rho(\vec{X}, t) \quad (1.102)$$

**Remarque** Soit  $P$  une particule du milieu continu  $\mathcal{M}$  quelconque mais fixée, repérée par le vecteur  $\vec{X}$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ . On a alors, compte tenu de (1.1) et de l'hypothèse 3,

$$dm = \rho(\vec{X}, t) dv = \rho(\vec{X}, t_0) dV \quad (1.103)$$

Il suffit alors de tirer parti de (1.26) pour retrouver l'équation (1.102).

## 1.6 Récapitulatif des formules essentielles

### 1.6.1 Repérage des milieux continus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \Omega_0 \\ P & \xrightarrow{\mathcal{K}_0} & \vec{X} = \mathcal{K}_0(P) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \Omega_t \\ P & \xrightarrow{\mathcal{K}_t} & \vec{x} = \mathcal{K}_t(P) \end{array}$$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{K}_t \circ \mathcal{K}_0^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \mathcal{M} & \Omega_t \\ \vec{X} & \xrightarrow{\mathcal{K}_0^{-1}} P = \mathcal{K}_0^{-1}(\vec{X}) \xrightarrow{\mathcal{K}_t} \vec{x} = \underbrace{(\mathcal{K}_t \circ \mathcal{K}_0^{-1})}_{\mathcal{F}_t}(\vec{X}) & \Rightarrow \begin{array}{ccc} \Omega_0 & & \Omega_t \\ \vec{X} & \xrightarrow{\mathcal{F}_t} & \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) \end{array} \end{array}$$

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_t(\vec{X})$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_t & & \Omega_0 \\ \vec{x} & \xrightarrow{\mathcal{F}_t^{-1}} & \vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}) \end{array}$$

$$\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) : \quad \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \text{grad}_{\vec{X}} \mathcal{F}_t(\vec{X}) \iff d\vec{x} = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}$$

$$\text{grad}_{\vec{x}} (\mathcal{F}_t^{-1})(\vec{x}) = \left( \text{grad}_{\vec{X}} \mathcal{F}_t(\vec{X}) \right)^{-1} = \left( \mathbf{F}(\vec{X}, t) \right)^{-1}$$

$$\frac{dv}{dV} = J = \det \mathbf{F}$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \left( \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t \right)$$

### 1.6.2 Descriptions lagrangienne et eulérienne

$$t \longmapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) \quad (\text{trajectoires})$$

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (\text{lignes de courant})$$

$$\tau \longmapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t \left( \mathcal{F}_\tau^{-1}(\vec{x}_M) \right) \quad \tau \leq t \quad (\text{lignes d'émission})$$

### 1.6.3 Dérivée matérielle

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad (\text{Lagrange})$$

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathbf{grad}_x g \quad (\text{Euler})$$

$$\gamma = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{grad}_x \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}$$

$$\dot{J} = J \operatorname{div}_x \mathbf{v}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} g \, dv = \int_{V_t} (\dot{g} + g \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \, dv$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{S_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + \operatorname{div}_x \mathbf{v} \vec{a} - \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \vec{a} \cdot d\vec{x} = \int_{C_t} \left( \frac{d\vec{a}}{dt} + {}^t \mathbf{G} \cdot \vec{a} \right) \cdot d\vec{x}$$

### 1.6.4 Équations de conservation de la masse

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{Euler})$$

$$\rho_0 = J \rho \quad (\text{Lagrange})$$

## 1.7 Exercices et problèmes

### 1.7.1 Énoncés des exercices

#### E1.1 Potentiel des accélérations

Montrer que lorsqu'un écoulement est irrotationnel ( $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) le champ des accélérations  $\boldsymbol{\gamma}$  dérive d'un potentiel.

#### E1.2 Théorème de Lagrange

On considère un écoulement de fluide caractérisé par son champ eulérien des vitesses  $\mathbf{v}$  et l'on désigne par  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  le tourbillon des vitesses défini par  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}_x \mathbf{v}$ .

1. Montrer que si le champ des accélérations  $\boldsymbol{\gamma}$  dérive d'un potentiel on a  $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} + \mathbf{rot}_x(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
2. Démontrer le

**Théorème 4 (Lagrange)** *Si un fluide est mis en mouvement sans choc à partir de l'état de repos et si à tout instant son champ d'accélération dérive d'un potentiel, le champ des vitesses qui en résulte est irrotationnel ( $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ).*

#### E1.3 Théorème de Lord Kelvin

On considère à nouveau un écoulement de fluide caractérisé par son champ eulérien des vitesses  $\mathbf{v}$  et l'on désigne par  $\mathcal{C}$  une courbe matérielle fermée quelconque mais fixée occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant courant  $t$ , le domaine  $\mathcal{C}_t$  de l'espace physique. Soit alors  $I(t)$  la circulation de  $\mathbf{v}$  sur ce domaine géométrique

$$I(t) = \int_{\mathcal{C}_t} \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}$$

1. Montrer que la dérivée matérielle de  $I(t)$  a pour expression  $\dot{I}(t) = \int_{\mathcal{C}_t} \vec{\gamma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}$ .
2. Que peut-on dire de  $t \mapsto I(t)$  lorsque le champ des accélérations  $\boldsymbol{\gamma}$  dérive d'un potentiel ? (c'est le théorème de Lord Kelvin).
3. On suppose de plus que le fluide est mis en mouvement sans choc à partir de l'état de repos. Montrer alors que l'écoulement qui en résulte est irrotationnel (théorème 4).

#### E1.4 Écoulement sphérique d'un fluide incompressible

Soit l'écoulement permanent d'un fluide défini par le champ eulérien des vitesses  $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^{3*}$ , où  $q$  est un réel donné.

1. Montrer qu'il s'agit d'un écoulement irrotationnel de fluide incompressible.
2. Calculer le débit volumique  $Q$  du fluide à travers la sphère de rayon  $r$  centrée sur l'origine  $O$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ . Comment peut-on qualifier cette dernière ?

### E1.5 Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique

On s'intéresse ici au modèle d'écoulement plan et permanent d'un fluide autour d'un pilier cylindrique défini, avec les notations de la figure 1.6, par le champ des vitesses  $\mathbf{v} = v_i \vec{e}_i$  de composantes

$$\begin{cases} v_1 &= v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \\ v_2 &= -v_0 \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \\ v_3 &= 0 \end{cases}$$

où  $v_0$  est une constante strictement positive.

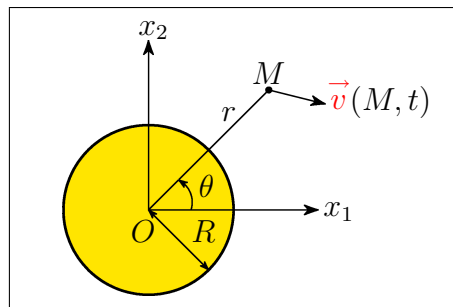


FIG. 1.6 – Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique

Déterminer les lignes de courant et les trajectoires.

### E1.6 Traction-torsion d'une barre cylindrique

L'éprouvette cylindrique représentée sur la figure 1.7 est soumise à un système d'actions mécaniques extérieures induisant la transformation

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 \cos \frac{X_3}{\lambda} - X_2 \sin \frac{X_3}{\lambda} \\ x_2 &= X_1 \sin \frac{X_3}{\lambda} + X_2 \cos \frac{X_3}{\lambda} \\ x_3 &= (k + 1)X_3 \end{cases}$$

où  $k$  et  $\lambda$  sont deux constantes strictement positives.

1. Décrire cette transformation en étudiant la déformée d'une section droite  $X_3 = \text{cste}$  de l'éprouvette.
2. Quelle est la transformée de la génératrice d'équation  $X_1 = R$  et  $X_2 = 0$  (figure 1.7).

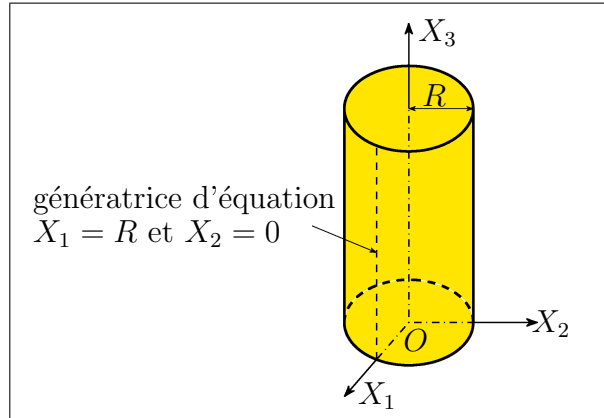


FIG. 1.7 – Traction-torsion d'une barre cylindrique

### E1.7 Transformations infinitésimales

Anticipant, pour les besoins de l'exercice E1.8, sur les développements du chapitre 2 et plus précisément de sa section 2.4, nous donnons ici la

**Définition 10 (Transformations infinitésimales)** Soit  $\mathbf{u}$  le champ des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$ , et soit  $\mathbf{H}^L(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{u}(\vec{X}, t)$  son gradient lagrangien au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à l'instant  $t$  (figure 1.4 page 39). La transformation  $\mathcal{F}$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  est dite infinitésimale, ou infiniment petite, ou plus brièvement petite, lorsqu'en tout point  $P_0$  et à tout instant  $t$  la norme euclidienne de  $\mathbf{H}^L$  reste petite devant l'unité :

$$\forall t, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0, \quad \|\mathbf{H}^L(\vec{X}, t)\| = \sqrt{H_{iK}^L(\vec{X}, t)H_{iK}^L(\vec{X}, t)} \ll 1$$

et nous conviendrons, dans ce cas, de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en gradient  $\mathbf{H}^L$  du déplacement devant ceux du premier ordre.

Montrer alors que l'on a  $J = 1 + \text{div}_X \mathbf{u}$  puis en déduire que l'incompressibilité locale est caractérisée par  $\text{div}_X \mathbf{u} = 0$ .

### E1.8 Tassement d'un sol incompressible

On s'intéresse ici au tassement d'un massif de sol incompressible de profondeur  $h$  sous l'action d'une fondation s'enfonçant de  $\delta$ , avec  $\frac{\delta}{h} \ll 1$  (figure 1.8). On suppose que ce tassement induit, en tout point du massif de coordonnées initiales  $(X_1, X_2)$ , une composante verticale  $u_2$  du déplacement égale à  $\frac{1}{h}(X_2 + h)f(X_1)$ , où  $f$  est une fonction à déterminer.

1. En supposant connu le déplacement vertical en surface  $f(X_1)$ , donner l'expression en tout point de la composante horizontale  $u_1$  du déplacement (on supposera que cette dernière n'est fonction que de  $X_1$ ).



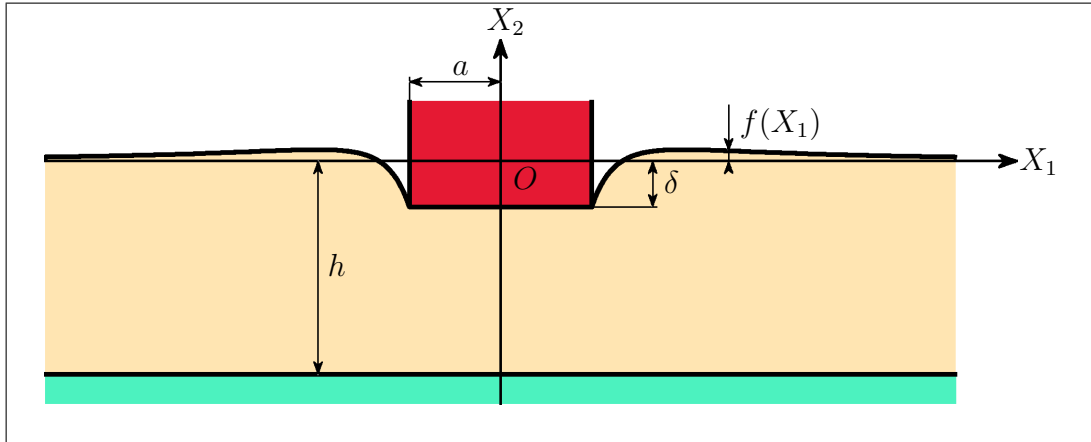


FIG. 1.8 – Tassement d'un sol incompressible

2. Montrer que l'on a  $\int_0^{\infty} f(X_1) dX_1 = 0$ .
3. On prend, pour  $X_1 \geq a$ ,  $f(X_1) = \frac{A}{X_1^2} + \frac{B}{X_1^3}$ . Déterminer alors les constantes  $A$  et  $B$ . Pour quelle valeur de  $X_1$  le tassement en surface est-il nul ?

## 1.7.2 Énoncés des problèmes

### P1.1 Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant

Dans tout ce problème on considère des écoulements plans ( $v_3 = 0$ ).

1. Montrer que l'incompressibilité d'un fluide entraîne l'existence d'une fonction  $\psi(x_1, x_2)$ , appelée fonction de courant, telle que les composantes du champ des vitesses aient pour expression  $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$  et  $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ .
2. La fonction de courant  $\psi$  étant supposée connue, en déduire l'expression des lignes de courant.
3. On admet de plus que l'écoulement du fluide est irrotationnel ( $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) et l'on désigne par  $\varphi$  le potentiel des vitesses défini par  $v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  et  $v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ . Montrer alors que  $\psi$  et  $\varphi$  sont des fonctions harmoniques et que les courbes  $\varphi = \text{cste}$  et  $\psi = \text{cste}$  forment un réseau orthogonal.
4. On s'intéresse à présent aux écoulements plans et stationnaires de la forme  $v_1 = -x_2 g(r)$ ,  $v_2 = x_1 g(r)$ , où  $g$  est une fonction quelconque de  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .
  - (a) Vérifier l'incompressibilité du fluide.
  - (b) Déterminer les lignes de courant.
  - (c) Évaluer le tourbillon des vitesses  $\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}_x \mathbf{v}$ .
  - (d) Déterminer  $g$  de façon à annuler  $\tilde{\omega}$ . Quelles sont alors les expressions du potentiel des vitesses  $\varphi$  et de la fonction de courant  $\psi$  ?

### P1.2 Étude d'un écoulement plan

Soit l'écoulement plan défini, relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , par le champ eulérien des vitesses  $\mathbf{v}(\vec{x}, t) = \alpha \vec{e}_1 + 2\beta t x_1 \vec{e}_2$  où  $t \geq 0$  désigne la variable temps et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes données et strictement positives de dimensions respectives  $LT^{-1}$  et  $T^{-2}$ .

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis donner l'expression des lignes de courant à l'instant  $t$ . Représenter quelques unes de ces dernières.
2. De la résolution du système différentiel à conditions initiales  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{v}(\vec{x}, t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\vec{x}(0) = \vec{X}$ , déduire l'équation, paramétrée en  $t$ , de la trajectoire de la particule  $P$  de coordonnées initiales  $X_1$  et  $X_2$ . Donner ensuite l'équation cartésienne de cette trajectoire puis représenter celles des particules de coordonnées initiales respectives  $X_1 = X_2 = a$  et  $-X_1 = X_2 = a$ ,  $a > 0$ .
3. Que vaut le tourbillon des vitesses  $\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{v}$  ?
4. Déterminer l'expression du champ des accélérations en variables d'Euler.
5. Calculer le débit  $Q$  du fluide à travers le plan  $x_2 = 0$ .
6. Déterminer l'équation, de paramètre  $\tau \in [0, t]$ , de la ligne d'émission de l'origine du plan  $(Ox_1, Ox_2)$  à l'instant  $t$ . En donner ensuite l'équation cartésienne puis la représenter.

### P1.3 Roulement sans glissement d'un disque indéformable

Un disque indéformable roule sans glisser sur l'axe  $Ox_1$  (figure 1.9).

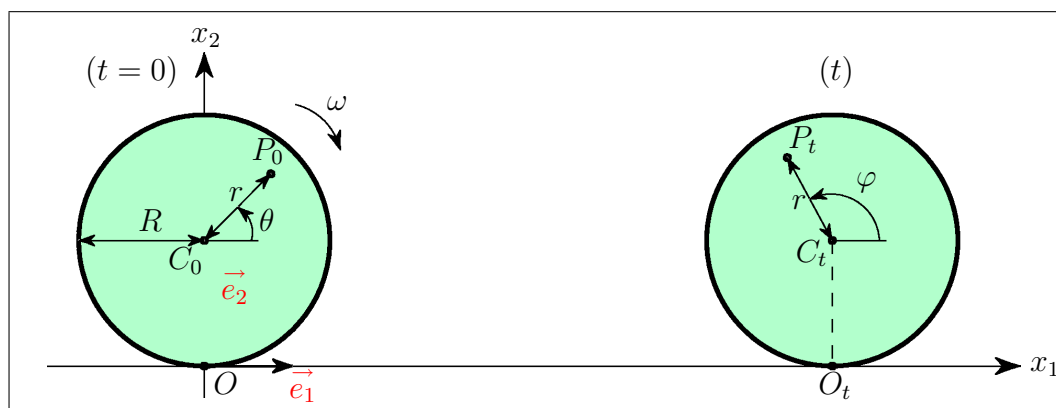


FIG. 1.9 – Roulement sans glissement d'un disque indéformable

1. Donner, à l'instant  $t$ , la position, la vitesse et l'accélération de chaque particule du disque en adoptant un point de vue lagrangien (c'est-à-dire ici en fonction des coordonnées polaires initiales  $r$  et  $\theta$ ).
2. Donner l'expression, à l'instant  $t$ , des champs des vitesses et des accélérations en fonction des variables d'Euler  $(x_1, x_2)$ .

3. Retrouver, à partir des questions précédentes, trois résultats connus de la mécanique des solides indéformables.
4. Tracer les trajectoires de quelques particules et représenter les lignes de courant à l'instant  $t$ .

### P1.4 Un modèle de houle : la houle trochoïdale

Soit un fluide incompressible dont la transformation est définie par  $\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{a}, t) = \mathcal{F}_t(\vec{a})$ , où  $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$  est une fonction vectorielle des seules variables de Lagrange  $(X_1, X_2, X_3)$  associées aux coordonnées initiales des particules fluides considérées.

1. Montrer que le jacobien  $J_1 = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \det(\mathbf{grad}_a \mathcal{F}_t)$  est indépendant du temps.
2. Un modèle de houle en profondeur infinie est donné par

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + \rho(a_2) \cos(\omega t + \varphi(a_1)) \\ x_2 &= a_2 + \rho(a_2) \sin(\omega t + \varphi(a_1)) \\ x_3 &= a_3 \end{cases}$$

où  $\omega$  est une constante et où  $\rho$  et  $\varphi$  sont deux fonctions de variables respectives  $a_2$  et  $a_1$ . Déterminer alors ces dernières sachant que l'on suppose l'eau de mer incompressible (on choisira la solution de façon telle que  $\lim_{a_2 \rightarrow +\infty} \rho(a_2) = 0$ ). Quelles sont les trajectoires des particules fluides ? Que deviennent ces trajectoires lorsque la profondeur croît (i.e. lorsque  $a_2$  augmente) ?

3. Pour le modèle de houle déterminé à la question 2 calculer, en fonction de  $(a_1, a_2, a_3)$ , les coordonnées initiales  $(X_1, X_2, X_3)$  des particules fluides.
4. La surface libre de la mer étant définie par  $a_2 = 0$ , décrire les courbes obtenues à l'instant  $t$  dans le plan  $x_3 = 0$  (profil de la houle). On évaluera en particulier la distance  $\lambda$  entre les crêtes des vagues ainsi que leur vitesse horizontale apparente  $v_a$ .
5. Montrer qu'il existe un repère en translation horizontale uniforme de vitesse  $v_0$  relativement auquel le mouvement est permanent. Quelles sont alors les lignes de courant ?

## 1.7.3 Indications et éléments de réponse

### E1.1 Potentiel des accélérations

On tirera parti de l'expression du champ des accélérations en variables d'Euler (théorème 3 page 46).

### E1.2 Théorème de Lagrange

On montrera qu'à l'instant initial et en tout point du fluide les dérivées partielles par rapport au temps du tourbillon des vitesses  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}_x \mathbf{v}$  sont nulles à tous les ordres.

### E1.3 Théorème de Lord Kelvin

On tirera parti de (1.86) et du fait que la courbe matérielle  $\mathcal{C}$  est fermée.

### E1.4 Écoulement sphérique d'un fluide incompressible

1. Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{3^*}$  quelconque mais fixé. De  $\partial_j \|\vec{x}\| = \frac{x_j}{\|\vec{x}\|}$ ,  $\forall j \in \{1, 2, 3\}$ , on tire tout d'abord

$$\partial_j v_i = \frac{q}{4\Pi} \frac{\delta_{ij} \|\vec{x}\|^2 - 3x_i x_j}{\|\vec{x}\|^5} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$$

On a alors,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^{3^*}$ ,  $\mathbf{rot}_x(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  et  $\text{div}_x(\mathbf{v}) = 0$ .

2. On trouve aisément  $Q = q$ . L'origine  $O$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  est donc une source ponctuelle de fluide si  $q > 0$  et un puits si  $q < 0$ .

### E1.5 Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique

Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues et ont pour équations, dans tout plan  $x_3 = \text{cste}$ ,  $r = \frac{k}{2|\sin\theta|} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{k^2} \sin^2\theta} \right)$ ,  $k > 0$ . Elles sont représentées sur la figure 1.10.

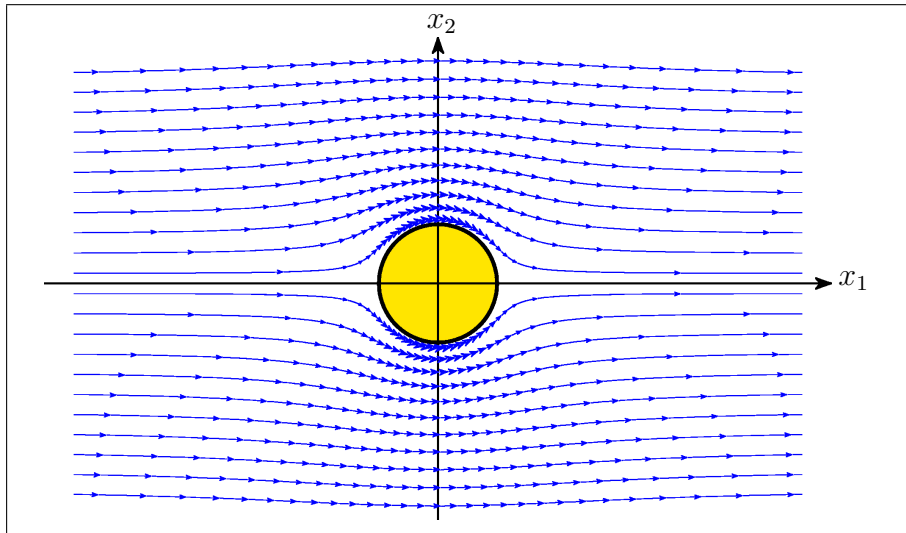


FIG. 1.10 – Écoulement autour d'un pilier cylindrique : lignes de courant et trajectoires

### E1.6 Traction-torsion d'une barre cylindrique

1. La section droite  $X_3 = \text{cste}$  subit une translation d'axe  $OX_3$  et d'amplitude  $kX_3$  combinée à une rotation de même axe et d'angle  $\frac{X_3}{\lambda}$ .
2. La transformée de la génératrice d'équation  $X_1 = R$  et  $X_2 = 0$  est l'hélice d'axe  $OX_3$ , de rayon  $R$  et de pas  $2(k+1)\lambda\Pi$ .

### E1.7 Transformations infinitésimales

Il suffit de remarquer que l'on a  $\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L$ , où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur unité du second ordre, puis de développer le déterminant de  $\mathbf{F}$  en se limitant aux termes du premier ordre en  $\mathbf{H}^L$ .

### E1.8 Tassement d'un sol incompressible

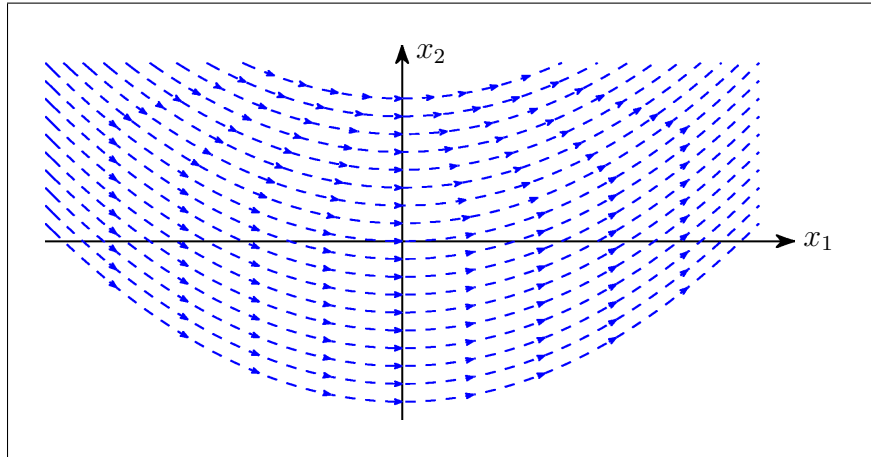
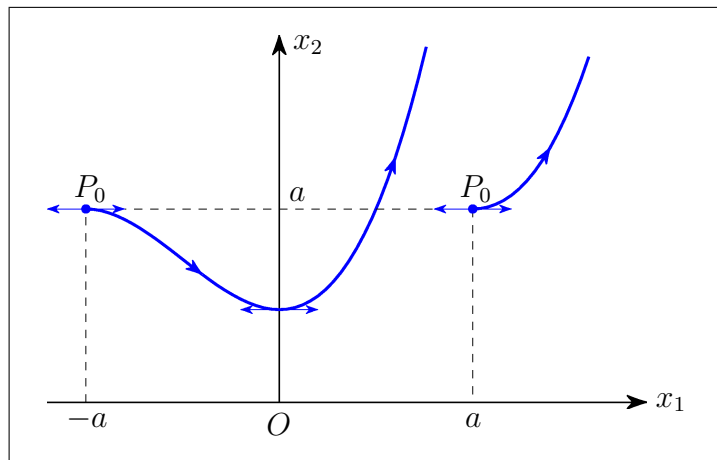
1. En tirant parti de l'incompressibilité du sol ainsi que des résultats de l'exercice E1.7 on trouve  $u_1(X_1) = \frac{-1}{h} \int_0^{X_1} f(x) dx, \forall X_1 \geq 0$ .
2. C'est, à nouveau, une conséquence de l'incompressibilité du sol.
3. On trouve  $A = 3\delta a^2$  et  $B = -4\delta a^3$ . Le tassement en surface s'annule donc pour  $X_1 = \pm \frac{4}{3}a$ .

### P1.1 Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant

1. On tirera parti de l'implication bien connue  $\operatorname{div}_x \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{rot}_x \mathbf{A}$ .
2. Ce sont les courbes  $\psi = \text{cste}$ , ce qui justifie l'appellation "fonction de courant" donnée à  $\psi$ .
3. Il suffit, après avoir vérifié que  $\Delta\psi = \Delta\varphi = 0$ , de montrer qu'en tout point du fluide les tangentes aux courbes  $\varphi = \text{cste}$  et  $\psi = \text{cste}$  sont orthogonales.
4. (c)  $\vec{w} = (g(r) + \frac{r}{2}g'(r)) \vec{e}_3$   
 (d) On trouve, en utilisant le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $g(r) = \frac{k}{r^2}$ ,  $\varphi = \varphi_0 + k\theta$  et  $\psi = \psi_0 - k \ln r$ , où  $k$ ,  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  sont des constantes.

### P1.2 Étude d'un écoulement plan

1. De  $v_1 = \alpha$ ,  $v_2 = 2\beta t x_1$  et  $v_3 = 0$  on déduit aisément  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ . La résolution du système différentiel  $\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2}$  fournit par ailleurs  $x_2 = \frac{\beta t}{\alpha} x_1^2 + x_2^0$  où  $x_2^0$  est une constante arbitraire. Les lignes de courant à l'instant  $t$  sont donc des paraboles. Elles sont représentées sur la figure 1.11.
2. De  $\frac{dx_1}{dt} = \alpha$  on tire tout d'abord  $x_1 = X_1 + \alpha t$ . De  $\frac{dx_2}{dt} = 2\beta t x_1 = 2\beta t(X_1 + \alpha t)$  on déduit ensuite  $x_2 = X_2 + \beta X_1 t^2 + \frac{2}{3}\alpha\beta t^3$ . En tirant parti de l'expression de  $x_1$  pour éliminer la variable temps de celle de  $x_2$  on obtient enfin  $x_2 = X_2 + \frac{\beta}{3\alpha^2}(2x_1 + X_1)(x_1 - X_1)^2$ ,  $x_1 \geq X_1$ . La figure 1.12 représente les trajectoires des particules de coordonnées initiales respectives  $X_1 = X_2 = a$  et  $-X_1 = X_2 = a$ ,  $a > 0$ .
3.  $\vec{w} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \beta t \vec{e}_3$ .
4. De  $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\operatorname{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$  on tire  $\boldsymbol{\gamma} = 2\beta(x_1 + \alpha t)\vec{e}_2$ .
5.  $Q = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} 2\beta t x_1 dx_1 = 0$ .

FIG. 1.11 – Lignes de courant à l'instant  $t$ FIG. 1.12 – Trajectoires des particules de coordonnées initiales  $(-a, a)$  et  $(a, a)$ 

6. Les coordonnées initiales  $X_1(\tau)$  et  $X_2(\tau)$  de la particule située à l'origine du plan  $(Ox_1, Ox_2)$  à l'instant  $\tau \in [0, t]$  étant solutions du système

$$\begin{cases} X_1(\tau) + \alpha\tau = 0 \\ X_2(\tau) + \beta X_1(\tau)\tau^2 + \frac{2}{3}\alpha\beta\tau^3 = 0 \end{cases}$$

on obtient tout d'abord

$$\begin{cases} X_1(\tau) = -\alpha\tau \\ X_2(\tau) = \frac{1}{3}\alpha\beta\tau^3 \end{cases}$$

Les coordonnées  $x_1(\tau)$  et  $x_2(\tau)$  de cette même particule à l'instant  $t$  étant données par

$$\begin{cases} x_1(\tau) = X_1(\tau) + \alpha t \\ x_2(\tau) = X_2(\tau) + \beta X_1(\tau)t^2 + \frac{2}{3}\alpha\beta t^3 \end{cases}$$

il vient ensuite

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \alpha(t - \tau) \\ x_2(\tau) = \frac{1}{3}\alpha\beta(2t + \tau)(t - \tau)^2 \end{cases}$$

En tirant parti de l'expression de  $x_1$  pour éliminer le paramètre  $\tau$  de celle de  $x_2$  on obtient enfin l'équation cartésienne de la ligne d'émission, représentée sur la figure 1.13, de l'origine du plan  $(Ox_1, Ox_2)$  à l'instant  $t$

$$x_2 = \frac{\beta}{3\alpha} \left( 3tx_1^2 - \frac{x_1^3}{\alpha} \right) \quad x_1 \in [0, \alpha t]$$

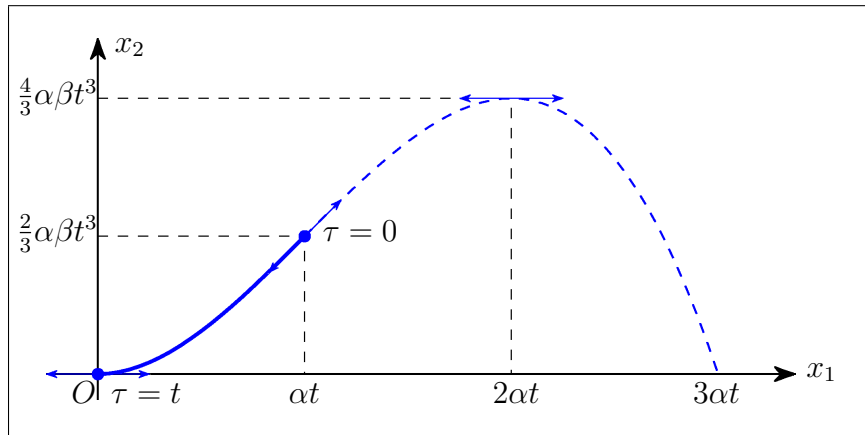


FIG. 1.13 – Ligne d'émission de l'origine du plan  $(Ox_1, Ox_2)$  à l'instant  $t$

### P1.3 Roulement sans glissement d'un disque indéformable

1. Soit  $P$  une particule quelconque mais fixée du disque, de coordonnées polaires initiales  $r$  et  $\theta$ . On a alors, à l'instant  $t$ ,

$$\begin{cases} x_1(P, t) = R\omega t + r \cos(\theta - \omega t) \\ x_2(P, t) = R + r \sin(\theta - \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P, t) = R\omega + r\omega \sin(\theta - \omega t) \\ v_2(P, t) = -r\omega \cos(\theta - \omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1(P, t) = -\omega^2 r \cos(\theta - \omega t) \\ \gamma_2(P, t) = -\omega^2 r \sin(\theta - \omega t) \end{cases}$$

2. On trouve

$$\begin{cases} v_1 = \omega x_2 \\ v_2 = -\omega(x_1 - R\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = -\omega^2(x_1 - R\omega t) \\ \gamma_2 = -\omega^2(x_2 - R) \end{cases}$$

3. – En tout point du disque de coordonnées initiales  $r$  et  $\theta$  et à tout instant  $t$  le vecteur accélération  $\vec{\gamma}$  est dirigé vers le centre  $C_t$  de ce disque et a pour module  $\omega^2 r$ .

- Le point  $O_t$  du disque en contact avec l'axe  $Ox_1$  à l'instant  $t$ , de coordonnées  $x_1 = R\omega t$  et  $x_2 = 0$ , a une vitesse nulle (centre de rotation instantané).
  - Le centre  $C_t$  du disque, de coordonnées  $x_1 = R\omega t$  et  $x_2 = R$  à l'instant  $t$ , a une vitesse  $\vec{v} = R\omega\vec{e}_1$  et une accélération nulle (mouvement rectiligne uniforme).
4. La figure 1.14 représente les trajectoires des particules de coordonnées initiales  $(r, \theta) \in \{0, \frac{R}{4}, \frac{R}{2}, \frac{3R}{4}, R\} \times \{\frac{\Pi}{2}\}$ . Les lignes de courant à l'instant  $t$  sont quant à elles les arcs de cercle d'équations cartésiennes  $(x_1 - R\omega t)^2 + x_2^2 = \alpha^2$ ,  $x_2 \geq \frac{\alpha^2}{2R}$ , avec  $\alpha \in [0, 2R]$ . Elles sont illustrées par la figure 1.15.

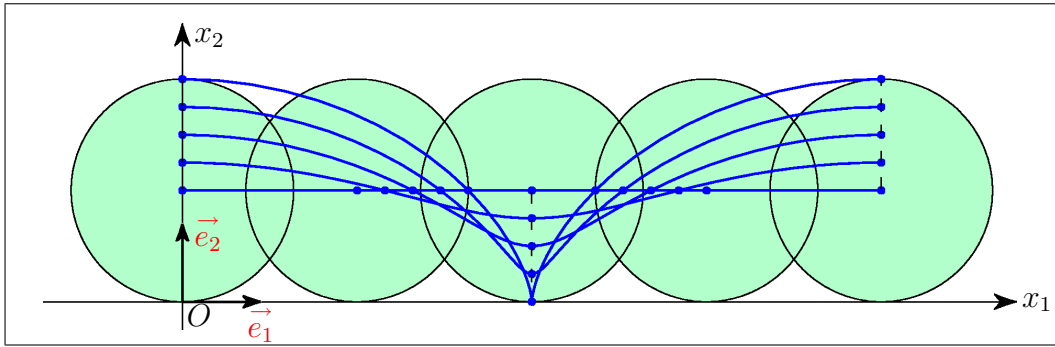


FIG. 1.14 – Roulement d'un disque indéformable : trajectoires

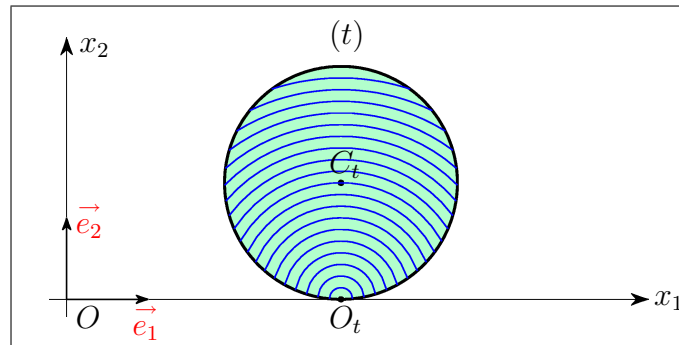


FIG. 1.15 – Roulement d'un disque indéformable : lignes de courant

### P1.4 Un modèle de houle : la houle trochoïdale

1. Il suffit, pour conclure, de remarquer que  $J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = 1$  (incompressibilité) et que  $J = J_1 J_0$  avec  $J_0 = \frac{D(a_1, a_2, a_3)}{D(X_1, X_2, X_3)}$  indépendant de  $t$ .
2. On trouve, en tirant parti du fait que  $J_1$  est indépendant du temps,  $\varphi(a_1) = -\varphi_0 a_1$  et  $\rho(a_2) = \rho_0 \exp(-\varphi_0 a_2)$ , où  $\varphi_0$  et  $\rho_0$  sont deux constantes strictement positives. Les trajectoires des particules fluides sont les cercles des plans  $x_3 = a_3 = \text{cste}$  ayant pour centres les points de coordonnées  $(a_1, a_2)$  et pour rayons  $\rho_0 \exp(-\varphi_0 a_2)$ . Ces derniers décroissent en tendent vers 0 lorsque  $a_2$  augmente.





3. Il suffit de faire  $t = 0$  dans le modèle de houle déterminé à la question 2.
4. Le profil de la houle à l'instant  $t$  est identique à la trajectoire du point d'un disque de rayon  $R = \frac{1}{\varphi_0}$  roulant sans glisser sur la droite d'équation  $x_2 = -\frac{1}{\varphi_0}$  avec une vitesse angulaire constante (voir le problème P1.3). Ce point est situé à une distance  $r = \rho_0$  du centre du disque. Le profil de la houle ne pouvant présenter de points doubles ou de points de rebroussement, on a nécessairement  $\rho_0 < \frac{1}{\varphi_0}$ . On trouve par ailleurs  $\lambda = \frac{2\Pi}{\varphi_0}$  et  $v_a = \frac{\omega}{\varphi_0}$ .
5. Pour que le mouvement soit permanent relativement à un repère en translation horizontale uniforme de vitesse  $v_0$ , il suffit que l'on ait  $\omega(t + \Delta t) - \varphi_0(a_1 + v_0\Delta t) = \omega t - \varphi_0 a_1$ , c'est-à-dire  $v_0 = v_a = \frac{\omega}{\varphi_0}$ .



# Chapitre 2

## Déformations

### 2.1 Considérations intuitives

 [tab21.html](#)  [exp21.html](#) Effectuons, sur un échantillon cubique constitué d'un matériau déformable homogène et isotrope (i.e. dont les propriétés physiques sont identiques en tout point et dans toutes les directions), un essai de compression simple tel que celui décrit par la figure 2.1.

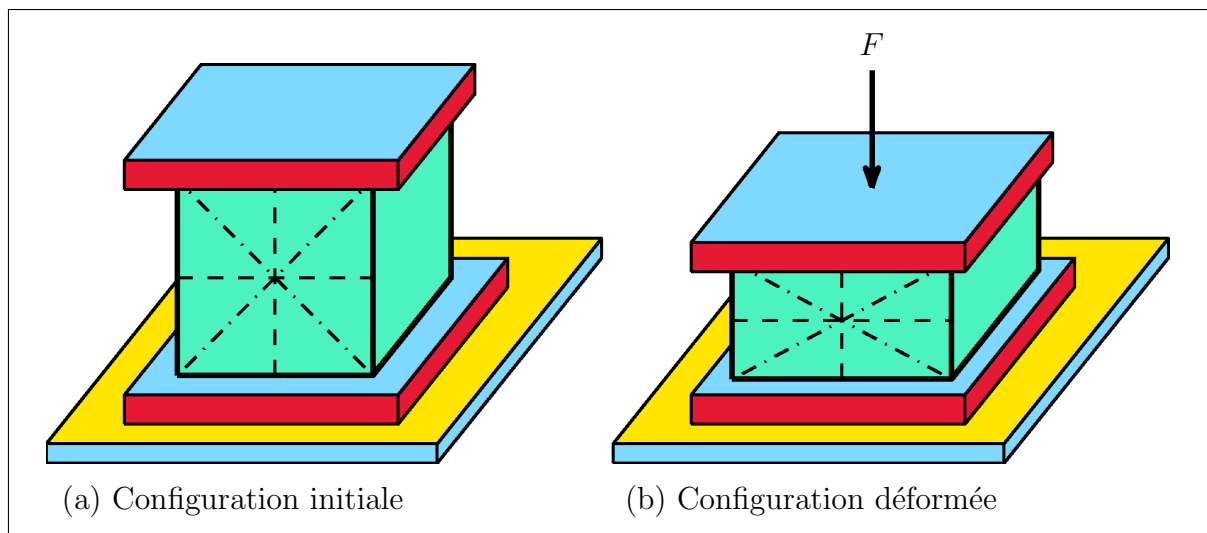



FIG. 2.1 – Compression simple homogène d'un échantillon cubique

Les conditions de l'expérience étant supposées idéales (embases de la presse non déformables, absence totale de frottement entre ces dernières et l'échantillon, répartition surfacique uniforme de la force  $F$  en tête de celui-ci), la transformation du milieu déformable est alors linéaire (voir la fin de la remarque 5 de la section 1.2.3, chapitre 1 page 36) et appelle les observations suivantes (figure 2.1) :

- Les médianes des faces latérales de l'échantillon ont subi des variations de longueur : les médianes verticales ont vu leur longueur diminuer tandis que les médianes horizontales se sont allongées. Les diagonales de ces mêmes faces ont quant à elles raccourci.
- L'angle droit initial que font entre elles les médianes des faces latérales de l'échantillon s'est conservé au cours de la transformation, tandis que celui que font entre elles les diagonales de ces mêmes faces a varié.
- L'aire des faces latérales de l'échantillon a diminué, et il en est de même de son volume.

Ces quelques remarques, issues de l'observation d'une expérimentation particulière sur un échantillon d'un matériau déformable donné (s'agissant d'un autre matériau les conclusions pourraient être différentes), nous permettent toutefois de mieux cerner l'idée intuitive que l'on a des "déformations" d'un milieu continu, en mettant en évidence les différents phénomènes physiques à l'origine de cette notion : variations de la longueur initiale d'une courbe matérielle, de l'angle initial entre deux directions matérielles, mais aussi variations de l'aire initiale ou du volume initial d'une surface matérielle ou d'un volume matériel. Ce sont les différents aspects de cette notion que nous nous proposons de quantifier dans la section 2.2.


## 2.2 Tenseurs des déformations

 `tab22.html` Soit  $\mathcal{M}$  un milieu continu dont les configurations successives sont observées relativement au même repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , supposé fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'observateur  $\mathcal{O}$ . Comme dans le chapitre 1, nous conviendrons, dans tout ce qui suit, de désigner par  $\mathcal{F}$  la transformation du milieu déformable  $\mathcal{M}$ , par  $\mathcal{F}_t$  sa transformation relative à l'instant courant  $t$ , et par  $P$  une particule quelconque mais fixée de  $\mathcal{M}$ , repérée par le vecteur  $\vec{X} = \overrightarrow{OP_0} = X_K \vec{e}_K$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$  et par le vecteur  $\vec{x} = \overrightarrow{OP_t} = x_i \vec{e}_i$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  (figure 2.2). Omettant le plus souvent les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité, nous désignerons également par  $\mathbf{F}$  la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathcal{F}_t$  au point  $P_0$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  et à l'instant  $t$ , et par  $J$  son déterminant  $J(\vec{X}, t)$ , jacobien de la transformation  $\mathcal{F}_t$  en ce point.

Comme nous l'allons voir, la quantification des différents aspects que recouvre la notion de **déformation**, liés aux **variations relatives de mesure** (de longueur, d'aire, de volume) de domaines matériels (vecteurs, surfaces, volumes), se fonde sur l'étude de la transformation de **domaines matériels élémentaires** (définition 4 de la section 1.2.4, chapitre 1 page 36) et non sur celle de domaines matériels finis. Cette approche locale, cohérente avec la notion de particule (définition 1 de la section 1.1.1, chapitre 1 page 27), privilégie la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$ , dont nous verrons qu'elle permet à elle seule de quantifier les différents aspects évoqués ci-dessus. Nous verrons par ailleurs, dans le chapitre 4, que cette approche

suffit en général à l'expression des relations existant entre les déformations du milieu continu  $\mathcal{M}$  et les efforts intérieurs, ou contraintes (chapitre 3), qui en résultent. Enfin, notons qu'il est toujours possible d'accéder à la variation de mesure d'un domaine matériel fini par intégration des valeurs locales de celle-ci sur ce domaine.

### 2.2.1 Tenseurs de Cauchy à droite et de Green-Lagrange

 [tab23.html](#) Soient deux vecteurs matériels élémentaires représentés, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , par les vecteurs élémentaires  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$ . Il leur correspond alors, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , les deux vecteurs élémentaires  $\vec{dx}^1$  et  $\vec{dx}^2$  définis par  $\vec{dx}^\alpha = \mathbf{F} \cdot \vec{dX}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (figure 2.2).

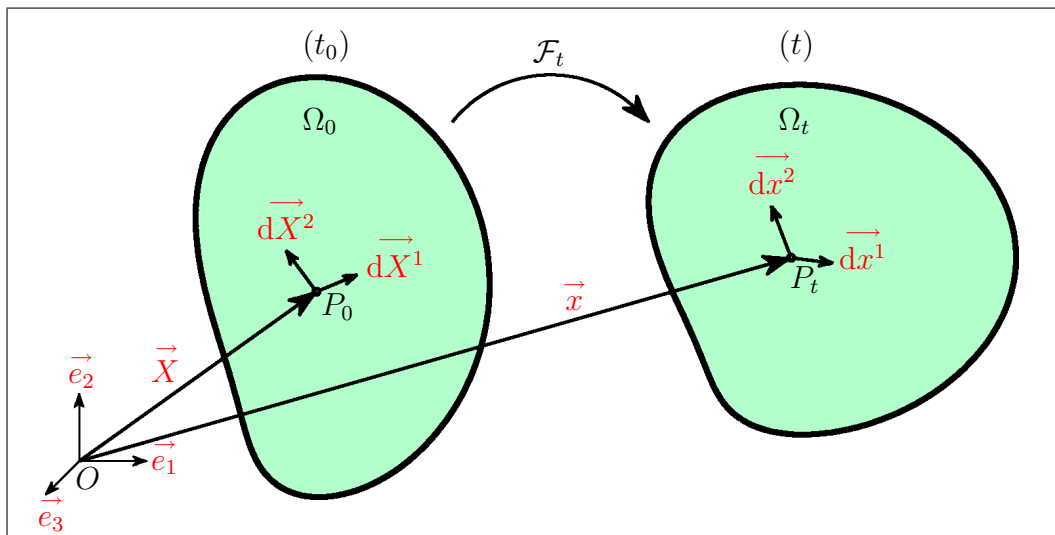


FIG. 2.2 – Variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires

Cherchant à quantifier les variations de longueur de ces vecteurs élémentaires ainsi que les variations d'angle entre leurs directions, nous nous intéresserons tout naturellement à celles de leur produit scalaire. Nous choisirons pour cela d'adopter, dans toute cette section, un point de vue lagrangien, renvoyant à la section 2.2.2 les considérations issues d'une description eulérienne.

#### 2.2.1.1 Tenseur de Cauchy à droite

 [tab24.html](#) Évaluons donc tout d'abord, en fonction de  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$ , le produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2$ . Nous avons, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe

$$R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

$$\begin{aligned} \vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 &= dx_i^1 dx_i^2 \\ &= F_{iK} dX_K^1 F_{iL} dX_L^2 \\ &= F_{iK} F_{iL} dX_K^1 dX_L^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Introduisons alors le tenseur du second ordre  $\mathbf{C}(\vec{X}, t)$  défini par

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) = {}^t\mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad (2.2)$$

ou plus simplement par

$$\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \quad (2.3)$$

de composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par

$$C_{KL} = F_{iK} F_{iL} \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.4)$$


L'expression (2.1) du produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2$  devient


$$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = C_{KL} dX_K^1 dX_L^2 \quad (2.5)$$

et l'on a donc la relation intrinsèque

$$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = \vec{dX}^1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{dX}^2 \quad (2.6)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  est appelé **tenseur de Cauchy à droite**, et l'énoncé de ses propriétés constitue le

**Théorème 5**  [theo5p.html](#) *Le tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$  est un tenseur du second ordre lagrangien et symétrique défini positif (SDP).*

**Preuve**  [demth5p.html](#) La forme bilinéaire  $(\vec{dX}^1, \vec{dX}^2) \mapsto \vec{dX}^1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{dX}^2$  opérant sur la configuration de référence  $\Omega_0$ ,  $\mathbf{C}$  est bien un tenseur du second ordre lagrangien. On remarquera d'ailleurs les deux indices majuscules dans l'expression (2.4) de ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Ce tenseur est en outre symétrique par construction, comme le montre (2.3). Identifions alors  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$ . On a donc  $\vec{dx}^1 = \vec{dx}^2$  et la relation intrinsèque (2.6) donne, après avoir posé  $\vec{dX} = \vec{dX}^1 = \vec{dX}^2$  et  $\vec{dx} = \vec{dx}^1 = \vec{dx}^2$ ,


$$\vec{dX} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{dX} = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = \|\vec{dx}\|^2 \geq 0 \quad (2.7)$$


ce qui établit la positivité de  $\mathbf{C}$ . De (2.7) et de l'inversibilité de  $\mathbf{F}$  (théorème 1 page 34), il découle enfin que  $\vec{dX} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{dX} = 0 \Rightarrow \vec{dx} = \vec{0} \Rightarrow \vec{dX} = \vec{0}$ . Conséquemment,  $\mathbf{C}$  est bien défini positif.  $\square$

**Corollaire 1** *L'inverse  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1}$  de  $\mathbf{C}$  est également un tenseur du second ordre lagrangien et symétrique défini positif. Ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont données par*

$$C_{KL}^{-1} = F_{Ki}^{-1} F_{Li}^{-1} \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.8)$$

**Remarque** On a, de façon plus générale, le


**Lemme 1**  *lem1p.html* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbf{T}$  un tenseur du second ordre sur l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}^n$  orthonormé, et soit  $\mathbf{P}$  le tenseur de même ordre défini par  $\mathbf{P} = {}^t\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ . Alors  $\mathbf{P}$  est symétrique et positif. Si  $\mathbf{T}$  est inversible (i.e. s'il existe un tenseur  $\mathbf{T}'$  d'ordre deux tel que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = \boldsymbol{\delta}$ , où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur unité du second ordre de composantes  $\delta_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ),  $\mathbf{P}$  est de plus défini positif.

**Preuve**  *demlem1p.html* Le tenseur  $\mathbf{P}$  est symétrique par construction. On a par ailleurs

$$\vec{x} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{x} = (\mathbf{T} \cdot \vec{x}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{x}) = \|\mathbf{T} \cdot \vec{x}\|^2 \geq 0 \quad (2.9)$$

ce qui établit sa positivité. Si  $\mathbf{T}$  est de plus inversible,  $\vec{x} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$  et  $\mathbf{P}$  est bien défini positif.  $\square$

### 2.2.1.2 Tenseur de Green-Lagrange

 *tab25.html* Intéressons-nous à présent à la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$ . Si  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur unité du second ordre sur  $\mathbb{R}^3$  orthonormé, de composantes  $\delta_{KL}$ ,  $(K, L) \in \{1, 2, 3\}^2$ , on a, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (2.5),

$$\begin{aligned} \vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 &= C_{KL} dX_K^1 dX_L^2 - dX_K^1 dX_K^2 \\ &= (C_{KL} - \delta_{KL}) dX_K^1 dX_L^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Soit alors  $\mathbf{L}$  le tenseur du second ordre défini par

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}) \quad (2.11)$$

et ayant pour composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$L_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}) \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.12)$$

L'égalité (2.10) s'écrit

$$\overrightarrow{dx^1} \cdot \overrightarrow{dx^2} - \overrightarrow{dX^1} \cdot \overrightarrow{dX^2} = 2L_{KL} dX_K^1 dX_L^2 \quad (2.13)$$


et l'on obtient ainsi la relation intrinsèque

$$\overrightarrow{dx^1} \cdot \overrightarrow{dx^2} - \overrightarrow{dX^1} \cdot \overrightarrow{dX^2} = \overrightarrow{dX^1} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \overrightarrow{dX^2} \quad (2.14)$$

 **tab26.html** Le tenseur  $\mathbf{L}$  est le **tenseur de déformation de Green-Lagrange**.

Comme  $\mathbf{C}$ , il est symétrique et lagrangien (on remarquera les deux indices majuscules dans l'expression (2.12) de ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ).

### 2.2.1.3 Décomposition en fonction du champ des déplacements

 **tab27.html** Pour conclure cette section, considérons le champ  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$ , et plus précisément son gradient  $\mathbf{H}^L(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{u}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à cet instant, de composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  données par

$$H_{iK}^L = \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.15)$$

De  $\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \mathbf{u}(\vec{X}, t)$  ainsi que de l'expression (1.13) des composantes de  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ , on tire

$$\begin{aligned} F_{iK} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \\ &= \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_K} \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial X_K} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \\ &= \delta_{iK} + H_{iK}^L \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L \quad (2.17)$$

Considérant à présent les expressions (2.4) et (2.12) des composantes de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{L}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} C_{KL} &= F_{iK} F_{iL} \\ &= (\delta_{iK} + H_{iK}^L)(\delta_{iL} + H_{iL}^L) \\ &= \delta_{KL} + H_{KL}^L + H_{LK}^L + H_{iK}^L H_{iL}^L \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

ainsi que

$$L_{KL} = \frac{1}{2}(H_{KL}^L + H_{LK}^L + H_{iK}^L H_{iL}^L) \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.19)$$




Autrement dit, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{KL} = \delta_{KL} + \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_L}{\partial X_K} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \frac{\partial u_i}{\partial X_L} \\ L_{KL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_L}{\partial X_K} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \frac{\partial u_i}{\partial X_L} \right) \end{array} \right. \quad \forall (K,L) \in \{1,2,3\}^2 \quad (2.20)$$


c'est-à-dire les relations intrinsèques

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L \\ \mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

## 2.2.2 Tenseurs de Cauchy à gauche et d'Almansi-Euler

 [pap222.html](#) Adoptant à présent un point de vue eulérien, nous cherchons ici encore, comme dans la section précédente 2.2.1, à quantifier la variation de produit scalaire  $\overrightarrow{dx^1} \cdot \overrightarrow{dx^2} - \overrightarrow{dX^1} \cdot \overrightarrow{dX^2}$  (figure 2.2 page 75).

### 2.2.2.1 Tenseur de Cauchy à gauche

 [pap2221.html](#) Intéressons-nous tout d'abord à l'expression du produit scalaire  $\overrightarrow{dX^1} \cdot \overrightarrow{dX^2}$  en fonction de  $\overrightarrow{dx^1}$  et  $\overrightarrow{dx^2}$ . De  $\overrightarrow{dX^\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \overrightarrow{dx^\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1,2\}$ , on tire, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dX^1} \cdot \overrightarrow{dX^2} &= dX_K^1 dX_K^2 \\ &= F_{Ki}^{-1} dx_i^1 F_{Kj}^{-1} dx_j^2 \\ &= F_{Ki}^{-1} F_{Kj}^{-1} dx_i^1 dx_j^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Soit alors  $\mathbf{B}$  le tenseur du second ordre défini par

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F} \quad (2.23)$$

de composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  données par

$$B_{ij} = F_{iK} F_{jK} \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \quad (2.24)$$

Comme produit contracté de tenseurs inversibles,  $\mathbf{B}$  est lui-même inversible, son inverse  $\mathbf{B}^{-1} = {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  ayant pour composantes relativement à ce même repère

$$B_{ij}^{-1} = F_{Ki}^{-1} F_{Kj}^{-1} \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \quad (2.25)$$

Reconsidérant l'expression (2.22) du produit scalaire  $\vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$ , nous avons

$$\vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 = B_{ij}^{-1} dx_i^1 dx_j^2 \quad (2.26)$$

et l'on obtient ainsi la relation intrinsèque

$$\vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 = \vec{dx}^1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{dx}^2 \quad (2.27)$$


Le tenseur  $\mathbf{B}$  est le **tenseur de Cauchy à gauche**, et ses propriétés sont données par le

**Théorème 6** *Le tenseur de Cauchy à gauche  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}$  est un tenseur du second ordre eulérien et symétrique défini positif.*

**Preuve** La démonstration est semblable à celle du théorème 5. La forme bilinéaire  $(\vec{dx}^1, \vec{dx}^2) \mapsto \vec{dx}^1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{dx}^2$  opérant sur la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  est bien un tenseur du second ordre eulérien et il en est alors de même pour  $\mathbf{B}$  (on remarquera d'ailleurs les deux indices minuscules dans les expressions (2.24) et (2.25) des composantes de ces tenseurs relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ). Il suffit ensuite, après avoir posé  $\mathbf{T} = {}^t\mathbf{F}$ , d'appliquer le lemme 1.  $\square$

**Corollaire 2** *L'inverse  $\mathbf{B}^{-1} = {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  de  $\mathbf{B}$  est lui-même un tenseur du second ordre eulérien et symétrique défini positif.*

### 2.2.2.2 Tenseur d'Almansi-Euler

 [pap2222.html](#) Reconsidérons à présent la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$ . Il vient, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (2.26),

$$\begin{aligned} \vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 &= dx_i^1 dx_i^2 - B_{ij}^{-1} dx_i^1 dx_j^2 \\ &= (\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}) dx_i^1 dx_j^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduisons alors le tenseur du second ordre  $\mathbf{E}$  défini par

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.29)$$

et ayant pour composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.30)$$

L'égalité (2.28) devient


$$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 = 2E_{ij} dx_i^1 dx_j^2 \quad (2.31)$$

et nous obtenons donc la relation intrinsèque

$$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 = \vec{dx}^1 \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{dx}^2 \quad (2.32)$$

Le tenseur  $\mathbf{E}$  est le **tenseur de déformation d'Almansi-Euler**. Il est, comme  $\mathbf{B}^{-1}$ , symétrique et eulérien (on peut remarquer les deux indices minuscules dans l'expression (2.30) de ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ).

### 2.2.2.3 Décomposition en fonction du champ des déplacements

 [pap2223.html](#) De l'expression (2.24) des composantes de  $\mathbf{B}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  jointe à celle (2.17) de  $\mathbf{F}$  en fonction du gradient  $\mathbf{H}^L$  du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  par rapport aux variables de Lagrange  $(X_1, X_2, X_3)$ , on tire

$$\begin{aligned} B_{ij} &= F_{iK} F_{jK} \\ &= (\delta_{iK} + H_{iK}^L)(\delta_{jK} + H_{jK}^L) \\ &= \delta_{ij} + H_{ij}^L + H_{ji}^L + H_{iK}^L H_{jK}^L \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Autrement dit, on a

$$B_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \frac{\partial u_j}{\partial X_K} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.34)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + \mathbf{H}^L \cdot {}^t\mathbf{H}^L \quad (2.35)$$

Il n'est par contre plus possible d'exprimer simplement les tenseurs  $\mathbf{B}^{-1}$  ou  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\mathbf{H}^L$  puisque ces derniers sont bâtis sur  $\mathbf{F}^{-1}$  et non sur  $\mathbf{F}$ . Il en est d'ailleurs de même pour l'inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  du tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$ . Considérant en effet l'expression (1.17) des composantes de  $\mathbf{F}^{-1}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on a, puisque  $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ ,

$$\begin{aligned} F_{Ki}^{-1} &= \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial(x_K - u_K)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial x_K}{\partial x_i} - \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \quad \forall (K, i) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

et l'on est donc amené à introduire le gradient  $\mathbf{H}^E(\vec{x}, t) = \mathbf{grad}_x \mathbf{u}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t)$  de  $\mathbf{u}$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  (figure 2.2 page 75), c'est-à-dire le gradient du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  par rapport aux variables d'Euler  $(x_1, x_2, x_3)$ , de composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par

$$H_{Ki}^E = \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \quad \forall (K, i) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.37)$$

On a alors

$$F_{Ki}^{-1} = \delta_{Ki} - H_{Ki}^E \quad \forall (K, i) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.38)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E \quad (2.39)$$

Tirant à présent parti des expressions (2.25) et (2.30) des composantes de  $\mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{E}$  relativement à ce même repère, nous obtenons

$$\begin{aligned} B_{ij}^{-1} &= F_{Ki}^{-1} F_{Kj}^{-1} \\ &= (\delta_{Ki} - H_{Ki}^E)(\delta_{Kj} - H_{Kj}^E) \\ &= \delta_{ij} - H_{ij}^E - H_{ji}^E + H_{Ki}^E H_{Kj}^E \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

ainsi que

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(H_{ij}^E + H_{ji}^E - H_{Ki}^E H_{Kj}^E) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.41)$$

En résumé, on a

$$\begin{cases} B_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \frac{\partial u_K}{\partial x_j} \\ E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \frac{\partial u_K}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.42)$$

c'est-à-dire les relations intrinsèques

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E + {}^t\mathbf{H}^E \cdot \mathbf{H}^E \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^E + {}^t\mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E \cdot \mathbf{H}^E) \end{cases} \quad (2.43)$$

Considérant enfin l'expression (2.8) des composantes de l'inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  du tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous avons

$$\begin{aligned} C_{KL}^{-1} &= F_{Ki}^{-1} F_{Li}^{-1} \\ &= (\delta_{Ki} - H_{Ki}^E)(\delta_{Li} - H_{Li}^E) \\ &= \delta_{KL} - H_{KL}^E - H_{LK}^E + H_{Ki}^E H_{Li}^E \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

ou encore


$$C_{KL}^{-1} = \delta_{KL} - \frac{\partial u_K}{\partial x_L} - \frac{\partial u_L}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \frac{\partial u_L}{\partial x_i} \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.45)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{C}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E + \mathbf{H}^E \cdot {}^t\mathbf{H}^E \quad (2.46)$$

**Remarque** Le lecteur aura observé comment le caractère lagrangien ou eulérien des différents tenseurs introduits dans ce chapitre est notamment illustré par le profond changement de nature de certains indices apparaissant dans l'expression de leurs composantes en fonction du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  : apparition d'indices minuscules associés aux variables de Lagrange  $(X_1, X_2, X_3)$  dans l'expression (2.34) des composantes de  $\mathbf{B}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , apparition d'indices majuscules associés aux variables d'Euler  $(x_1, x_2, x_3)$  dans l'expression (2.45) de celles de  $\mathbf{C}^{-1}$ .


### 2.2.3 Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente


 [theo7t.html](#) On se propose ici d'établir le


**Théorème 7 (Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente)** 

*[theo7p.html](#) Soit  $P$  une particule du milieu continu  $\mathcal{M}$ , repérée par le vecteur  $\vec{X}$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ , et soit  $t$  l'instant actuel, quelconques mais fixés. Alors la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$  admet une unique double décomposition de la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ , où  $\mathbf{R}$  est un tenseur du second ordre orthogonal de déterminant égal à  $+1$ , ou tenseur de rotation, et  $\mathbf{U}$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{V}$ ) un tenseur lagrangien (resp<sup>t</sup> eulérien) de même ordre et symétrique défini positif, appelé tenseur de déformation pure avant rotation (resp<sup>t</sup> après rotation), ou tenseur de déformation pure à droite (resp<sup>t</sup> à gauche).*

#### Preuve

1. *Existence et unicité d'une décomposition de la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ , avec  $\mathbf{R}$  orthogonal de déterminant égal à  $+1$ , et  $\mathbf{U}$  lagrangien et SDP (symétrique défini positif)  [demth7p1.html](#)*

 [demth7p2.html](#) Démontrons tout d'abord l'unicité. Soient  $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{U}_2$  deux décompositions de  $\mathbf{F}$ , avec  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  SDP, et  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  orthogonaux de déterminants égaux à  $+1$ . De  $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$ , de l'orthogonalité de  $\mathbf{R}_1$  et de  $\mathbf{R}_2$  ainsi que de la symétrie de  $\mathbf{U}_1$  et de  $\mathbf{U}_2$ , on tire  $\mathbf{C} = \mathbf{U}_1^2 = \mathbf{U}_2^2$ . Les tenseurs  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  étant définis positifs, on a alors  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$ , et donc  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ .

 [demth7p3.html](#) Établissons à présent l'existence. Soit  $R^{\mathbf{C}} = (P_0, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$  un repère orthonormé direct associé aux directions principales de  $\mathbf{C}$  (un tel repère existe toujours puisque  $\mathbf{C}$  est symétrique), et soit  $\mathbf{Q}$  la matrice de passage (orthogonale et de déterminant égal à +1) de  $R^{\mathbf{C}}$  au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soient par ailleurs  $C_1, C_2$  et  $C_3$  les valeurs propres de  $\mathbf{C}$  respectivement associées aux directions propres  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$ , et soit  $\mathbf{C}_R$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{C}_{R^{\mathbf{C}}}$ ) la matrice représentative de ce tenseur relativement au repère  $R$  (resp<sup>t</sup>  $R^{\mathbf{C}}$ ). On a alors

$$\mathbf{C}_R = {}^t\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_{R^{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{Q} \quad (2.47)$$

avec

$$\mathbf{C}_{R^{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Le tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$  étant défini positif (c'est le théorème 5 page 76), ses valeurs propres  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont strictement positives. Soit alors  $\mathbf{U}$  le tenseur du second ordre de matrice représentative  $\mathbf{U}_{R^{\mathbf{C}}}$  relativement au repère  $R^{\mathbf{C}}$  définie par

$$\mathbf{U}_{R^{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$


avec



$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{C_1} \\ U_2 = \sqrt{C_2} \\ U_3 = \sqrt{C_3} \end{cases} \quad (2.50)$$

La matrice représentative  $\mathbf{U}_R$  de ce même tenseur relativement au repère  $R$  est donc  $\mathbf{U}_R = {}^t\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}_{R^{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{Q}$  et  $\mathbf{U}$  est bien SDP. On a évidemment, par construction,  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$  est donc, comme  $\mathbf{C}$ , lagrangien. Considérant alors le tenseur du second ordre  $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ , on a  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$  et il vient

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} &= {}^t\mathbf{U}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (2.51)$$

ce qui établit l'orthogonalité de  $\mathbf{R}$ . Enfin, de  $J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{R} \det \mathbf{U}$  et de  $\det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}} = \sqrt{\det {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \sqrt{J^2}$ , on tire, puisque  $J > 0$  (c'est le théorème 2 page 38),  $\det \mathbf{R} = +1$ .


2. Existence et unicité d'une décomposition de la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}'$ , avec  $\mathbf{R}'$  orthogonal de déterminant égal à +1, et  $\mathbf{V}$  eulérien et SDP  [demth7p4.html](#)

 demth7p5.html  demth7p6.html La démonstration, semblable à celle de la décomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U}$  et s'appuyant cette fois sur les propriétés du tenseur (eulérien) de Cauchy à gauche  $\mathbf{B} = \mathbf{F}.\mathbf{F}^t$ , est laissée à titre d'exercice : il suffit de reprendre ce qui précède en substituant  ${}^t\mathbf{F}$  à  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}$  à  $\mathbf{U}$  et  ${}^t\mathbf{R}'$  à  $\mathbf{R}$ .

3. Identité de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$   demth7p7.html

De  $\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U} = (\mathbf{R}.\mathbf{U}.\mathbf{R}).\mathbf{R}$  et de l'unicité de la décomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{V}.\mathbf{R}'$  avec  $\mathbf{R}'$  orthogonal de déterminant égal à +1 et  $\mathbf{V}$  SDP, on tire  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$  ainsi que

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}.\mathbf{U}.\mathbf{R} \iff \mathbf{U} = \mathbf{R}.\mathbf{V}.\mathbf{R} \quad (2.52)$$

**Corollaire 3**  cor03t.html Les tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  et  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{E}$ ) ont les mêmes valeurs propres. Les directions principales  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$  de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{E}$  sont les transformées par la rotation  $\mathbf{R}$  des directions principales  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$  de  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  et  $\mathbf{L}$ .

Soit en effet  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  quelconque mais fixé. De  $\mathbf{V}.\mathbf{R} = \mathbf{R}.\mathbf{U}$ , on tire

$$\begin{aligned} \mathbf{V}.\mathbf{R}.\vec{I}_\alpha &= (\mathbf{V}.\mathbf{R}).\vec{I}_\alpha \\ &= (\mathbf{R}.\mathbf{U}).\vec{I}_\alpha \\ &= \mathbf{R}.\mathbf{U}.\vec{I}_\alpha \\ &= \mathbf{R}.\mathbf{U}_\alpha.\vec{I}_\alpha \\ &= \mathbf{R}.\vec{i}_\alpha \end{aligned} \quad (2.53)$$

(sans sommation sur  $\alpha$ )

Les tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  ont donc les mêmes valeurs propres, les directions principales  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$  de  $\mathbf{V}$  étant liées à celles  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$  de  $\mathbf{U}$  par les relations

$$\vec{i}_\alpha = \mathbf{R}.\vec{I}_\alpha \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (2.54)$$

Les directions  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$  sont les **directions principales de déformation au point**  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ , tandis que  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$  sont appelées **directions principales de déformation au point**  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant.

La figure 2.3 illustre, dans le cas de problèmes plans, les considérations développées dans cette section.

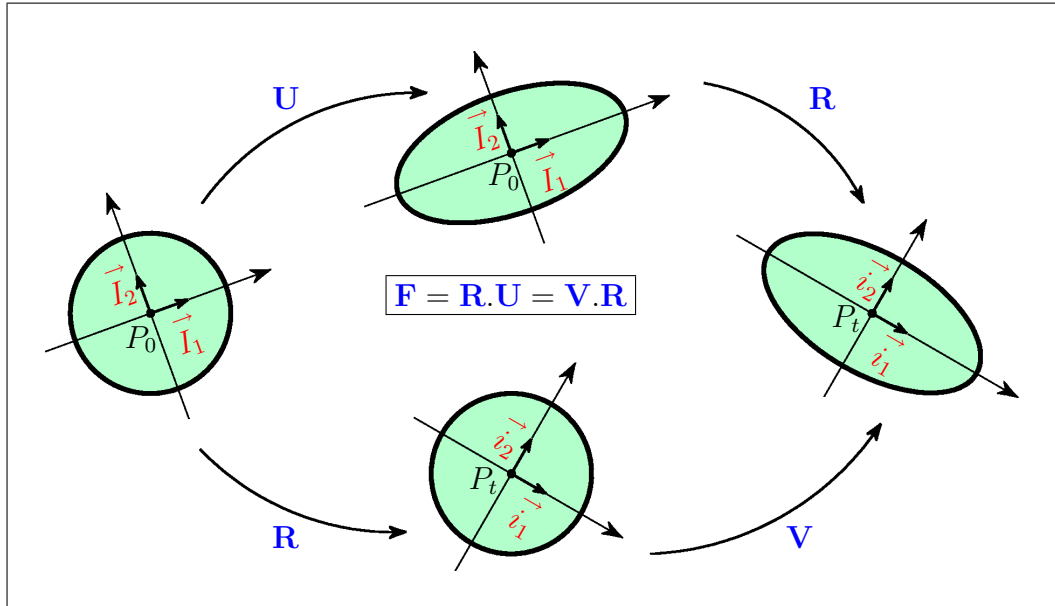




FIG. 2.3 – Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente

**Remarque** Explicitons les composantes de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , tout en tirant parti de sa décomposition polaire  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$  ainsi que du caractère lagrangien (resp<sup>t</sup> eulérien) du tenseur de déformation pure avant rotation  $\mathbf{U}$  (resp<sup>t</sup> après rotation  $\mathbf{V}$ ). Il vient

$$F_{iK} = R_{iL} U_{LK} = V_{ij} R_{jK} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.55)$$

et la différence de nature entre les deux indices attachés à chacune des composantes du tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  (un indice majuscule et un indice minuscule) illustre le caractère mixte de cette grandeur.

## 2.2.4 Variations de longueur d'un vecteur matériel élémentaire

 [tab28.html](#)  [pap224a.html](#) On cherche ici à quantifier les variations relatives de longueur de vecteurs matériels élémentaires. Reconsidérons pour cela la figure 2.2 page 75 et identifions les vecteurs élémentaires  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$ . Nous avons donc  $\vec{dx}^1 = \vec{dx}^2$  et conviendrons, dans toute cette section, de poser  $\vec{dX} = \vec{dX}^1 = \vec{dX}^2$  ainsi que  $\vec{dx} = \vec{dx}^1 = \vec{dx}^2$ . Soient alors  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs unitaires ayant respectivement mêmes directions que  $\vec{dX}$  et  $\vec{dx}$ . Autrement dit, on a

$$\vec{N} = \frac{\vec{dX}}{\|\vec{dX}\|} \quad \vec{n} = \frac{\vec{dx}}{\|\vec{dx}\|} \quad (2.56)$$

On définit la **dilatation**  $\varepsilon_{NN}$  dans la direction  $\vec{N}$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  comme la différence relative entre les longueurs des vecteurs



élémentaires  $\vec{dx}$  et  $\vec{dX}$ , ramenée à la longueur initiale  $\|\vec{dX}\|$  (point de vue lagrangien). On a donc

$$\varepsilon_{NN} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dX}\|} \quad (2.57)$$

Ramenée à la longueur  $\|\vec{dx}\|$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  (point de vue eulérien), cette variation relative de longueur est notée  $\varepsilon_{nn}$  et appelée **dilatation dans la direction  $\vec{n}$  au point  $P_t$**  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant.

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dx}\|} \quad (2.58)$$

On a donc

$$\|\vec{dx}\| = (1 + \varepsilon_{NN})\|\vec{dX}\| \quad (2.59)$$


ainsi que

$$\|\vec{dX}\| = (1 - \varepsilon_{nn})\|\vec{dx}\| \quad (2.60)$$

et ces deux dilatations satisfont alors la relation

$$(1 + \varepsilon_{NN})(1 - \varepsilon_{nn}) = 1 \quad (2.61)$$

Comme le lecteur l'aura certainement observé, les définitions et notations précédentes suggèrent que  $\varepsilon_{NN}$  (resp<sup>t</sup>  $\varepsilon_{nn}$ ) ne dépend que de la direction  $\vec{N}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}$ ) du vecteur élémentaire  $\vec{dX}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{dx}$ ), et non de sa norme. Les considérations qui suivent établissent cette propriété, conséquence directe de la dépendance linéaire entre  $\vec{dx}$  et  $\vec{dX}$ .

 [pap224b.html](#) Considérons en effet l'expression (2.6) du produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2$ . Il vient, puisque  $\vec{dx}^1 = \vec{dx}^2 = \vec{dx}$  et  $\vec{dX}^1 = \vec{dX}^2 = \vec{dX}$ ,

$$\|\vec{dx}\|^2 = \vec{dX} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{dX} \quad (2.62)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (2.56) et (2.59),

$$(1 + \varepsilon_{NN})^2 \|\vec{dX}\|^2 = \|\vec{dX}\|^2 \vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N} \quad (2.63)$$

et l'on a donc

$$\varepsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} - 1 \quad (2.64)$$

On peut également tirer parti de l'expression (2.14) de la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$  qui devient ici


$$\|\vec{dx}\|^2 - \|\vec{dX}\|^2 = \vec{dX} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{dX} \quad (2.65)$$

c'est-à-dire

$$(1 + \varepsilon_{NN})^2 \|\vec{dX}\|^2 - \|\vec{dX}\|^2 = \|\vec{dX}\|^2 \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{N} \quad (2.66)$$

et finalement

$$\varepsilon_{NN} + \frac{1}{2}\varepsilon_{NN}^2 = \vec{N} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{N} \quad (2.67)$$

 [pap224c.html](#) Considérant à présent l'expression (2.27) du produit scalaire  $\vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$ , on a

$$\|\vec{dX}\|^2 = \vec{dx} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{dx} \quad (2.68)$$

ce qui donne, en tenant compte de (2.56) et (2.60),

$$(1 - \varepsilon_{nn})^2 \|\vec{dx}\|^2 = \|\vec{dx}\|^2 \vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n} \quad (2.69)$$

et donc

$$\varepsilon_{nn} = 1 - \sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n}} \quad (2.70)$$

Enfin, l'expression (2.32) de la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$  s'écrit ici

$$\|\vec{dx}\|^2 - \|\vec{dX}\|^2 = \vec{dx} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{dx} \quad (2.71)$$

et l'on obtient

$$\|\vec{dx}\|^2 - (1 - \varepsilon_{nn})^2 \|\vec{dx}\|^2 = \|\vec{dx}\|^2 \vec{n} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{n} \quad (2.72)$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{nn} - \frac{1}{2}\varepsilon_{nn}^2 = \vec{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{n} \quad (2.73)$$

## Remarques

1. Les dilatations et plus généralement les déformations (composantes des tenseurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{E}$ ) sont par définition des grandeurs physiques sans unité. Elles restent par ailleurs petites dans de nombreuses situations réelles (ouvrages en conditions normales de service), si bien que l'on utilise fréquemment le sous-multiple  $10^{-6}$ , appelé microdéformation (symbole  $\mu\text{def}$ ) et correspondant à l'allongement de  $1 \mu\text{m}$  d'un segment matériel de longueur initiale égale à 1 m.

2. La signification physique des grandeurs locales que sont les dilatations  $\varepsilon_{NN}$  et  $\varepsilon_{nn}$  est la suivante. Lorsque  $\varepsilon_{NN} > 0$  (i.e.  $\varepsilon_{nn} > 0$ ), il y a, entre les instants  $t_0$  et  $t$ , augmentation de la longueur du vecteur matériel élémentaire  $\vec{dX}$ . Si  $\varepsilon_{NN} < 0$  (i.e.  $\varepsilon_{nn} < 0$ ), cette longueur diminue, tandis que  $\varepsilon_{NN} = 0$  (i.e.  $\varepsilon_{nn} = 0$ ) traduit sa conservation.
3. Exprimées relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les relations (2.64), (2.67), (2.70) et (2.73) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{NN} = \sqrt{C_{KL}N_KN_L} - 1 \\ \varepsilon_{NN} + \frac{1}{2}\varepsilon_{NN}^2 = L_{KL}N_KN_L \\ \varepsilon_{nn} = 1 - \sqrt{B_{ij}^{-1}n_in_j} \\ \varepsilon_{nn} - \frac{1}{2}\varepsilon_{nn}^2 = E_{ij}n_in_j \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Choissant alors comme directions particulières celles associées aux vecteurs de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de ce repère, nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Dilatations dans les directions du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

configuration de référence $\Omega_0$			configuration actuelle $\Omega_t$		
$\vec{N}$	$\varepsilon_{NN}$	$\varepsilon_{NN} + \frac{1}{2}\varepsilon_{NN}^2$	$\vec{n}$	$\varepsilon_{nn}$	$\varepsilon_{nn} - \frac{1}{2}\varepsilon_{nn}^2$
$\vec{e}_1$	$\sqrt{C_{11}} - 1$	$L_{11}$	$\vec{e}_1$	$1 - \sqrt{B_{11}^{-1}}$	$E_{11}$
$\vec{e}_2$	$\sqrt{C_{22}} - 1$	$L_{22}$	$\vec{e}_2$	$1 - \sqrt{B_{22}^{-1}}$	$E_{22}$
$\vec{e}_3$	$\sqrt{C_{33}} - 1$	$L_{33}$	$\vec{e}_3$	$1 - \sqrt{B_{33}^{-1}}$	$E_{33}$

On voit donc que les termes diagonaux de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{L}$  sont associés aux dilatations  $\varepsilon_{NN}$  dans ces trois directions au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  (figure 2.2 page 75), tandis que les termes diagonaux de  $\mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{E}$  sont liés aux dilatations  $\varepsilon_{nn}$  dans ces mêmes directions au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant.

4. On a, puisque  $\vec{dx} = \mathbf{F}.\vec{dX}$  et compte tenu de (2.56) et (2.62),

$$\vec{n} = \frac{\mathbf{F}.\vec{N}}{\sqrt{\vec{N}.\mathbf{C}.\vec{N}}} \quad (2.75)$$

De même, on obtient, avec (2.56) et (2.68),

$$\vec{N} = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{n}}{\sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n}}} \quad (2.76)$$

5. De la définition (2.57) de  $\varepsilon_{NN}$  et de  $\vec{dx} = \mathbf{F} \cdot \vec{dX}$ , on tire, compte tenu de (2.56),

$$\varepsilon_{NN} = \|\mathbf{F} \cdot \vec{N}\| - 1 \quad (2.77)$$

De même, il vient, en considérant cette fois la définition (2.58) de  $\varepsilon_{nn}$ ,

$$\varepsilon_{nn} = 1 - \|\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{n}\| \quad (2.78)$$



Tirant parti de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  (théorème 7 page 83), on a alors

$$\varepsilon_{NN} = \|\mathbf{U} \cdot \vec{N}\| - 1 \quad (2.79)$$

ainsi que


$$\varepsilon_{nn} = 1 - \|\mathbf{V}^{-1} \cdot \vec{n}\| \quad (2.80)$$

## 2.2.5 Variations d'angle entre les directions de deux vecteurs matériels élémentaires

 [tab29.html](#)  [pap225a.html](#) On s'intéresse à présent aux variations de l'angle que font entre elles les directions des deux vecteurs matériels élémentaires représentés sur la figure 2.2 page 75. Soient tout d'abord  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  les vecteurs unitaires ayant respectivement mêmes directions que  $\vec{dX}^1$ ,  $\vec{dX}^2$ ,  $\vec{dx}^1$  et  $\vec{dx}^2$ . En d'autres termes, on a

$$\vec{N} = \frac{\vec{dX}^1}{\|\vec{dX}^1\|} \quad \vec{T} = \frac{\vec{dX}^2}{\|\vec{dX}^2\|} \quad \vec{n} = \frac{\vec{dx}^1}{\|\vec{dx}^1\|} \quad \vec{t} = \frac{\vec{dx}^2}{\|\vec{dx}^2\|} \quad (2.81)$$


Soit par ailleurs  $\theta_{NT}$  (resp<sup>t</sup>  $\theta_{nt}$ ) l'angle que font entre elles les directions des vecteurs unitaires  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$ ).

 [pap225b.html](#) L'expression (2.14) de la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$  devient alors, avec ces notations,

$$\|\vec{dx}^1\| \|\vec{dx}^2\| \cos(\theta_{nt}) - \|\vec{dX}^1\| \|\vec{dX}^2\| \cos(\theta_{NT}) = \|\vec{dX}^1\| \|\vec{dX}^2\| \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T} \quad (2.82)$$

ce qui donne, compte tenu de (2.59) et (2.64),


$$\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}} \cos(\theta_{nt}) - \cos(\theta_{NT}) = \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T} \quad (2.83)$$

 [pap225c.html](#) Partant de l'expression (2.32) de la variation de produit scalaire  $\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 - \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2$ , on a aussi

$$\|\vec{dx}^1\| \|\vec{dx}^2\| \cos(\theta_{nt}) - \|\vec{dX}^1\| \|\vec{dX}^2\| \cos(\theta_{NT}) = \|\vec{dx}^1\| \|\vec{dx}^2\| \vec{n} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{t} \quad (2.84)$$

c'est-à-dire, avec (2.60) et (2.70),

$$\cos(\theta_{nt}) - \sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n}} \sqrt{\vec{t} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{t}} \cos(\theta_{NT}) = \vec{n} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{t} \quad (2.85)$$

 [pap225d.html](#) Intéressons-nous alors au cas particulier de vecteurs matériels élémentaires orthogonaux dans la configuration de référence  $\Omega_0$  ( $\theta_{NT} = \frac{\Pi}{2}$  : point de vue lagrangien). On appelle **distorsion entre les directions orthogonales  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  au point  $P_0$**  de la configuration initiale  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ , et l'on note  $\gamma_{NT}$ , l'opposé de la variation, entre l'instant de référence  $t_0$  et l'instant actuel  $t$ , de l'angle que font entre elles ces directions matérielles. On a donc


$$\gamma_{NT} = \frac{\Pi}{2} - \theta_{nt} \quad (2.86)$$

et l'on introduit également la **demi-distorsion**  $\varepsilon_{NT}$  définie par

$$\varepsilon_{NT} = \frac{1}{2} \gamma_{NT} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi}{2} - \theta_{nt} \right) \quad (2.87)$$

La relation (2.83) donne alors, puisque  $\theta_{NT} = \frac{\Pi}{2}$ ,

$$\sin(\gamma_{NT}) = \sin(2\varepsilon_{NT}) = \frac{\vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}}} \quad (2.88)$$

 [pap225e.html](#) Considérant à présent le cas particulier de vecteurs matériels élémentaires orthogonaux dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  ( $\theta_{nt} = \frac{\Pi}{2}$  : point de vue eulérien), on définit la **distorsion  $\gamma_{nt}$  entre les directions orthogonales  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  au point  $P_t$**  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant comme l'opposé de la variation, entre l'instant de référence  $t_0$  et l'instant actuel  $t$ , de l'angle que font entre elles ces directions matérielles. En d'autres termes, on a

$$\gamma_{nt} = \theta_{NT} - \frac{\Pi}{2} \quad (2.89)$$

et la **demi-distorsion**  $\varepsilon_{nt}$  a pour expression

$$\varepsilon_{nt} = \frac{1}{2} \gamma_{nt} = \frac{1}{2} \left( \theta_{NT} - \frac{\Pi}{2} \right) \quad (2.90)$$

La relation (2.85) fournit alors, puisque  $\theta_{nt} = \frac{\Pi}{2}$ ,

$$\sin(\gamma_{nt}) = \sin(2\varepsilon_{nt}) = \frac{\vec{n} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{t}}{\sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n}} \sqrt{\vec{t} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{t}}} \quad (2.91)$$

**Remarques**  [tab210.html](#)

1. Les distorsions  $\gamma_{NT}$  et  $\gamma_{nt}$  ont la signification physique locale suivante. Lorsque  $\gamma_{NT} > 0$  (resp<sup>t</sup>  $\gamma_{nt} > 0$ ), il y a, entre les instants  $t_0$  et  $t$ , diminution de l'angle que font entre elles les directions des vecteurs matériels élémentaires  $\vec{dX}^1$  et  $\vec{dX}^2$ . Si  $\gamma_{NT} < 0$  (resp<sup>t</sup>  $\gamma_{nt} < 0$ ), cet angle augmente, alors que  $\gamma_{NT} = 0$  (resp<sup>t</sup>  $\gamma_{nt} = 0$ ) traduit sa conservation. Enfin, rappelons que pour  $\gamma_{NT}$  cet angle est droit dans la configuration de référence  $\Omega_0$  à l'instant  $t_0$ , tandis qu'il l'est dans la configuration déformée  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  lorsque l'on évalue  $\gamma_{nt}$ .
2. Les relations (2.88) et (2.91) s'écrivent, lorsqu'on les exprime relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{cases} \sin(\gamma_{NT}) = \sin(2\varepsilon_{NT}) = \frac{2L_{KL}N_KT_L}{\sqrt{C_{IJ}N_I N_J} \sqrt{C_{MN}T_M T_N}} \\ \sin(\gamma_{nt}) = \sin(2\varepsilon_{nt}) = \frac{2E_{ij}n_i t_j}{\sqrt{B_{kl}^{-1}n_k n_l} \sqrt{B_{rs}^{-1}t_r t_s}} \end{cases} \quad (2.92)$$

Prenons alors comme directions particulières deux à deux orthogonales celles fournies par tous les couples de vecteurs de base de ce repère. On obtient les résultats regroupés dans le tableau 2.2.

Les termes non diagonaux de  $\mathbf{L}$  apparaissent donc liés aux distorsions  $\gamma_{NT}$  entre les directions deux à deux orthogonales du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  au point  $P_0$  de la configuration initiale  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  (figure 2.2 page 75), les termes non diagonaux de  $\mathbf{E}$  étant quant à eux associés aux distorsions  $\gamma_{nt}$  entre ces mêmes directions au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant.



3. Considérons, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ , les directions particulières  $(\vec{N}, \vec{T})$  deux à deux orthogonales associées à tous les couples de vecteurs de base du repère principal  $R^C = (P_0, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$  de  $\mathbf{C}$ . La relation (2.88) exprimée relativement à ce repère, identique à celui de  $\mathbf{L}$ , montre alors que ces directions ne subissent pas de distorsion ( $\gamma_{NT} = 0$ ), et nous retrouvons là un résultat établi dans la section 2.2.3 (corollaire 3 page 85) : les transformées des directions principales de déformation  $\vec{I}_1$ ,  $\vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  restent deux à deux

TAB. 2.2 – Distorsions entre les directions du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 

configuration de référence $\Omega_0$		configuration actuelle $\Omega_t$	
$(\vec{N}, \vec{T})$	$\sin(\gamma_{NT}) = \sin(2\varepsilon_{NT})$	$(\vec{n}, \vec{t})$	$\sin(\gamma_{nt}) = \sin(2\varepsilon_{nt})$
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$	$\frac{2L_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}}$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$	$\frac{2E_{12}}{\sqrt{B_{11}^{-1}}\sqrt{B_{22}^{-1}}}$
$(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$	$\frac{2L_{13}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{33}}}$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$	$\frac{2E_{13}}{\sqrt{B_{11}^{-1}}\sqrt{B_{33}^{-1}}}$
$(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$	$\frac{2L_{23}}{\sqrt{C_{22}}\sqrt{C_{33}}}$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$	$\frac{2E_{23}}{\sqrt{B_{22}^{-1}}\sqrt{B_{33}^{-1}}}$

orthogonales dans la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant. Ces transformées n'étant autres que les directions principales de déformation  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  (corollaire 3 page 85), on retrouve également le résultat précédent lorsque l'on considère les directions particulières  $(\vec{n}, \vec{t})$  correspondant à tous les couples de vecteurs de base du repère principal  $R^B = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$  de  $\mathbf{B}$ , identique à celui de  $\mathbf{E}$ . Exprimant en effet la relation (2.91) relativement à ce repère, on obtient bien, pour ces directions deux à deux orthogonales,  $\gamma_{nt} = 0$ .

### 2.2.6 Variations de volume matériel élémentaire

 [tab211.html](#)  [pap226.html](#) Nous rappelons tout d'abord, sans en redonner la démonstration, les résultats établis dans la section 1.2.4.

Reconsidérons, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , le volume matériel élémentaire  $dV$  représenté sur la figure 1.3 page 37. Ce volume matériel a alors pour transformé, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , le volume matériel  $dv$  représenté sur cette même figure et l'on a

$$\boxed{\frac{dv}{dV} = J} \quad (2.93)$$

où  $J$  est le déterminant  $J(\vec{X}, t)$  de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$ , jacobien de la transformation  $\mathcal{F}_t$  en ce point.

On définit alors la **dilatation volumique**  $\theta_v$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  comme la différence relative entre les volumes élémentaires  $dv$  et  $dV$ , ramenée

au volume initial  $dV$  (point de vue lagangien). Autrement dit, on a

$$\theta_V = \frac{dv - dV}{dV} \quad (2.94)$$

et il vient, compte tenu de (2.93),

$$\theta_V = J - 1 \quad (2.95)$$

Lorsqu'on la ramène au volume élémentaire  $dv$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , cette variation relative de volume est notée  $\theta_v$  et appelée **dilatation volumique au point**  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant


$$\theta_v = \frac{dv - dV}{dv} \quad (2.96)$$

et l'on a, avec (2.93),

$$\theta_v = 1 - J^{-1} \quad (2.97)$$

**Remarque** Les dilatations volumiques  $\theta_V$  et  $\theta_v$  s'interprètent de la façon suivante. Si  $\theta_V > 0$  (i.e.  $\theta_v > 0$ ), il y a, entre les instants  $t_0$  et  $t$ , augmentation du volume élémentaire  $dV$ . Lorsque  $\theta_V < 0$  (i.e.  $\theta_v < 0$ ), ce volume diminue, tandis que  $\theta_V = 0$  (i.e.  $\theta_v = 0$ ) correspond à sa conservation.

## 2.2.7 Variations d'aire d'une surface matérielle élémentaire

 [pap227a.html](#) Rappelons tout d'abord, sans chercher à les redémontrer, les résultats issus des considérations de la section 1.4.4.2.

Soit, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , la surface matérielle élémentaire  $\vec{dS}$  représentée sur la figure 1.5 page 51. À cette surface matérielle correspond alors, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , la surface matérielle  $\vec{ds}$  représentée sur cette même figure et telle que

$$\vec{ds} = J^t \mathbf{F}^{-1} \vec{dS} \quad (2.98)$$

Il vient alors, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \|\vec{ds}\|^2 &= ds_i ds_i \\ &= JF_{Ki}^{-1} dS_K JF_{Li}^{-1} dS_L \\ &= J^2 F_{Ki}^{-1} F_{Li}^{-1} dS_K dS_L \end{aligned} \quad (2.99)$$



et l'on obtient, compte tenu de (2.8),

$$\|\vec{ds}\|^2 = J^2 C_{KL}^{-1} dS_K dS_L \quad (2.100)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\|\vec{ds}\|^2 = J^2 \vec{dS} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{dS} \quad (2.101)$$

dont on pourra remarquer l'analogie avec (2.62).

De (2.98) et de l'inversibilité de  $\mathbf{F}$ , on tire par ailleurs

$$\vec{dS} = J^{-1} {}^t \mathbf{F} \cdot \vec{ds} \quad (2.102)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \|\vec{dS}\|^2 &= dS_K dS_K \\ &= J^{-1} F_{iK} ds_i J^{-1} F_{jK} ds_j \\ &= J^{-2} F_{iK} F_{jK} ds_i ds_j \end{aligned} \quad (2.103)$$


c'est-à-dire, compte tenu de (2.24),

$$\|\vec{dS}\|^2 = J^{-2} B_{ij} ds_i ds_j \quad (2.104)$$

et l'on obtient ainsi la relation intrinsèque

$$\|\vec{dS}\|^2 = J^{-2} \vec{ds} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{ds} \quad (2.105)$$

que l'on comparera à (2.68).

 [pap227b.html](#) Soient à présent  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs unitaires ayant respectivement mêmes directions que  $\vec{dS}$  et  $\vec{ds}$ . Ces vecteurs sont encore appelés **normales aux surfaces élémentaires**  $\vec{dS}$  et  $\vec{ds}$ , et l'on a donc

$$\vec{N} = \frac{\vec{dS}}{\|\vec{dS}\|} \quad \vec{n} = \frac{\vec{ds}}{\|\vec{ds}\|} \quad (2.106)$$

On définit alors la **dilatation surfacique**  $\theta_N$  **dans le plan de normale**  $\vec{N}$  **au point**  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  comme la différence relative entre les aires des surfaces élémentaires  $\vec{ds}$  et  $\vec{dS}$ , ramenée à l'aire initiale  $\|\vec{dS}\|$  (point de vue lagrangien). On a donc

$$\theta_N = \frac{\|\vec{ds}\| - \|\vec{dS}\|}{\|\vec{dS}\|} \quad (2.107)$$

et il vient, compte tenu de (2.101) ainsi que des notations (2.106),

$$\theta_N = \frac{\sqrt{J^2 \|\vec{dS}\|^2 \vec{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{N} - \|\vec{dS}\|^2}}{\|\vec{dS}\|^2} \quad (2.108)$$

c'est-à-dire, puisque  $J > 0$ ,

$$\theta_N = J \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{N} - 1} \quad (2.109)$$

Ramenée à l'aire  $\|\vec{ds}\|$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  (point de vue eulérien), cette variation relative de surface est notée  $\theta_n$  et appelée **dilatation surfacique dans le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$**  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à cet instant.

$$\theta_n = \frac{\|\vec{ds}\| - \|\vec{dS}\|}{\|\vec{ds}\|} \quad (2.110)$$

On a alors, compte tenu de (2.105) et des notations (2.106),

$$\theta_n = \frac{\|\vec{ds}\| - \sqrt{J^{-2} \|\vec{ds}\|^2 \vec{n} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{n}}}{\|\vec{ds}\|} \quad (2.111)$$

c'est-à-dire

$$\theta_n = 1 - J^{-1} \sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{n}} \quad (2.112)$$

### Remarques

1. Les dilatations surfaciques  $\theta_N$  et  $\theta_n$  s'interprètent comme suit. Lorsque  $\theta_N > 0$  (i.e.  $\theta_n > 0$ ), il y a, entre les instants  $t_0$  et  $t$ , augmentation de l'aire de la surface matérielle élémentaire  $\vec{dS}$ . Si  $\theta_N < 0$  (i.e.  $\theta_n < 0$ ), cette aire diminue, alors que  $\theta_N = 0$  (i.e.  $\theta_n = 0$ ) traduit sa conservation.
2. On a, compte tenu des notations (2.106) ainsi que de (2.98) et (2.101),

$$\vec{n} = \frac{{}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{N}}} \quad (2.113)$$

De même, on obtient, avec (2.102) et (2.105),

$$\vec{N} = \frac{{}^t\mathbf{F} \cdot \vec{n}}{\sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{n}}} \quad (2.114)$$

et le lecteur comparera, en prenant toutefois garde à ne pas les confondre, les relations précédentes (2.113) et (2.114) aux expressions (2.75) et (2.76).

3. Exprimant les relations (2.109) et (2.112) relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons

$$\begin{cases} \theta_N &= J\sqrt{C_{KL}^{-1}N_KN_L} - 1 \\ \theta_n &= 1 - J^{-1}\sqrt{B_{ij}n_in_j} \end{cases} \quad (2.115)$$


Prenons comme directions particulières  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  celles associées aux vecteurs de base de ce repère. On obtient alors les résultats regroupés dans le tableau 2.3.

TAB. 2.3 – Dilatations surfaciques dans les plans normaux aux directions du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

configuration de référence $\Omega_0$		configuration actuelle $\Omega_t$	
$\vec{N}$	$\theta_N$	$\vec{n}$	$\theta_n$
$\vec{e}_1$	$J\sqrt{C_{11}^{-1}} - 1$	$\vec{e}_1$	$1 - J^{-1}\sqrt{B_{11}}$
$\vec{e}_2$	$J\sqrt{C_{22}^{-1}} - 1$	$\vec{e}_2$	$1 - J^{-1}\sqrt{B_{22}}$
$\vec{e}_3$	$J\sqrt{C_{33}^{-1}} - 1$	$\vec{e}_3$	$1 - J^{-1}\sqrt{B_{33}}$

## 2.3 Dérivées matérielles des tenseurs de déformation

### 2.3.1 Tenseurs des taux de déformation et de rotation

 [pap231a.html](#) Reconsidérons ici le gradient des vitesses  $\mathbf{G} = \mathbf{grad}_x \mathbf{v}$ , de composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.116)$$

Décomposant classiquement ce tenseur en parties symétrique  $\mathbf{D}$  et antisymétrique  $\mathbf{W}$ , nous obtenons

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.117)$$

avec

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + {}^t\mathbf{G}) \quad (2.118)$$

ainsi que


$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - {}^t\mathbf{G}) \quad (2.119)$$

Le tenseur  $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation, tandis que  $\mathbf{W}$  est appelé tenseur des taux de rotation, ces dénominations trouvant leur justification dans les développements des sections suivantes. Les composantes des tenseurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont données par

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.120)$$

et

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.121)$$

 [pap231b.html](#) Le tenseur des taux de rotation  $\mathbf{W}$  étant antisymétrique, le nombre de ses composantes indépendantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est égal à 3, et l'on peut donc lui associer, de façon biunivoque, le pseudo-vecteur  $\tilde{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  appelé tourbillon des vitesses et ayant pour composantes relativement à ce même repère

$$\begin{cases} w_1 &= -W_{23} \\ w_2 &= -W_{31} \\ w_3 &= -W_{12} \end{cases} \quad (2.122)$$

En d'autres termes, on a, en tirant parti du tenseur d'orientation  $\epsilon$ ,

$$\begin{cases} w_i &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} W_{jk} & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ W_{ij} &= -\epsilon_{ijk} w_k & \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{cases} \quad (2.123)$$

ou encore, en utilisant la notation tensorielle,

$$\tilde{w} = -\frac{1}{2} \epsilon : \mathbf{W} \iff \mathbf{W} = -\epsilon \cdot \tilde{w} \quad (2.124)$$

et l'on en déduit les relations intrinsèques

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{v} \quad (2.125)$$

ainsi que

$$\mathbf{W} \cdot \vec{z} = \tilde{w} \wedge \vec{z} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.126)$$

En effet, il vient, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (2.123) et (2.121) ainsi que des notations introduites dans la section 1.4.2 lors de la démonstration du théorème 3

page 46,

$$\begin{aligned}
 w_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}W_{jk} \\
 &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}(\partial_k v_j - \partial_j v_k) \\
 &= \frac{1}{4}(-\epsilon_{ijk}\partial_k v_j + \epsilon_{ijk}\partial_j v_k) \\
 &= \frac{1}{4}(-\epsilon_{ikj} + \epsilon_{ijk})\partial_j v_k \\
 &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j v_k \\
 &= \left[\frac{1}{2}\mathbf{rot}_x \mathbf{v}\right]_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \tag{2.127}$$


ainsi que

$$\begin{aligned}
 W_{ij}z_j &= -\epsilon_{ijk}w_k z_j \\
 &= \epsilon_{ikj}w_k z_j \\
 &= \left[\tilde{\mathbf{w}} \wedge \tilde{\mathbf{z}}\right]_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

ce qui établit bien les relations (2.125) et (2.126).

## 2.3.2 Dérivées matérielles des tenseurs de déformation

### 2.3.2.1 Tenseurs lagrangiens

 [pap2321.html](#) Les considérations développées dans la section 1.4.1 nous ont appris que la dérivée matérielle d'une grandeur lagrangienne s'identifie à sa dérivée partielle par rapport au temps. On a donc

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{C}}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{L}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \tag{2.129}$$

et le lecteur prendra garde là aussi, comme dans la section 1.4.3 pour  $\dot{\mathbf{F}}^{-1}$ , à ne pas confondre  $\dot{\mathbf{C}}^{-1}$ , dérivée matérielle de  $\mathbf{C}^{-1}$ , avec l'inverse de  $\dot{\mathbf{C}}$  lorsque ce dernier existe.

Il peut toutefois s'avérer utile de disposer d'autres expressions des dérivées matérielles de ces tenseurs lagrangiens. De la définition (2.3) de  $\mathbf{C}$  jointe à l'expression (1.56) de  $\dot{\mathbf{F}}$ , on tire par exemple

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{C}} &= \frac{d}{dt}({}^t\mathbf{F}.\mathbf{F}) \\
 &= {}^t\dot{\mathbf{F}}.\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}.\dot{\mathbf{F}} \\
 &= {}^t\mathbf{F}.\mathbf{G}.\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}.\mathbf{G}.\mathbf{F} \\
 &= {}^t\mathbf{F}.({}^t\mathbf{G} + \mathbf{G}).\mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (2.118),

$$\dot{\mathbf{C}} = 2{}^t\mathbf{F}.\mathbf{D}.\mathbf{F} \tag{2.131}$$

et l'on a donc, avec (2.11),

$$\dot{\mathbf{L}} = {}^t\mathbf{F}.\mathbf{D}.\mathbf{F} \tag{2.132}$$

On a également, puisque  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ ,

$$\boxed{\frac{1}{2}(\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}) = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}} \quad (2.133)$$


Enfin, de  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1}$  et de l'expression (1.58) de  $\dot{\mathbf{F}}^{-1}$ , on tire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}^{-1} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1}) \\ &= \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\dot{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{G} + {}^t\mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (2.134)$$

c'est-à-dire, avec (2.118),

$$\boxed{\dot{\mathbf{C}}^{-1} = -2\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^{-1}} \quad (2.135)$$

### 2.3.2.2 Tenseurs eulériens

 [pap2322.html](#) De la définition (2.23) du tenseur de Cauchy à gauche  $\mathbf{B}$  et de (1.56), on tire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}) \\ &= \dot{\mathbf{F}} \cdot {}^t\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot {}^t\dot{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.136)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot {}^t\mathbf{G}} \quad (2.137)$$

et l'on a donc, puisque  $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$ ,

$$\boxed{\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot {}^t\mathbf{G}} \quad (2.138)$$

De manière analogue et compte tenu de (1.58), il vient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}^{-1} &= \frac{d}{dt}({}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ &= {}^t\dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1} + {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= -{}^t\mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1} - {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.139)$$

et l'on obtient donc, avec la même mise en garde que précédemment pour  $\dot{\mathbf{C}}^{-1}$ ,

$$\boxed{\dot{\mathbf{B}}^{-1} = -{}^t\mathbf{G} \cdot \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{G}} \quad (2.140)$$

On a enfin, avec (2.29),

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{G}\cdot\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{G}) \quad (2.141)$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $\mathbf{B}^{-1}$  par son expression fonction de  $\mathbf{E}$ ,

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{G} - 2{}^t\mathbf{G}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{G} - 2\mathbf{E}\cdot\mathbf{G}) \quad (2.142)$$

ce qui donne finalement, compte tenu de (2.118),

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} - {}^t\mathbf{G}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{G} \quad (2.143)$$

### 2.3.2.3 Tenseurs mixtes

 [pap2323.html](#) De la décomposition polaire  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$ , on tire

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{U}} \quad (2.144)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.56),

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1} \\ &= (\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot(\mathbf{U}^{-1}\cdot{}^t\mathbf{R}) \\ &= \dot{\mathbf{R}}\cdot{}^t\mathbf{R} + \mathbf{R}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1})\cdot{}^t\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.145)$$

Il vient alors, avec (2.119),

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{G} - {}^t\mathbf{G}) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{R}}\cdot{}^t\mathbf{R} - \mathbf{R}\cdot{}^t\dot{\mathbf{R}}) + \frac{1}{2}\mathbf{R}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot{}^t\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.146)$$

On a par ailleurs, puisque  $\mathbf{R}\cdot{}^t\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta}$ ,

$$\dot{\mathbf{R}}\cdot{}^t\mathbf{R} + \mathbf{R}\cdot{}^t\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (2.147)$$

et nous obtenons finalement


$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\cdot{}^t\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot{}^t\mathbf{R} \quad (2.148)$$

**Remarque** Les relations (2.132), (2.143) et (2.148) justifient les appellations de tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation respectivement données à  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$ .

## 2.4 Cas des transformations infinitésimales

### 2.4.1 Définitions

Nombreuses sont les situations réelles (ouvrages d'art, bâtiments en service) où les solides déformables subissent des transformations que l'on peut supposer infinitésimales. C'est la

**Définition 11 (Transformations infinitésimales 1)**  [def11t.html](#)

Soit  $\mathbf{u}$  le champ des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$ , et soit  $\mathbf{H}^L(\vec{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{u}(\vec{X}, t)$  son gradient lagrangien au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à l'instant  $t$  (figure 2.2 page 75). La transformation  $\mathcal{F}$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  est dite infinitésimale, ou infiniment petite, ou plus brièvement petite, lorsqu'en tout point  $P_0$  et à tout instant  $t$  la norme euclidienne<sup>1</sup> de  $\mathbf{H}^L$  reste petite devant l'unité.

$$\forall t, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0, \quad \|\mathbf{H}^L(\vec{X}, t)\| \ll 1 \quad (2.149)$$

Les transformations infinitésimales d'un milieu continu sont également caractérisées par la

**Définition 12 (Transformations infinitésimales 2)** Soit  $\mathbf{u}$  le champ des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$ , et soit  $\mathbf{H}^E(\vec{x}, t) = \mathbf{grad}_x \mathbf{u}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t)$  son gradient eulérien au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  (figure 2.2 page 75). La transformation  $\mathcal{F}$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  est dite infinitésimale, ou infiniment petite, ou plus brièvement petite, lorsqu'en tout point  $P_t$  et à tout instant  $t$  la norme euclidienne de  $\mathbf{H}^E$  reste petite devant l'unité.

$$\forall t, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t, \quad \|\mathbf{H}^E(\vec{x}, t)\| \ll 1 \quad (2.150)$$

Les deux définitions précédentes sont évidemment équivalentes. En effet, de (2.17) et (2.39), on tire

$$\begin{aligned} \delta &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ &= (\delta + \mathbf{H}^L)(\delta - \mathbf{H}^E) \\ &= \delta + \mathbf{H}^L - \mathbf{H}^E - \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E \end{aligned} \quad (2.151)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{H}^L - \mathbf{H}^E - \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E = \mathbf{0} \quad (2.152)$$

<sup>1</sup>On rappelle que la norme euclidienne  $\|\mathbf{T}\|$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$  du second ordre sur  $\mathbb{R}^n$  orthonormé est définie par  $\|\mathbf{T}\| = \sqrt{T_{ij}T_{ij}}$




Si  $\|\mathbf{H}^L\| \ll 1$ , on a alors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^E = \mathbf{H}^L - \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E &\implies \|\mathbf{H}^E\| \leq \|\mathbf{H}^L\| + \|\mathbf{H}^L\| \|\mathbf{H}^E\| \\
 &\implies (1 - \|\mathbf{H}^L\|) \|\mathbf{H}^E\| \leq \|\mathbf{H}^L\| \\
 &\implies \|\mathbf{H}^E\| \leq \frac{\|\mathbf{H}^L\|}{1 - \|\mathbf{H}^L\|} \\
 &\implies \|\mathbf{H}^E\| \ll 1
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

De même, il vient, dès que  $\|\mathbf{H}^E\| \ll 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^L = \mathbf{H}^E + \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E &\implies \|\mathbf{H}^L\| \leq \|\mathbf{H}^E\| + \|\mathbf{H}^L\| \|\mathbf{H}^E\| \\
 &\implies (1 - \|\mathbf{H}^E\|) \|\mathbf{H}^L\| \leq \|\mathbf{H}^E\| \\
 &\implies \|\mathbf{H}^L\| \leq \frac{\|\mathbf{H}^E\|}{1 - \|\mathbf{H}^E\|} \\
 &\implies \|\mathbf{H}^L\| \ll 1
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

**Conséquence :**  [tab212.html](#) Nous conviendrons, lorsque la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  est infinitésimale, de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en gradient (lagrangien  $\mathbf{H}^L$  ou eulérien  $\mathbf{H}^E$ ) du déplacement devant ceux du premier ordre.

La relation (2.152) montre alors qu'au premier ordre on a

$$\mathbf{H}^L = \mathbf{H}^E \tag{2.155}$$

et nous noterons, dans tout ce qui suit,

$$\mathbf{H}^L = \mathbf{H}^E = \mathbf{H} \tag{2.156}$$

Les relations (2.17) et (2.39) deviennent donc

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H} \tag{2.157}$$

ainsi que

$$\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H} \tag{2.158}$$

## Remarques

1. Lorsque le milieu déformable  $\mathcal{M}$  subit une transformation infiniment petite, les composantes du gradient  $\mathbf{H}$  du déplacement relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  s'obtiennent indifféremment (au premier ordre en  $\mathbf{H}$  et comme le montre la relation (2.156)) en dérivant celles du déplacement  $\mathbf{u}$  par rapport aux variables de Lagrange  $(X_1, X_2, X_3)$  ou par rapport aux variables d'Euler  $(x_1, x_2, x_3)$ . Autrement dit, on a, relativement à ce repère,

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \tag{2.159}$$

de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer ces variables les unes des autres par la nature (majuscule ou minuscule) des indices qui leurs sont affectés. Dans le cas de petites transformations de milieux continus, nous n'utiliserons donc qu'un unique système d'indices minuscules, illustrant ainsi le fait qu'au premier ordre en  $\mathbf{H}$  il n'existe alors plus, ainsi que nous l'allons voir dans ce qui suit, de différence de nature (lagrangienne ou eulérienne) entre grandeurs physiques telles que  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$  et  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{E}$  ou encore  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ .


2. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie étant équivalentes (au sens fort), les petites transformations du milieu continu  $\mathcal{M}$  sont aussi caractérisées, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de la remarque précédente, par

$$\forall t, \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1 \quad (2.160)$$

ou encore par

$$\forall t, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad (2.161)$$

## 2.4.2 Tenseurs des petites déformations et des petites rotations

 [tab213.html](#) Dans toute cette section comme dans celles qui suivent, la transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  est supposée infiniment petite et  $\mathbf{H}$  désigne le gradient du déplacement  $\mathbf{u}$ , de composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.162)$$

La décomposition classique de ce tenseur en parties symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}$  donne

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \quad (2.163)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + {}^t\mathbf{H}) \quad (2.164)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - {}^t\mathbf{H}) \quad (2.165)$$

Les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  sont les tenseurs linéarisés (ils sont linéaires en  $\mathbf{u}$ ), respectivement, des **petites déformations** et des **petites rotations**, ces dernières appellations trouvant leur justification dans les développements qui suivent. Leurs composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont données par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.166)$$

ainsi que

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.167)$$

La symétrie de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jointe à l'antisymétrie de  $\boldsymbol{\omega}$  impliquant  $\varepsilon_{ij}\omega_{ij} = 0$ , de la décomposition précédente de  $\mathbf{H}$  en parties symétrique et antisymétrique ainsi que de la définition de la norme euclidienne d'un tenseur du second ordre sur  $\mathbb{R}^n$  orthonormé, on déduit aisément

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\|^2 &= H_{ij}H_{ij} \\ &= (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) \\ &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij} + 2\varepsilon_{ij}\omega_{ij} \\ &= \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\omega_{ij} \end{aligned} \quad (2.168)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque


$$\|\mathbf{H}\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \quad (2.169)$$

On a donc, dans le cas de transformations infiniment petites de milieux déformables,


$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \quad (2.170)$$

ainsi que

$$\|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1 \quad (2.171)$$

 [pap242a.html](#) Reconsidérons alors les relations (2.21), (2.35), (2.43) ainsi que (2.46). Il vient au premier ordre en  $\mathbf{H}$ , compte tenu de (2.156) ainsi que de (2.164),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} = \mathbf{B} = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{L} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (2.172)$$

 [pap242b.html](#) Considérons à présent le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ . Ce tenseur est symétrique comme  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et défini positif en vertu de (2.170). On a par ailleurs  $(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon})^2 = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2$ , ce qui donne au premier ordre en  $\mathbf{H}$  (et plus précisément ici en  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), compte tenu de (2.172),  $\mathbf{C} = \mathbf{B} = (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon})^2$ . De  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ , de  $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$  ainsi que du caractère symétrique défini positif des tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  (théorème 7 page 83), on déduit alors

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.173)$$

Un raisonnement analogue, mené en partant du tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}$  et laissé au lecteur à titre d'exercice, montre que l'on a aussi

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.174)$$

De  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ , on peut alors tirer, compte tenu de (2.157), (2.163) et (2.174),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \\
 &= (\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}) \cdot (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}) \\
 &= (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}) \\
 &= \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &= \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{2.175}$$

ce qui donne au premier ordre en  $\mathbf{H}$


$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega} \tag{2.176}$$

### Remarques

1. Les relations (2.172), (2.173) ainsi que (2.176) justifient les appellations de tenseurs des petites déformations et des petites rotations respectivement données à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\omega}$ .
2. Les relations (2.170) et (2.171) montrent que les transformations infiniment petites d'un milieu déformable induisent des petites déformations ( $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ ) mais également des petites rotations ( $\|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1$ ). Plus précisément, on a l'équivalence

$$\|\mathbf{H}\| \ll 1 \iff \begin{cases} \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \\ \|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1 \end{cases} \tag{2.177}$$

3. Dans le cas de petites transformations de milieux continus, il n'existe plus, ainsi que le montrent les relations (2.172) et (2.173), de différence de nature (lagrangienne ou eulérienne) entre les tenseurs de déformation  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{C}^{-1}$  et  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ ), les points de vue lagrangien et eulérien coïncidant alors au premier ordre en  $\mathbf{H}$ .
4. La relation (2.173) conduit en particulier à identifier aux directions principales du tenseur linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$  des petites déformations les directions principales de déformation  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$  et  $\vec{I}_3$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  (directions propres de  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$ ), ainsi que les directions principales de déformation  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$  au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant (directions propres de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ), alors que  $\vec{I}_\alpha$  et  $\vec{i}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , diffèrent entre elles par un terme du premier ordre en  $\mathbf{H}$ , et non d'ordre supérieur ou égal à deux. On a en effet, compte tenu de (2.54) et de (2.176),  $\vec{i}_\alpha = \vec{I}_\alpha + \boldsymbol{\omega} \cdot \vec{I}_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Nous ne parlerons plus, dans le cas de transformations infiniment petites de milieux déformables, que des **directions principales de déformation** au point et à l'instant considérés associées aux directions propres du tenseur linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$ , les valeurs propres de ce tenseur étant quant à elles appelées **déformations principales** en ce point et à cet instant. Enfin, nous désignerons par  $R^e = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$  le repère orthonormé direct associé à ces directions, ou **repère principal de déformation** au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ .

5.  [pap242c.html](#) Comme dans la section 2.3.1 pour le tenseur des taux de rotation  $\mathbf{W}$ , on peut associer de façon biunivoque au tenseur antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}$  le pseudo-vecteur  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  de  $\mathbb{R}^3$  appelé petite rotation et ayant pour composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\begin{cases} \omega_1 &= -\omega_{23} \\ \omega_2 &= -\omega_{31} \\ \omega_3 &= -\omega_{12} \end{cases} \quad (2.178)$$

Autrement dit, on a, en tirant parti du tenseur d'orientation  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,

$$\begin{cases} \omega_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ \omega_{ij} &= -\epsilon_{ijk}\omega_k & \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \end{cases} \quad (2.179)$$

ou encore, en utilisant la notation tensorielle,

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\omega} \iff \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\epsilon}.\tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.180)$$

On en déduit alors les relations intrinsèques

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x \mathbf{u} \quad (2.181)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\omega}.\vec{z} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{z} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.182)$$


qu'il est aisé d'établir en substituant  $\boldsymbol{\omega}$  à  $\mathbf{W}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  à  $\tilde{\boldsymbol{w}}$  ainsi que  $\mathbf{u}$  à  $\mathbf{v}$  dans les démonstrations (2.127) et (2.128) des relations (2.125) et (2.126).

6. Intéressons-nous aux variations du champ des déplacements au voisinage du point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ . On a au premier ordre en  $\mathbf{H}$ , compte tenu de (2.163) et de (2.182),

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\vec{x} + \vec{dx}, t) &= \mathbf{u}(\vec{x}, t) + \mathbf{H}(\vec{x}, t).\vec{dx} \\ &= \mathbf{u}(\vec{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, t).\vec{dx} + \boldsymbol{\omega}(\vec{x}, t).\vec{dx} \\ &= \mathbf{u}(\vec{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, t).\vec{dx} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\vec{x}, t) \wedge \vec{dx} \end{aligned} \quad (2.183)$$

Le champ des déplacements au voisinage du point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  se décompose donc en une translation  $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$ , en un terme  $\boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, t).\vec{dx}$  lié à la petite déformation pure  $\boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, t)$  et en un terme  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\vec{x}, t) \wedge \vec{dx}$  associé à la petite rotation  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\vec{x}, t)$ .

### 2.4.3 Variations de longueur

 [pap243.html](#) Soient  $\vec{dX}$  et  $\vec{dx} = \mathbf{F} \cdot \vec{dX}$  les vecteurs élémentaires introduits dans la section 2.2.4, de directions unitaires respectives  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  définies par (2.56). Soit par ailleurs  $\varepsilon_{NN} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dX}\|}$  la dilatation dans la direction  $\vec{N}$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ , et soit  $\varepsilon_{nn} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dx}\|}$  la dilatation dans la direction  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant. La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant infiniment petite, les expressions (2.67) et (2.73) relatives à ces dilatations deviennent, compte tenu de (2.172),

$$\begin{cases} \varepsilon_{NN} + \frac{1}{2}\varepsilon_{NN}^2 &= \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} \\ \varepsilon_{nn} - \frac{1}{2}\varepsilon_{nn}^2 &= \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (2.184)$$

Ces grandeurs physiques sont donc du premier ordre en  $\|\mathbf{H}\|$ , et plus précisément ici en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ , de sorte qu'il reste simplement

$$\begin{cases} \varepsilon_{NN} &= \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} \\ \varepsilon_{nn} &= \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (2.185)$$

Considérant à présent la relation (2.61), nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + \varepsilon_{NN})(1 - \varepsilon_{nn}) \\ &= 1 + \varepsilon_{NN} - \varepsilon_{nn} - \varepsilon_{NN}\varepsilon_{nn} \end{aligned} \quad (2.186)$$

c'est-à-dire au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$\varepsilon_{NN} = \varepsilon_{nn} \quad (2.187)$$

La dilatation  $\varepsilon_{NN}$  dans la direction  $\vec{N}$ , variation relative de longueur du vecteur matériel  $\vec{dX}$  ramenée à la longueur  $\|\vec{dX}\|$  dans la configuration initiale  $\Omega_0$  (point de vue lagrangien), et la dilatation  $\varepsilon_{nn}$  dans la direction  $\vec{n}$ , variation relative de longueur de ce même vecteur ramenée à la longueur  $\|\vec{dx}\|$  dans la configuration déformée  $\Omega_t$  (point de vue eulérien), sont donc égales au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ . Autrement dit, à cet ordre le point de vue eulérien s'identifie au point de vue lagrangien, si bien que nous ne parlerons plus, dans le cas de transformations infiniment petites de milieux continus, que de la **dilatation**  $\varepsilon_{nn}$  **dans la direction**  $\vec{n}$  définie par

$$\varepsilon_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \quad (2.188)$$

#### Remarques

- Des relations (2.185) et (2.187), il découle qu'au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$  on a  $\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n}$ . Ceci n'est possible que si les directions  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  des vecteurs élémentaires  $\vec{dX}$  et  $\vec{dx}$  ne

différent entre elles que par un terme d'ordre supérieur ou égal à un en  $\|\mathbf{H}\|$ , c'est-à-dire si l'on a  $\|\vec{n} - \vec{N}\| \leq \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|)$ . Ce résultat peut être établi en considérant l'égalité (2.75). Il vient en effet, compte tenu de (2.157) et (2.172),

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\mathbf{F} \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}}} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}) \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot (\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \vec{N}}} \\
&= \frac{\vec{N} + \mathbf{H} \cdot \vec{N}}{\sqrt{1 + 2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}}} \\
&= (1 - \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) (\vec{N} + \mathbf{H} \cdot \vec{N}) \\
&= \vec{N} + \mathbf{H} \cdot \vec{N} - (\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}) \vec{N} - (\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}) \mathbf{H} \cdot \vec{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) (\vec{N} + \mathbf{H} \cdot \vec{N})
\end{aligned} \tag{2.189}$$

ce qui donne bien, puisque  $|\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}| \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \|\mathbf{H}\|$ ,

$$\|\vec{n} - \vec{N}\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|) \tag{2.190}$$

cette relation illustrant notamment le fait que les rotations sont infiniment petites :  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}$  avec  $\|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1$ .

2. Exprimée relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la relation (2.188) s'écrit

$$\varepsilon_{nm} = \varepsilon_{ij} n_i n_j \tag{2.191}$$


Choissant alors comme directions particulières celles associées aux vecteurs de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de ce repère, nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau 2.4.


TAB. 2.4 – Dilatations infinitésimales dans les directions du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$\vec{n}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\varepsilon_{nn}$	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{22}$	$\varepsilon_{33}$

Ces derniers montrent que les termes diagonaux du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspondent aux dilatations dans les trois directions du repère fixe de l'observateur.

### 2.4.4 Variations d'angle droit


 [pap244a.html](#) Soient à présent  $\vec{dX}^1$ ,  $\vec{dX}^2$ ,  $\vec{dx}^1 = \mathbf{F} \cdot \vec{dX}^1$  et  $\vec{dx}^2 = \mathbf{F} \cdot \vec{dX}^2$  les vecteurs élémentaires introduits dans la section 2.2.5 et représentés sur la figure 2.2 page 75, de directions unitaires respectives  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  définies par (2.81), et soit  $\theta_{NT}$  (resp<sup>t</sup>  $\theta_{nt}$ ) l'angle que font entre eux les vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$ ).

 [pap244b.html](#) Intéressons-nous tout d'abord à la distorsion  $\gamma_{NT} = \frac{\Pi}{2} - \theta_{nt}$  entre les directions ortho-gonales  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  ( $\theta_{NT} = \frac{\Pi}{2}$ ) au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ , ainsi qu'à la demi-distorsion  $\varepsilon_{NT} = \frac{1}{2}\gamma_{NT}$ . La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée infinitésimale, l'expression (2.88) relative à cette distorsion s'écrit, compte tenu de (2.172),

$$\begin{aligned}
 \sin(2\varepsilon_{NT}) &= \frac{2\vec{N} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{T}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}}} \\
 &= \frac{2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}}{\sqrt{\vec{N} \cdot (\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot (\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \vec{T}}} \\
 &= \frac{2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}}{\sqrt{1 + 2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}} \sqrt{1 + 2\vec{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}}} \\
 &= (1 - \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) (1 - \vec{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) \vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} \\
 &= (1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)) \vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} \\
 &= 2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)
 \end{aligned} \tag{2.192}$$

La distorsion  $\gamma_{NT}$  ainsi que la demi-distorsion  $\varepsilon_{NT}$  sont donc du premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ , si bien qu'il reste simplement

$$\boxed{\varepsilon_{NT} = \frac{1}{2}\gamma_{NT} = \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}} \tag{2.193}$$

 [pap244c.html](#) Considérant à présent la distorsion  $\gamma_{nt} = \theta_{NT} - \frac{\Pi}{2}$  entre les directions orthogonales  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  ( $\theta_{nt} = \frac{\Pi}{2}$ ) au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  et à l'instant  $t$  ainsi



que la demi-distorsion  $\varepsilon_{nt} = \frac{1}{2}\gamma_{nt}$ , nous avons, avec (2.91) et compte tenu de (2.172),

$$\begin{aligned}
\sin(2\varepsilon_{nt}) &= \frac{2\vec{n} \cdot \vec{E} \cdot \vec{t}}{\sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n}} \sqrt{\vec{t} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{t}}} \\
&= \frac{2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t}}{\sqrt{\vec{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} - 2\vec{\varepsilon}) \cdot \vec{n}} \sqrt{\vec{t} \cdot (\boldsymbol{\delta} - 2\vec{\varepsilon}) \cdot \vec{t}}} \\
&= \frac{2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t}}{\sqrt{1 - 2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n}} \sqrt{1 - 2\vec{t} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t}}} \\
&= (1 + \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) (1 + \vec{t} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) 2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t} \\
&= (1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)) 2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t} \\
&= 2\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)
\end{aligned} \tag{2.194}$$

Comme précédemment,  $\gamma_{nt}$  et  $\varepsilon_{nt}$  sont du premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ , de sorte qu'il vient

$$\boxed{\varepsilon_{nt} = \frac{1}{2}\gamma_{nt} = \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t}} \tag{2.195}$$

L'examen des relations (2.193) et (2.195) montre alors qu'au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$  la distorsion (opposé de la variation d'angle) entre deux directions orthogonales données est la même, que ces directions soient prises orthogonales dans la configuration de référence  $\Omega_0$  à l'instant  $t$  ( $\theta_{NT} = \frac{\pi}{2}$ , point de vue lagrangien) ou dans la configuration déformée  $\Omega_t$  à cet instant ( $\theta_{nt} = \frac{\pi}{2}$ , point de vue eulérien). Là encore à cet ordre il n'existe plus de différence entre points de vue lagrangien et eulérien, de sorte que nous parlerons simplement, dans le cas de transformations infinitésimales de milieux continus, de la **distorsion**  $\gamma_{nt}$  **entre les directions orthogonales**  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$ , ou de la **demi-distorsion**  $\varepsilon_{nt}$  définie par

$$\boxed{\varepsilon_{nt} = \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{t}} \tag{2.196}$$

## Remarques

1. Exprimée relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la relation (2.196) s'écrit

$$\varepsilon_{nt} = \varepsilon_{ij} n_i t_j \tag{2.197}$$

Prenons comme directions particulières deux à deux orthogonales celles fournies par tous les couples de vecteurs de base de ce repère. Nous obtenons alors les résultats regroupés dans le tableau 2.5.


TAB. 2.5 – Distorsions infinitésimales entre les directions du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 

$(\vec{n}, \vec{t})$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$
$\varepsilon_{nt}$	$\varepsilon_{12}$	$\varepsilon_{13}$	$\varepsilon_{23}$

Les termes non diagonaux du tenseur linéarisé des petites déformations  $\varepsilon$  fournissent donc les demi-distorsions entre les directions deux à deux orthogonales du repère fixe de l'observateur.

2. Considérons à présent, au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ , les directions particulières  $(\vec{n}, \vec{t})$  deux à deux orthogonales associées à tous les couples de vecteurs de base du repère principal de déformation  $R^\varepsilon = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ . Exprimant la relation (2.196) relativement à ce repère, on vérifie alors aisément que ces directions ne subissent aucune distorsion ( $\gamma_{nt} = 0$ ). Nous retrouvons ici, pour des transformations infiniment petites de milieu continus, le résultat plus général établi dans la section 2.2.3 pour des transformations finies (corollaire 3 page 85), et souligné par ailleurs dans la section 2.2.5 (remarque 3 page 92).

## 2.4.5 Variations de volume

 [pap245a.html](#) Soient  $dV$  et  $dv$  les volumes élémentaires considérés dans la section 2.2.6 et représentés sur la figure 1.3 page 37, et soit  $J$  le déterminant  $J(\vec{X}, t)$  de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  au point  $P_0$  et à l'instant  $t$ , jacobien de la transformation  $\mathcal{F}_t$  en ce point. La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée infinitésimale, on a, compte tenu de (2.17) et (2.156),

$$J = \det(\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}) \quad (2.198)$$

Exprimant les composantes du gradient  $\mathbf{H}$  des déplacements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} \\
&= (1 + H_{11}) \begin{vmatrix} 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} - H_{21} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} + H_{31} \begin{vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ 1 + H_{22} & H_{23} \end{vmatrix} \\
&= (1 + H_{11})(1 + H_{22} + H_{33} + \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|^2)) - H_{21}\mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|) + H_{31}\mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|) \\
&= 1 + H_{11} + H_{22} + H_{33} + \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|^2)
\end{aligned} \quad (2.199)$$

Il reste donc au premier ordre en  $\|\mathbf{H}\|$  la relation intrinsèque

$$J = 1 + \text{tr } \mathbf{H} \quad (2.200)$$

ou encore, puisque  $\text{tr } \mathbf{H} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ ,


$$J = 1 + \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.201)$$

Remarquant que l'on a, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{tr } \mathbf{H} \\ &= \partial_i u_i \\ &= \text{div}_x \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.202)$$

il vient aussi la relation intrinsèque

$$J = 1 + \text{div}_x \mathbf{u} \quad (2.203)$$

 [pap245b.html](#) La dilatation volumique  $\theta_v = \frac{dv-dV}{dV}$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$  a alors pour expression, compte tenu de (2.95) et des considérations précédentes,

$$\theta_v = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u} \quad (2.204)$$

Considérant à présent l'expression (2.97) de la dilatation volumique  $\theta_v = \frac{dv-dV}{dV}$  au point  $P_t$  de la configuration de référence  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , nous obtenons, avec (2.201),

$$\begin{aligned} \theta_v &= 1 - J^{-1} \\ &= 1 - (1 + \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \\ &= 1 - (1 - \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \\ &= \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \end{aligned} \quad (2.205)$$

c'est-à-dire au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$\theta_v = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u} \quad (2.206)$$

Comme dans les sections précédentes, le point de vue eulérien s'identifie à cet ordre au point de vue lagrangien et nous ne parlerons plus, dans le cas de petites transformations de milieux continus, que de la **dilatation volumique**  $\theta$  définie par

$$\theta = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u} \quad (2.207)$$


## Remarques

1. Lorsqu'on l'exprime relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la relation (2.207) s'écrit

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 \quad (2.208)$$

2. Il découle de (2.207) que l'incompressibilité locale traduite par  $J = 1$  (point de vue lagrangien) ou  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$  (point de vue eulérien) dans le cas général de transformations finies se caractérise également, dans le cas de transformations infinitésimales, par  $\operatorname{div}_x \mathbf{u} = 0$ . Aussi, la similitude de ces deux dernières relations ne devra pas faire oublier au lecteur leur différence de portée.

## 2.4.6 Variations d'aire

 [pap246.html](#) Reconsidérons ici les surfaces élémentaires  $\overrightarrow{dS}$  et  $\overrightarrow{ds}$  introduites dans la section 2.2.7 et représentées sur la figure 1.5 page 51, de normales  $\overrightarrow{N}$  et  $\overrightarrow{n}$  définies par (2.106), et intéressons-nous tout d'abord à la dilatation surfacique  $\theta_N = (\|\overrightarrow{ds}\| - \|\overrightarrow{dS}\|)/\|\overrightarrow{dS}\|$  (point de vue lagrangien) dans le plan de normale  $\overrightarrow{N}$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  et à l'instant  $t$ . La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée infiniment petite, il vient, compte tenu de (2.109), (2.172) ainsi que de (2.201),

$$\begin{aligned}
\theta_N &= J \sqrt{\overrightarrow{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \overrightarrow{N}} - 1 \\
&= (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{\overrightarrow{N} \cdot (\boldsymbol{\delta} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \overrightarrow{N}} - 1 \\
&= (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{1 - 2\overrightarrow{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{N}} - 1 \\
&= (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) (1 - \overrightarrow{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) - 1 \\
&= (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \overrightarrow{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) - 1 \\
&= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \overrightarrow{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)
\end{aligned} \tag{2.209}$$

c'est-à-dire au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$\boxed{\theta_N = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \overrightarrow{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{N}} \tag{2.210}$$

Considérant à présent la dilatation surfacique  $\theta_n = (\|\overrightarrow{ds}\| - \|\overrightarrow{dS}\|)/\|\overrightarrow{ds}\|$  (point de vue eulérien) dans le plan de normale  $\overrightarrow{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , on a, compte tenu de (2.112), (2.172) et (2.201),

$$\begin{aligned}
\theta_n &= 1 - J^{-1} \sqrt{\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{B} \cdot \overrightarrow{n}} \\
&= 1 - (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \sqrt{\overrightarrow{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \overrightarrow{n}} \\
&= 1 - (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \sqrt{1 + 2\overrightarrow{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{n}} \\
&= 1 - (1 - \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) (1 + \overrightarrow{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{n} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) \\
&= 1 - (1 - \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \overrightarrow{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{n} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) \\
&= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \overrightarrow{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{n} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)
\end{aligned} \tag{2.211}$$

de sorte qu'il reste au premier ordre en  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$\theta_n = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \quad (2.212)$$

Les relations (2.185) et (2.187) montrent alors qu'à cet ordre les points de vue eulérien et lagrangien s'identifient à nouveau, si bien que nous parlerons simplement, dans le cas de petites transformations de milieux continus, de la **dilatation surfacique**  $\theta_n$  dans le plan de normale  $\vec{n}$  au point matériel et à l'instant considérés définie par (2.212).

### Remarques

1. De (2.113), on tire, compte tenu de (2.158) et (2.172),

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{{}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{N}}} \\ &= \frac{{}^t(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}) \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot (\boldsymbol{\delta} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \vec{N}}} \\ &= \frac{\vec{N} - {}^t\mathbf{H} \cdot \vec{N}}{\sqrt{1 - 2\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}}} \\ &= (1 + \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)) (\vec{N} - {}^t\mathbf{H} \cdot \vec{N}) \\ &= \vec{N} - {}^t\mathbf{H} \cdot \vec{N} + (\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}) \vec{N} - (\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}) {}^t\mathbf{H} \cdot \vec{N} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) (\vec{N} - {}^t\mathbf{H} \cdot \vec{N}) \end{aligned} \quad (2.213)$$

ce qui donne, puisque  $|\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}| \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \|\mathbf{H}\|$ ,

$$\|\vec{n} - \vec{N}\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{H}\|) \quad (2.214)$$

Cette relation, que l'on peut comparer sans pour autant l'identifier à la relation (2.190), illustre notamment le fait que les rotations restent infiniment petites :  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}$  avec  $\|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1$ .

2. La relation (2.212) devient, lorsqu'on l'exprime relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\theta_n = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (2.215)$$

TAB. 2.6 – Dilatations surfaciques infinitésimales dans les plans normaux aux directions du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$\vec{n}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\theta_n$	$\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$

Choissant alors comme directions particulières celles associées aux vecteurs de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de ce repère, nous obtenons les résultats regroupés dans le tableau 2.6.

3. Plus généralement, de (2.188), (2.207) et (2.212), on tire aisément la relation intéressante


$$\forall \vec{n} \quad \theta_n + \varepsilon_{nn} = \theta \quad (2.216)$$

dont le lecteur ne manquera pas d'apprécier la signification physique, et que l'on peut traduire en langue naturelle par :


“Quelle que soit la direction au point matériel et à l'instant considérés, la somme de la dilatation linéique dans cette direction et de la dilatation surfacique dans le plan qui lui est orthogonal est égale à la dilatation volumique”

## 2.4.7 Déviateur des déformations

Donnons tout d'abord la

**Définition 13 (Déviateur des déformations)**  [def13p.html](#) Soit  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$  le tenseur linéarisé des petites déformations au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , et soit  $\theta(\vec{x}, t)$  la dilatation volumique en ce point et à cet instant. On appelle déviateur des déformations le tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{e}(\vec{x}, t)$  défini par

$$\mathbf{e}(\vec{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t) - \frac{1}{3}\theta(\vec{x}, t) \boldsymbol{\delta} \quad (2.217)$$

 [pap247.html](#) On a donc, si l'on omet les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{e} \quad (2.218)$$

Le tenseur isotrope  $\frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta}$  est appelé **partie isotrope**, ou encore partie sphérique, de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . La relation (2.188) montre que les dilatations  $\varepsilon_{nn}$  qui lui correspondent sont indépendantes de la direction  $\vec{n}$  choisie (isotropie) et égales à  $\frac{\theta}{3}$ , c'est-à-dire au tiers de la dilatation volumique. En effet, on a,  $\forall \vec{n}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \left( \frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta} \right) \cdot \vec{n} &= \frac{\theta}{3} \vec{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\theta}{3} \|\vec{n}\|^2 \\ &= \frac{\theta}{3} \end{aligned} \quad (2.219)$$

Pour une telle déformation isotrope la transformée d'une sphère matérielle élémentaire reste une sphère, ce qui justifie l'appellation de "partie sphérique" qui lui est donnée. De façon plus générale, à la partie isotrope de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est associé un changement de volume (excepté lorsque  $\theta = 0$ ) sans changement de forme.

Le déviateur des déformations  $\mathbf{e}$  est aussi appelé **partie déviatorique** de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et l'on a, par construction et compte tenu de (2.207),


$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{e} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \operatorname{tr} \left( \frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta} \right) \\ &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\delta} \\ &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.220}$$


À la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspond donc un changement de forme (excepté lorsque  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ) sans changement de volume.

**Remarque** Si  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , le tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est réduit à sa partie sphérique  $\frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta}$ , et l'état de déformation qui lui correspond est dit purement isotrope. Lorsque  $\theta = 0$ , on a  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}$ , et l'état de déformation est alors qualifié de purement déviatorique.

## 2.4.8 Représentations géométriques d'un état de déformation plane

On donne tout d'abord la

**Définition 14 (Déformations planes)**  [def14p.html](#) Soit  $\vec{d}$  une direction quelconque mais fixée, et soit  $\mathbf{u}$  le champ des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$ . On dit que  $\mathcal{M}$  est soumis à un état de déformation plane par rapport au plan orthogonal à  $\vec{d}$ , ou plan de déformation, lorsque qu'en tout point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à tout instant  $t$  le déplacement  $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$  est indépendant de  $\vec{x} \cdot \vec{d}$  et tel que  $\mathbf{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{d} = 0$ .

 [pap248a.html](#) Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant soumis à un état de déformation plane, dans toute cette section et par souci de simplicité, nous supposons le repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  choisi de façon telle que  $\vec{e}_3$  coïncide avec la direction  $\vec{d}$  orthogonale au plan de déformation. De la définition précédente, il découle alors que les composantes du champ des déplacements relativement à ce repère sont de la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, t) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.221}$$


La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant par ailleurs supposée infinitésimale, soient  $t$  et  $\vec{x} \in \Omega_t$  quelconques mais fixés, et soit  $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$  le tenseur linéarisé des petites déformations au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à cet instant. Omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité, nous avons, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (2.166) et (2.221),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

Un tel tenseur est appelé **tenseur de déformation plane** et nous écrivons simplement, en ne conservant que ses composantes non nulles,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (2.223)$$

Soient alors  $\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_2$  les directions principales de ce tenseur, vecteurs orthogonaux et unitaires du plan de déformation engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , et soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les valeurs principales associées. Sans perte de généralité nous supposons que  $\vec{i}_2$  est directement orthogonal à  $\vec{i}_1$  dans ce plan et que  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Notons qu'alors le repère principal de déformation  $R^\varepsilon$  au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  et à l'instant  $t$  est défini par  $R^\varepsilon = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{e}_3)$ , les déformations principales associées à chacune de ces directions étant  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et 0.

 [pap248b.html](#) Soit à présent  $\vec{n}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé du plan de déformation engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , et soit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{n}$  dans ce plan. Soient par ailleurs  $\varepsilon_{nn}$  la dilatation dans la direction  $\vec{n}$  et  $\varepsilon_{nt}$  la demi-distorsion entre les directions  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$ .

On se propose ici de construire une représentation de l'état de déformation plane au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  en considérant le lieu géométrique des points  $M_n$  définis par

$$\vec{P}_t M_n = \varepsilon_{nn} \vec{n} + \varepsilon_{nt} \vec{t} \quad (2.224)$$

lorsque le vecteur  $\vec{n}$  décrit l'ensemble des directions du plan de déformation (la figure 2.4 illustre cette construction).

Plus précisément, nous chercherons à déterminer le lieu géométrique des points  $M_n$  définis par (2.224) relativement à deux repères orthonormés directs du plan de déformation :

1. le repère  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  lié aux vecteurs “tournants”  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$
2. le repère  $R^p = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$  associé aux directions principales  $\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_2$



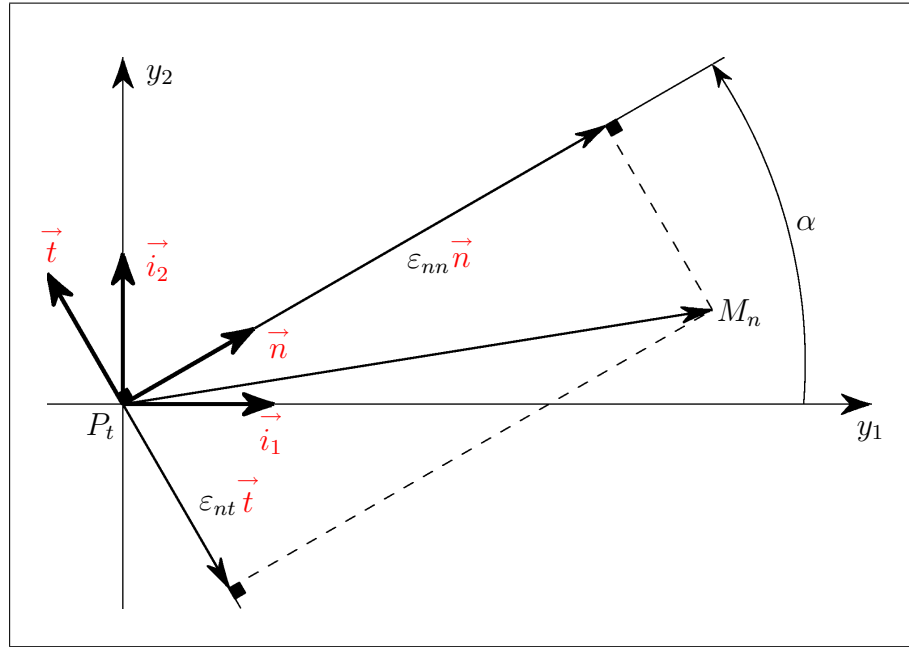



FIG. 2.4 – Représentation géométrique d'un état de déformation plane

### 2.4.8.1 Cercle de Mohr des déformations planes

 [pap2481.html](#) La relation (2.224) montre que les coordonnées du point  $M_n$  relativement au repère  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  ne sont autres que  $\varepsilon_{nn}$  et  $\varepsilon_{nt}$ . Il n'est toutefois nul besoin de se placer dans ce repère pour les évaluer puisque ces grandeurs physiques définies par les relations (2.188) et (2.196) sont deux invariants scalaires. Choissant alors, dans un souci de commodité, de conduire les calculs relativement au repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ , on a tout d'abord, avec les notations de la figure 2.4 et relativement à ce repère,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

Nous obtenons alors, compte tenu des définitions (2.188) et (2.196) de  $\varepsilon_{nn}$  et  $\varepsilon_{nt}$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon_{nn} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{nt} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (2.226)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \varepsilon_{nn} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos(-2\alpha) \\ \varepsilon_{nt} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases} \quad (2.227)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions du plan de déformation lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[0, 2\Pi[$ , les relations (2.227) montrent que le lieu géométrique des points  $M_n$  relativement au repère "tournant"  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  n'est autre que le cercle ayant pour centre le point  $\Omega$  de coordonnées  $(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, 0)$  et pour rayon  $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$ . Ce cercle, représenté sur la figure 2.5, est appelé **cercle de Mohr des déformations planes**. Son observation suggère les remarques suivantes.

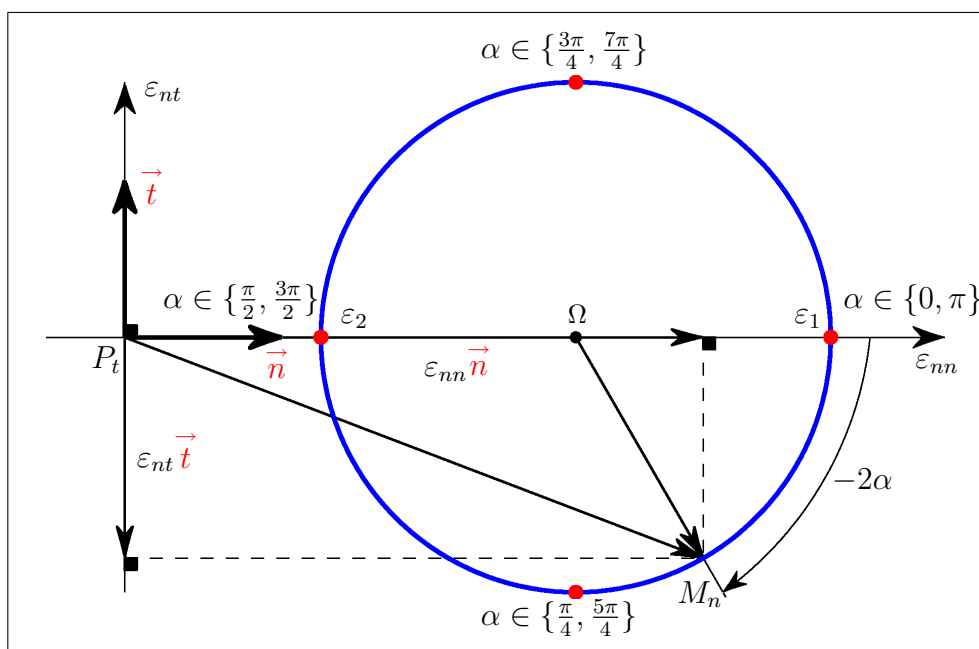



FIG. 2.5 – Cercle de Mohr des déformations planes

## Remarques

1. Lorsque le vecteur  $\vec{n}$  tourne d'un angle  $\alpha$  dans le plan de déformation, le rayon vecteur  $\vec{\Omega M}_n$  du cercle de Mohr tourne d'un angle  $-2\alpha$  (figure 2.5).
2. La dilatation  $\varepsilon_{nn}$  est maximale (resp<sup>t</sup> minimale) lorsque  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \Pi$  (resp<sup>t</sup> lorsque  $\alpha = \frac{\Pi}{2}$  ou  $\alpha = \frac{3\Pi}{2}$ ), c'est-à-dire lorsque  $\vec{n} = \pm \vec{i}_1$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n} = \pm \vec{i}_2$ ). Autrement dit, la dilatation  $\varepsilon_{nn}$  est extrémale lorsque  $\vec{n}$  est colinéaire aux directions principales de la déformation plane, les extremums n'étant autres que les déformations principales  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . La distorsion  $\varepsilon_{nt}$  est alors nulle, et l'on retrouve le fait qu'il n'y a pas de variation d'angle entre ces directions orthogonales (remarque 2 page 112).
3. La demi-distorsion  $\varepsilon_{nt}$  est minimale (resp<sup>t</sup> maximale) si  $\alpha = \frac{\Pi}{4}$  ou  $\alpha = \frac{5\Pi}{4}$  (resp<sup>t</sup> si  $\alpha = \frac{3\Pi}{4}$  ou  $\alpha = \frac{7\Pi}{4}$ ), c'est-à-dire si  $\vec{n}$  est colinéaire à la bissectrice des directions principales de déformation  $\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_2$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{i}_2$  et  $-\vec{i}_1$ ). Ces deux extremums ont même valeur absolue, égale au rayon du cercle de Mohr, c'est-à-dire à la demi-différence des déformations principales. En d'autres termes, les distorsions extrémales ont même valeur absolue, égale à la différence des déformations principales. Les dilatations  $\varepsilon_{nn}$  sont alors identiques et égales à la moyenne  $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$  des déformations principales.
4. Pour un tenseur de déformation plane isotrope ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ), le cercle de Mohr est réduit au point de coordonnées  $(\varepsilon_1, 0)$ .
5. Si le tenseur de déformation plane est purement déviatorique ( $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ ), le cercle de Mohr a pour centre l'origine du repère  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$ . Dans ce cas, les extremums des demi-distorsions coïncident avec ceux des dilatations, c'est-à-dire avec les déformations principales  $\pm\varepsilon_1$ .

### 2.4.8.2 Ellipse de Lamé des déformations planes

 [pap2482.html](#) Soient  $y_1$  et  $y_2$  les coordonnées du point  $M_n$  relativement au repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ . Des expressions (2.225) donnant les composantes de  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  relativement à ce repère ainsi que des relations (2.226), on tire

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha \cos \alpha \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.228)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1 = \varepsilon_1 \cos \alpha \\ y_2 = \varepsilon_2 \sin \alpha \end{cases} \quad (2.229)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions du plan de déformation lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[0, 2\Pi[$ , le lieu géométrique des points  $M_n$  relativement au repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$

est l'ellipse centrée sur l'origine de ce repère, de demi grand axe de longueur  $|\varepsilon_1|$  colinéaire à  $\vec{i}_1$  et de demi petit axe de longueur  $|\varepsilon_2|$  colinéaire à  $\vec{i}_2$ . Cette ellipse, appelée **ellipse de Lamé des déformations planes**, est représentée sur la figure 2.6. Si  $\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0$ , son équation cartésienne est

$$\frac{y_1^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{y_2^2}{\varepsilon_2^2} = 1 \quad (2.230)$$

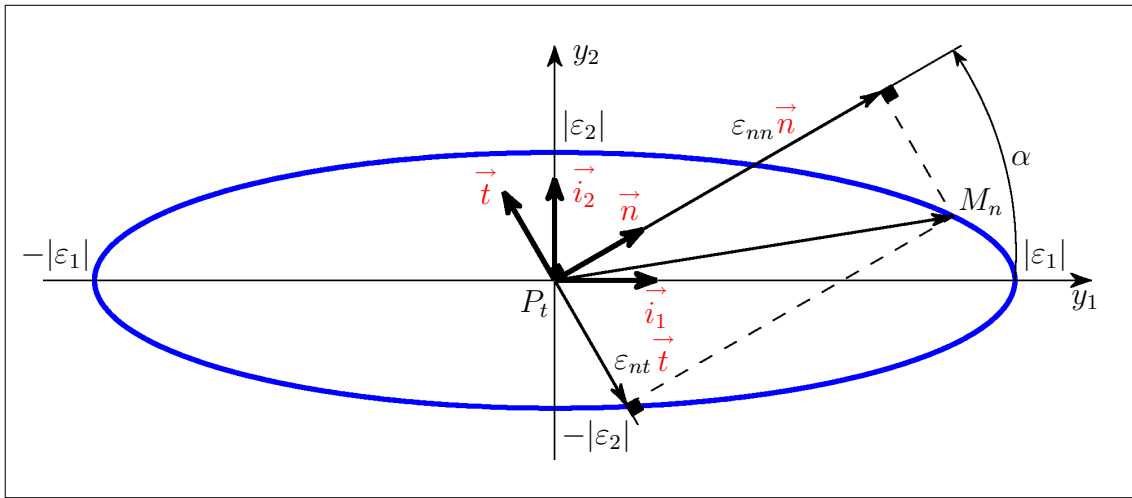



FIG. 2.6 – Ellipse de Lamé des déformations planes

Enfin, une autre illustration des deux modes de représentation géométrique d'un état de déformation plane décrits dans cette section est fournie par la figure 2.7.

### 2.4.9 Équations de compatibilité des petites déformations

 [pap249.html](#) Dans toute cette section et par souci de simplicité, nous omettrons les variables d'espace et de temps. Par ailleurs, les différents champs (vectoriels ou tensoriels) considérés seront supposés suffisamment réguliers pour que les opérations successives de dérivation que nous aurons à effectuer aient un sens.

Soit  $\Omega_t$  la configuration actuelle du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, et soit  $\mathbf{u} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  le champ des déplacements relatif à cet instant. La transformation  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{M}$  étant supposée infinitésimale, on peut alors en déduire, en s'appuyant sur les développements des sections précédentes, le champ tensoriel  $\boldsymbol{\varepsilon} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  des petites déformations.

Inversement, soit  $\boldsymbol{\varepsilon} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  un champ tensoriel symétrique du second ordre défini sur  $\Omega_t$ . Existe-t-il alors nécessairement un champ vectoriel  $\mathbf{u} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  dont  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puisse se déduire, c'est-à-dire tel que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + {}^t\mathbf{H})$  avec  $\mathbf{H} = \mathbf{grad}_x \mathbf{u}$ . La réponse à cette question est négative,

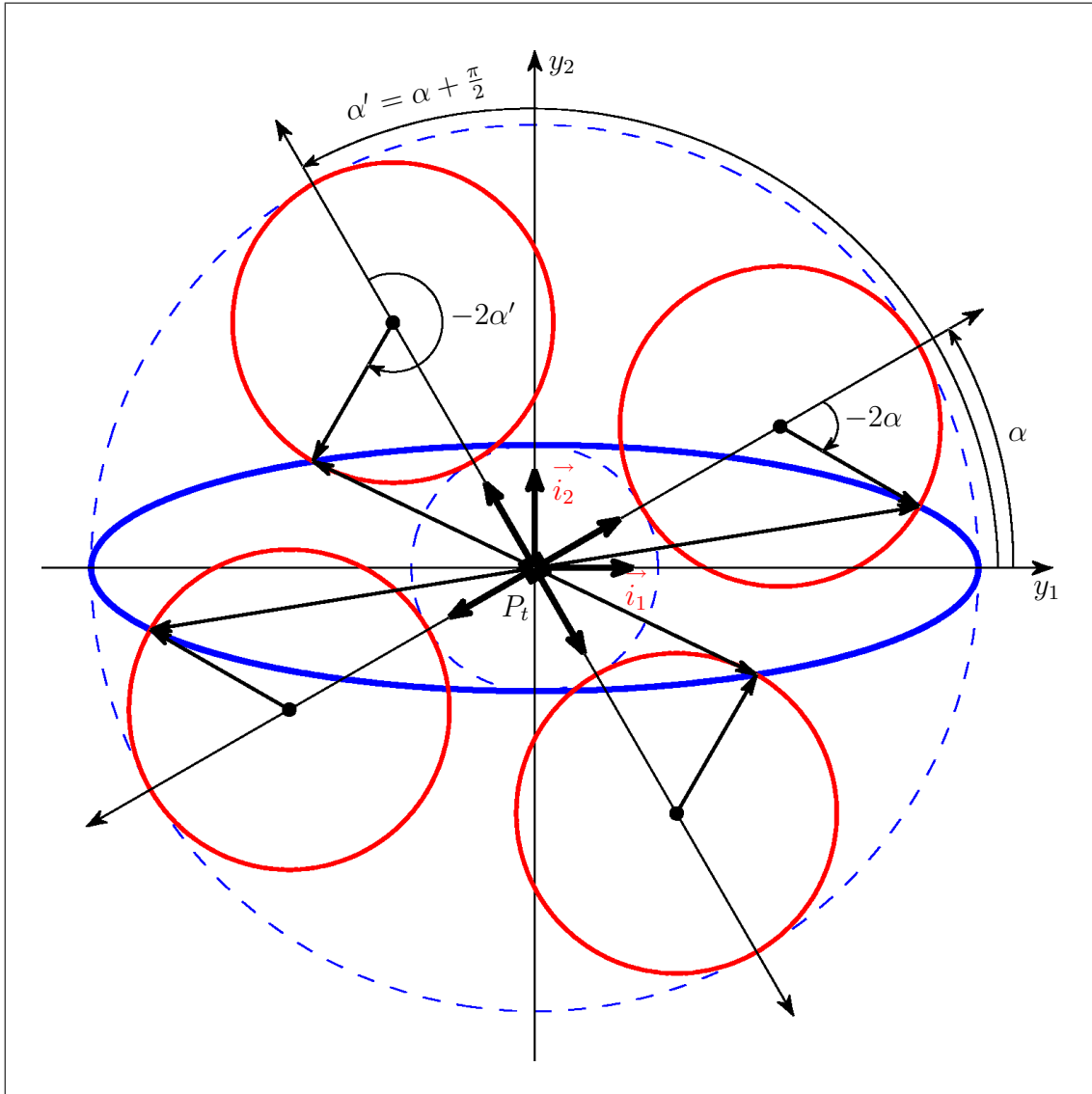


FIG. 2.7 – Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes

les composantes de  $\varepsilon$  devant pour cela vérifier certaines conditions appelées **équations de compatibilité des petites déformations**, que nous nous proposons ici d'établir en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

De  $\vec{du} = \mathbf{H} \cdot \vec{dx}$  et de (2.163), on tire tout d'abord

$$\vec{du} = (\varepsilon + \omega) \cdot \vec{dx} \quad (2.231)$$

Les composantes de  $\mathbf{u}$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont alors solutions des formes différentielles

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.232)$$

Les conditions d'intégrabilité de ces formes s'écrivent

$$\partial_k(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \partial_j(\varepsilon_{ik} + \omega_{ik}) \quad \forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \quad (2.233)$$

Il vient alors, avec (2.166) et (2.167),

$$\begin{aligned} \partial_k \omega_{ij} &= \partial_j \varepsilon_{ik} + \partial_j \omega_{ik} - \partial_k \varepsilon_{ij} \\ &= \partial_j \varepsilon_{ik} + \partial_j \left[ \frac{1}{2} (\partial_k u_i - \partial_i u_k) \right] - \partial_k \left[ \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \right] \\ &= \partial_j \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} [\partial_{jk}^2 u_i - \partial_{ji}^2 u_k - \partial_{kj}^2 u_i - \partial_{ki}^2 u_j] \\ &= \partial_j \varepsilon_{ik} - \frac{1}{2} [\partial_{ij}^2 u_k + \partial_{ik}^2 u_j] \\ &= \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \left[ \frac{1}{2} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) \right] \quad \forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \end{aligned} \quad (2.234)$$

c'est-à-dire

$$\partial_k \omega_{ij} = \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{kj} \quad \forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \quad (2.235)$$

Considérons à présent les formes différentielles

$$d\omega_{ij} = \partial_k \omega_{ij} dx_k \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (2.236)$$

Leurs conditions d'intégrabilité s'écrivent

$$\partial_l(\partial_k \omega_{ij}) = \partial_k(\partial_l \omega_{ij}) \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4 \quad (2.237)$$

il vient, compte tenu de (2.235),

$$\partial_l(\partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{kj}) = \partial_k(\partial_j \varepsilon_{il} - \partial_i \varepsilon_{lj}) \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4 \quad (2.238)$$

c'est-à-dire, en tirant parti de la symétrie de  $\varepsilon$ ,

$$\partial_{lj}^2 \varepsilon_{ki} + \partial_{ki}^2 \varepsilon_{lj} = \partial_{kj}^2 \varepsilon_{li} + \partial_{li}^2 \varepsilon_{kj} \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4 \quad (2.239)$$

Ces équations sont vérifiées trivialement si  $i = j$  ou si  $k = l$ . Elles sont par ailleurs invariantes par permutation des indices  $i$  et  $j$  ou  $k$  et  $l$ , ainsi que par permutation des couples d'indices  $(i, j)$  et  $(k, l)$  si  $\varepsilon$  est suffisamment régulier (plus précisément si  $\varepsilon$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega_t$ ), de sorte qu'il ne reste finalement que les six équations indépendantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{12}^2 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial_{22}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{11}^2 \varepsilon_{22}) \\ \partial_{23}^2 \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} (\partial_{33}^2 \varepsilon_{22} + \partial_{22}^2 \varepsilon_{33}) \\ \partial_{31}^2 \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} (\partial_{11}^2 \varepsilon_{33} + \partial_{33}^2 \varepsilon_{11}) \\ \partial_{23}^2 \varepsilon_{11} = \partial_1 (-\partial_1 \varepsilon_{23} + \partial_2 \varepsilon_{31} + \partial_3 \varepsilon_{12}) \\ \partial_{31}^2 \varepsilon_{22} = \partial_2 (-\partial_2 \varepsilon_{31} + \partial_3 \varepsilon_{12} + \partial_1 \varepsilon_{23}) \\ \partial_{12}^2 \varepsilon_{33} = \partial_3 (-\partial_3 \varepsilon_{12} + \partial_1 \varepsilon_{23} + \partial_2 \varepsilon_{31}) \end{array} \right. \quad (2.240)$$

appelées **équations de compatibilité des petites déformations**.

**Remarques**

1. Si  $\Omega_t$  est simplement connexe, les équations de compatibilité (2.240) sont nécessaires et suffisantes pour qu'un champ tensoriel symétrique du second ordre défini sur  $\Omega_t$  soit la partie symétrique du gradient  $\mathbf{H}$  d'un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  de même domaine de définition.
2. Lorsque le milieu continu  $\mathcal{M}$  est soumis à un état de déformation plane par rapport au plan orthogonal à  $\vec{e}_3$  ( $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{12}$  indépendants de  $x_3$ ), les équations de compatibilité (2.240) se réduisent à l'unique équation

$$\partial_{12}^2 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial_{22}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{11}^2 \varepsilon_{22}) \quad (2.241)$$

## 2.5 Récapitulatif des formules essentielles

### 2.5.1 Tenseurs des déformations

$$\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}.\mathbf{F} \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta})$$

$$\vec{dx}^1.\vec{dx}^2 = \vec{dX}^1.\mathbf{C}.\vec{dX}^2 \quad \vec{dx}^1.\vec{dx}^2 - \vec{dX}^1.\vec{dX}^2 = \vec{dX}^1.2\mathbf{L}.\vec{dX}^2$$

$$\mathbf{H}^L = \text{grad}_X \mathbf{u} \quad \mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L$$

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L.\mathbf{H}^L \\ \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L.\mathbf{H}^L) \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}.\mathbf{F} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}^{-1})$$

$$\vec{dX}^1.\vec{dX}^2 = \vec{dx}^1.\mathbf{B}^{-1}.\vec{dx}^2 \quad \vec{dx}^1.\vec{dx}^2 - \vec{dX}^1.\vec{dX}^2 = \vec{dx}^1.2\mathbf{E}.\vec{dx}^2$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + \mathbf{H}^L.{}^t\mathbf{H}^L$$

$$\mathbf{H}^E = \text{grad}_x \mathbf{u} \quad \mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E + {}^t\mathbf{H}^E.\mathbf{H}^E \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^E + {}^t\mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E.\mathbf{H}^E) \end{cases}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}^E - {}^t\mathbf{H}^E + \mathbf{H}^E.{}^t\mathbf{H}^E$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U} = \mathbf{V}.\mathbf{R} \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}.\mathbf{U}.\mathbf{R} \iff \mathbf{U} = \mathbf{R}.\mathbf{V}.\mathbf{R}$$

$$\varepsilon_{NN} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dX}\|}$$

$$\varepsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N}.\mathbf{C}.\vec{N}} - 1$$

$$\varepsilon_{NN} + \frac{1}{2}\varepsilon_{NN}^2 = \vec{N}.\mathbf{L}.\vec{N}$$

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\|\vec{dx}\| - \|\vec{dX}\|}{\|\vec{dx}\|}$$

$$\varepsilon_{nn} = 1 - \sqrt{\vec{n}.\mathbf{B}^{-1}.\vec{n}}$$

$$\varepsilon_{nn} - \frac{1}{2}\varepsilon_{nn}^2 = \vec{n}.\mathbf{E}.\vec{n}$$

$$\varepsilon_{NT} = \frac{1}{2}\gamma_{NT} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi}{2} - \theta_{nt}\right)$$

$$\sin(\gamma_{NT}) = \sin(2\varepsilon_{NT}) = \frac{\vec{N}.2\mathbf{L}.\vec{T}}{\sqrt{\vec{N}.\mathbf{C}.\vec{N}}\sqrt{\vec{T}.\mathbf{C}.\vec{T}}}$$

$$\varepsilon_{nt} = \frac{1}{2}\gamma_{nt} = \frac{1}{2}\left(\theta_{NT} - \frac{\Pi}{2}\right)$$

$$\sin(\gamma_{nt}) = \sin(2\varepsilon_{nt}) = \frac{\vec{n}.2\mathbf{E}.\vec{t}}{\sqrt{\vec{n}.\mathbf{B}^{-1}.\vec{n}}\sqrt{\vec{t}.\mathbf{B}^{-1}.\vec{t}}}$$

$$\theta_v = \frac{dv - dV}{dV} = J - 1$$

$$\theta_v = \frac{dv - dV}{dv} = 1 - J^{-1}$$



$$\vec{ds} = J {}^t \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{dS}$$

$$\vec{dS} = J^{-1} {}^t \mathbf{F} \cdot \vec{ds}$$

$$\theta_N = \frac{\|\vec{ds}\| - \|\vec{dS}\|}{\|\vec{dS}\|} = J \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{N}} - 1$$

$$\theta_n = \frac{\|\vec{ds}\| - \|\vec{dS}\|}{\|\vec{ds}\|} = 1 - J^{-1} \sqrt{\vec{n} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{n}}$$

### 2.5.2 Dérivées matérielles des tenseurs de déformation

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + {}^t \mathbf{G})$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - {}^t \mathbf{G})$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{v}$$

$$\mathbf{W} \cdot \vec{z} = \vec{\omega} \wedge \vec{z} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^3$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{C}}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{L}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \quad \dot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$$

$$\dot{\mathbf{C}} = 2 {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}) = {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{C}}^{-1} = -2 \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot {}^t \mathbf{G}$$

$$\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot {}^t \mathbf{G}$$

$$\dot{\mathbf{B}}^{-1} = -{}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{G}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} - {}^t \mathbf{G} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \cdot {}^t \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot {}^t \mathbf{R}$$

### 2.5.3 Cas des transformations infinitésimales

$$\mathbf{H}^L = \mathbf{H}^E = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + {}^t \mathbf{H})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - {}^t \mathbf{H})$$

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \mathbf{B} = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - 2\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{L} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \vec{z} = \vec{\omega} \wedge \vec{z} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^3$$

$$\varepsilon_{NN} = \varepsilon_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n}$$

$$\varepsilon_{NT} = \varepsilon_{nt} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{t}$$

$$\theta_V = \theta_v = \theta = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u}$$

$$\theta_N = \theta_n = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{12}^2 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_{22}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{11}^2 \varepsilon_{22}) \\ \partial_{23}^2 \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\partial_{33}^2 \varepsilon_{22} + \partial_{22}^2 \varepsilon_{33}) \\ \partial_{31}^2 \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\partial_{11}^2 \varepsilon_{33} + \partial_{33}^2 \varepsilon_{11}) \\ \partial_{23}^2 \varepsilon_{11} = \partial_1(-\partial_1 \varepsilon_{23} + \partial_2 \varepsilon_{31} + \partial_3 \varepsilon_{12}) \\ \partial_{31}^2 \varepsilon_{22} = \partial_2(-\partial_2 \varepsilon_{31} + \partial_3 \varepsilon_{12} + \partial_1 \varepsilon_{23}) \\ \partial_{12}^2 \varepsilon_{33} = \partial_3(-\partial_3 \varepsilon_{12} + \partial_1 \varepsilon_{23} + \partial_2 \varepsilon_{31}) \end{array} \right.$$

$$\partial_{12}^2 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_{22}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{11}^2 \varepsilon_{22})$$

## 2.6 Exercices et problèmes

### 2.6.1 Énoncés des exercices

#### E2.1 Transformations linéaires planes

Déterminer, pour chacune des transformations linéaires planes décrites par les figures 2.8 (a) à 2.8 (d),

1. le champ des déplacements  $\mathbf{u}$
2. le gradient lagrangien des déplacements  $\mathbf{H}^L$
3. dans le cas de transformations finies,
  - (a) le tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{L}$
  - (b) la dilatation surfacique  $\theta_N$  dans le plan de la transformation
4. dans le cas de transformations infinitésimales,
  - (a) le tenseur linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$  des petites déformations
  - (b) la petite rotation  $\tilde{\omega}$
  - (c) la décomposition de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en parties isotrope et déviatorique
  - (d) les directions principales de déformation et les déformations principales associées
  - (e) le cercle de Mohr des déformations planes

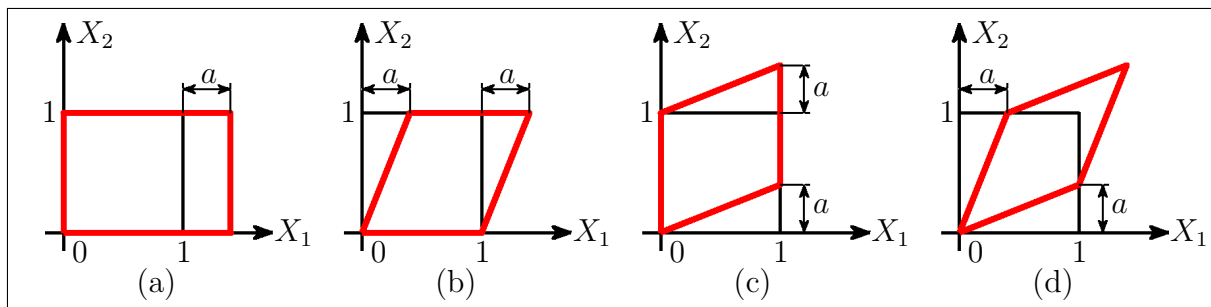


FIG. 2.8 – Transformations linéaires planes

#### E2.2 Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques

La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée infinitésimale, retrouver, en fonction des composantes  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  (resp<sup>t</sup>  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_\varphi$ ) du déplacement en coordonnées cylindriques (resp<sup>t</sup> sphériques), l'expression des composantes du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  relativement à ce système de coordonnées.

### E2.3 Déformation d'un tube épais

Le tube épais de rayon intérieur  $R_0$ , de rayon extérieur  $R_1$  et de hauteur  $H$  représenté sur la figure 2.9 est soumis à un système d'actions mécaniques extérieures induisant la transformation

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta \\ z = Z + a \ln \frac{R}{R_0} \end{cases}$$

où  $(R, \Theta, Z)$  (resp<sup>t</sup>  $(r, \theta, z)$ ) sont les coordonnées cylindriques d'une particule quelconque mais fixée avant (resp<sup>t</sup> après) transformation et où  $a$  est une constante positive telle que  $\frac{a}{R_0} \ll 1$ .

1. Donner, en coordonnées cylindriques, l'expression des composantes du tenseur linéarisé des petites déformations  $\varepsilon$  (on justifiera le caractère infinitésimal de la transformation).
2. Déterminer les directions principales de déformation ainsi que les déformations principales associées.

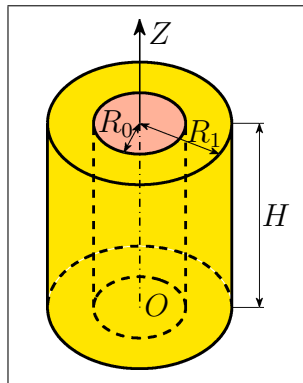


FIG. 2.9 – Déformation d'un tube épais

### E2.4 Quadriques directrices des dilatations

La transformation  $\mathcal{F}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée infinitésimale, on se propose ici de construire une représentation de l'état de dilatation au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  en considérant le lieu géométrique des points  $M_n$  définis par  $\vec{P_t M_n} = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_{nn}|}} \vec{n}$  lorsque le vecteur  $\vec{n}$  décrit l'ensemble des directions de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ .

1. Justifier le titre de l'exercice en déterminant le lieu des points  $M_n$  précédemment définis.
2. Tracer, sur une même figure, les quadriques directrices des dilatations correspondant à

chacun des états de déformation plane suivants (valeurs données en  $\mu\text{def}$ ).

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \\ \text{(c)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(d)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### E2.5 Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes

Pour chacun des états de déformation plane suivants (valeurs données en  $\mu\text{def}$ ) tracer, sur une même figure, l'ellipse de Lamé et quelques cercles de Mohr.

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & -45 \end{bmatrix}$$

### E2.6 Effet transversal dans une jauge d'extensométrie

La figure 2.10 représente le schéma d'une jauge électrique d'extensométrie. Celle-ci permet, par mesure de la variation de résistance électrique entre les points  $A$  et  $B$ , d'évaluer la dilatation  $\varepsilon_{11}$  dans la direction  $Ox_1$  des brins de fils la constituant lorsqu'elle est collée à la surface d'une structure.

On admettra que la résistance électrique  $R$  entre les points  $A$  et  $B$  est donnée par  $R = R_0(1 + K \frac{l-l_0}{l_0})$  où  $l$  représente la longueur du fil entre les points  $A$  et  $B$ , où  $R_0$  et  $l_0$  désignent respectivement la résistance et la longueur entre ces deux points du fil non déformé et où  $K$  est une constante positive appelée facteur de jauge.

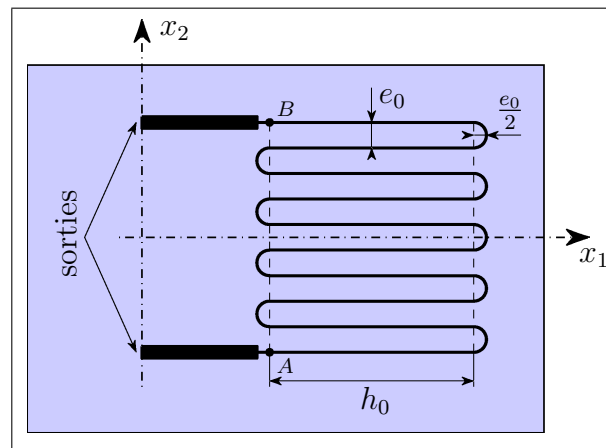


FIG. 2.10 – Jauge électrique d'extensométrie

1. Soit  $2n$  le nombre de brins de fil. Montrer que si l'on néglige la longueur des arrondis de ces derniers la dilatation  $\varepsilon_{11}$  s'exprime simplement en fonction de la variation de résistance  $\Delta R = R - R_0$ .
2. Dans le cas où l'on ne néglige plus la longueur des arrondis des brins de fil, établir la relation entre  $\Delta R$  et les dilatations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$ . Quelle est alors, pour  $n = 5$ ,  $h_0 = 1$  cm et  $e_0 = 0.2$  mm, l'erreur commise à la question 1 ?

### E2.7 Extensométrie par jauges électriques

On s'intéresse ici à la détermination expérimentale du tenseur de déformation plane  $\varepsilon$  en un point  $P$  de la surface d'une structure subissant une transformation infinitésimale induite par un système d'actions mécaniques extérieures. Une jauge électrique d'extensométrie ne fournissant que la dilatation dans la direction de ses brins de fil (voir l'exercice E2.6), trois mesures effectuées dans trois directions différentes sont alors nécessaires, d'où l'emploi d'une jauge triple ou rosette à trois jauges (figure 2.11).

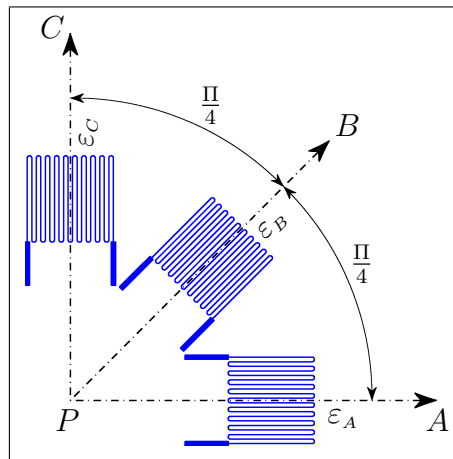


FIG. 2.11 – Rosette à trois jauges

La rosette étant collée au point  $P$  de la surface de la structure que l'on charge, on obtient alors respectivement, dans les trois directions coplanaires  $PA$ ,  $PB$  et  $PC$  (voir la figure 2.11), les trois dilatations  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  et  $\varepsilon_C$ .

1. Donner, en fonction de  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  et  $\varepsilon_C$ , l'expression du tenseur de déformation plane  $\varepsilon$  au point  $P$  relativement au système d'axes  $(PA, PC)$ .
2. En déduire les directions principales de déformation ainsi que les déformations principales associées.
3. Retrouver les résultats de la question 2 à l'aide du cercle de Mohr.
4. Application numérique :  $\varepsilon_A = -\varepsilon_C = 100 \mu\text{def}$ ,  $\varepsilon_B = 100\sqrt{3} \mu\text{def}$ .

### E2.8 Écoulement irrotationnel de fluide incompressible

On considère un écoulement irrotationnel de fluide incompressible tel que le tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation ait pour expression, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $a$  est une constante strictement positive.

1. Les particules fluides situées sur l'axe  $Ox_3$  étant supposées animées d'un mouvement rectiligne uniforme de direction  $\vec{e}_3$ , donner l'expression du champ des vitesses.
2. Déterminer les lignes de courant à l'instant  $t$ .
3. Dessiner une conduite permettant d'obtenir un tel écoulement.

### E2.9 Petites ou grandes transformations ?

On considère deux barres identiques de longueur  $L$  et de section  $S$  articulées à leurs extrémités respectives  $O$  et  $O'$  ainsi qu'entre elles au point  $A$  (figure 2.12). L'application en  $A$  d'une charge verticale  $P$  provoque un déplacement de ce point, vertical par raison de symétrie. Enfin l'on suppose que les sections droites de chacune des deux barres ne se déforment pas dans leur plan ( $S = \text{cste}$ ).

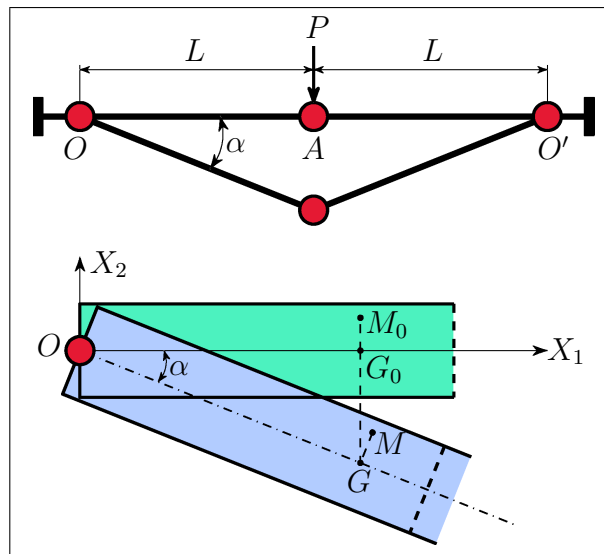


FIG. 2.12 – Barres articulées soumises à un chargement vertical

1. Déterminer, pour  $\alpha$  donné, les composantes  $(u_1, u_2, u_3)$  du déplacement du point  $M_0$  de coordonnées initiales  $(X_1, X_2, X_3)$  (voir la figure 2.12).

2. En déduire, pour  $\alpha$  quelconque mais fixé, l'expression du tenseur de déformation de Green-Lagrange **L**.
3. On suppose à présent  $\alpha \ll 1$ . Donner alors l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Est-il légitime d'utiliser  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pour de telles valeurs de  $\alpha$ ? Pourquoi?

### E2.10 Mouvement de corps rigide

Soit  $t$  l'instant actuel quelconque mais fixé. La transformation  $\mathcal{F}_t$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposée de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega_0$ , montrer qu'il s'agit d'un mouvement de corps rigide (translation et rotation) si et seulement si l'on a  $\mathbf{L}(\vec{X}, t) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ .

## 2.6.2 Énoncés des problèmes

### P2.1 Expansion plane homogène

On donne, dans l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  rapporté au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 &= X_2 - \alpha t X_1 \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

où  $t \geq 0$  est la variable temps,  $\alpha > 0$  une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et où  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  désignent les coordonnées de la particule  $P$  à l'instant de référence  $t = 0$ . Enfin l'on pourra, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser  $\tau = \alpha t$ .

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules ainsi que la vitesse de celles-ci exprimée en variables de Lagrange. Conclusion?
2. Donner la transformation linéaire tangente **F** puis en déduire l'expression des tenseurs de Cauchy à droite **C** et de Green-Lagrange **L**.
3. Donner l'expression de la masse volumique  $\rho$  à l'instant  $t$  en supposant celle-ci uniforme et égale à  $\rho_0$  à l'instant de référence  $t = 0$ .
4. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant  $t = 0$ , par les droites du plan  $X_3 = C$  passant par l'origine de ce plan. Que deviennent-elles à l'instant  $t$ ?
5. Reprendre la question 4 en considérant les courbes matérielles constituées, à l'instant  $t = 0$ , par les cercles du plan  $X_3 = C$  centrés sur l'origine de ce plan.
6. Déduire des questions 4 et 5 que la restriction de la transformation au plan  $X_3 = C$  peut être considérée comme la composée d'une rotation **R** et d'une déformation pure isotrope **U** que l'on déterminera. Montrer que cette décomposition pouvait être obtenue directement à partir des résultats de la question 2.



7. Donner l'expression de la vitesse  $\mathbf{v}$  en variables d'Euler. En déduire l'expression du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  ainsi que celle du tenseur des taux de rotation  $\mathbf{W}$ . Déterminer le tourbillon des vitesses  $\tilde{\omega}$ .
8. Retrouver le résultat de la question 3 à partir des équations de conservation de la masse exprimées en variables d'Euler.
9. Déterminer les lignes de courant à l'instant  $t$  (on utilisera avantageusement les coordonnées polaires).
10. Donner l'équation de la ligne d'émission à l'instant  $t$  du point  $M$  de coordonnées  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = C$ .
11. On considère l'ensemble des lignes d'émission  $\mathcal{E}_t$  du point  $M$  de coordonnées  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = C$  aux divers instants  $t \geq 0$ . Montrer que cet ensemble de paramètre  $t \geq 0$  constitue une famille d'arcs de cercles  $\mathcal{C}_t$  ayant en commun le point  $M$  et l'origine du plan  $x_3 = C$ . Montrer que le lieu des centres de ces cercles est une demi-droite du plan  $x_3 = C$  que l'on déterminera.

## P2.2 Concentration plane homogène

Dans tout le problème on limitera l'étude de la transformation au plan  $X_3 = 0$ .

On donne, dans l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  rapporté au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la transformation linéaire suivante

$$\begin{cases} x_1 &= a(t) [X_1 \cos b(t) - X_2 \sin b(t)] \\ x_2 &= a(t) [X_1 \sin b(t) + X_2 \cos b(t)] \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

où  $a(t) = \frac{1 + \alpha t}{1 + (\alpha t)^2}$  et  $b(t) = 2\Pi(1 - e^{-\alpha t})$ , où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et où  $t \geq 0$  désigne la variable temps.

L'instant  $t = 0$  étant choisi comme instant de référence,  $(X_1, X_2, X_3)$  représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée  $P$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées de cette même particule à l'instant  $t$ . Enfin, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture on posera  $\tau = \alpha t$  et l'on s'efforcera de n'expliciter qu'en cas de nécessité les fonctions  $a$  et  $b$  de la variable temps.

1. Soient  $P$  et  $Q$  deux particules quelconques mais fixées, respectivement repérées par les vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'$  à l'instant initial  $t = 0$ , et par les vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$  à l'instant courant  $t$ . Soient par ailleurs  $\vec{D} = \vec{X} - \vec{X}'$  et  $\vec{d} = \vec{x} - \vec{x}'$ . Exprimer  $\|\vec{d}\|$  en fonction de  $\|\vec{D}\|$  et de  $t$ . Que se passe-t-il lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ? Conclusion.

2. Quelles sont, à l'instant  $t$ , les transformées des droites du plan  $X_3 = 0$  passant par l'origine, ainsi que celles des cercles de ce plan centrés sur l'origine ? En déduire que la transformation plane considérée se décompose en une déformation pure isotrope et en une rotation.
3. Retrouver la décomposition précédente en considérant la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  et sa décomposition polaire  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Donner précisément les expressions de  $\mathbf{R}$  et de  $\mathbf{U}$ , puis étudier leur évolution au cours du temps. Conclusion ?
4. Écrire l'équation générale des trajectoires. On se placera pour cela en coordonnées polaires en posant

$$\begin{cases} X_1 = R \cos \Theta \\ X_2 = R \sin \Theta \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

et l'on donnera les expressions, paramétrées en  $t$ , de  $r$  et de  $\theta$ . En s'appuyant sur l'étude des variations des fonctions  $a$  et  $b$  conduite à la question 3, tracer sommairement quelques trajectoires, et notamment celle de la particule de coordonnées initiales  $X_1 = 1$  et  $X_2 = 0$ .

5. Donner l'expression du champ des vitesses en variables de Lagrange, puis en variables d'Euler. Pour ce dernier point on tirera parti de la linéarité de la transformation, de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  ainsi que de l'isotropie de  $\mathbf{U}$ .
6. Déterminer les lignes de courant à l'instant  $t$  et en donner un tracé sommaire, en distinguant notamment les cas  $t \in [0, t_0[$ ,  $t \in ]t_0, +\infty[$  ainsi que  $t = t_0$ , avec  $\alpha t_0 = \sqrt{2} - 1$  (on justifiera cette valeur). On utilisera avantageusement, pour cette question, les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .
7. Déterminer la ligne d'émission  $\mathcal{E}_t$  du point  $M$  de coordonnées  $(x_1^M, x_2^M)$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. On se placera ensuite en coordonnées polaires en posant

$$\begin{cases} x_1^M = r_M \cos \theta_M \\ x_2^M = r_M \sin \theta_M \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = r(t') \cos \theta(t') \\ x_2 = r(t') \sin \theta(t') \end{cases}$$

avec  $(x_1, x_2)$  les coordonnées du point courant de  $\mathcal{E}_t$  de paramètre  $t' \in [0, t]$ , et l'on donnera les expressions de  $r$  et de  $\theta$  en fonction de ce paramètre.

8. Soit  $\mathcal{E}_t$  la ligne d'émission de la question 7 et soit  $\mathcal{T}_t$  la portion de trajectoire, antérieure à l'instant  $t$  quelconque mais fixé et paramétrée en  $t' \in [0, t]$ , de la particule située en  $M$  à l'instant initial. Soient alors  $r_\varepsilon$  et  $\theta_\varepsilon$  les coordonnées polaires du point de  $\mathcal{E}_t$  de paramètre  $t'$ , et soient  $r_\tau$  et  $\theta_\tau$  celles du point de  $\mathcal{T}_t$  associé à la même valeur de ce paramètre. Montrer, en s'appuyant sur les résultats des questions 4 et 7, que  $\frac{\theta_\varepsilon(t') + \theta_\tau(t')}{2}$  ainsi que  $r_\varepsilon(t')r_\tau(t')$  sont des grandeurs indépendantes de  $t'$ . En déduire l'allure de  $\mathcal{E}_t$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  puis représenter sur une même figure  $\mathcal{E}_t$  et  $\mathcal{T}_t$  pour  $x_1^M = 1$ ,  $x_2^M = 0$  et  $t = 10\alpha^{-1}$ .
9. Déduire des résultats de la question 5 l'expression des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des taux de rotation  $\mathbf{W}$ . Que vaut le tourbillon des vitesses  $\tilde{\omega}$  ?

10. Donner l'expression du tenseur de déformation de Green-Lagrange **L**. Étudier l'évolution des déformations principales au cours du temps.
11. La masse volumique  $\rho_0$  à l'instant initial étant supposée uniforme, donner, en fonction de  $\rho_0$  et de  $t$ , l'expression relative à l'instant  $t$  du débit massique  $Q = \int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dx$  à travers le cercle unité  $\mathcal{C}$  du plan  $X_3 = 0$  centré sur l'origine ( $\mathbf{n}$  désigne la normale sortante aux points de  $\mathcal{C}$ ). Comment ce débit évolue-t-il au cours du temps ?

### P2.3 Transformation tridimensionnelle homogène

On donne, dans l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  rapporté au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , la transformation linéaire suivante

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 &= X_2 + \alpha t X_3 \\ x_3 &= X_3 + \alpha t X_1 \end{cases}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et où  $t \geq 0$  désigne la variable temps. L'instant  $t = 0$  étant choisi comme instant de référence,  $(X_1, X_2, X_3)$  représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée  $P$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées de cette même particule à l'instant  $t$ . Enfin l'on pourra, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser  $\tau = \alpha t$ .

1. Soit  $P$  une particule quelconque mais fixée. Montrer que sa trajectoire est une droite décrite avec une vitesse  $\vec{v}$  uniforme, proportionnelle à la distance de la position initiale de cette particule à l'origine  $O$  du repère  $R$ . On donnera par ailleurs l'expression lagrangienne de  $\vec{v}$ .
2. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente **F** relative à l'instant  $t$ , puis celles des tenseurs de Cauchy à droite **C** et de Green-Lagrange **L**. Déterminer les valeurs à l'instant  $t$  de la dilatation volumique  $\theta_V$  et de la masse volumique  $\rho$ , en supposant cette dernière uniforme et égale à  $\rho_0$  à l'instant  $t = 0$ .
3. Soit à présent  $\Delta$  la trisectrice d'équation  $X_1 = X_2 = X_3$  et de vecteur directeur  $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ . Déterminer la dilatation  $\varepsilon_{NN}$  dans la direction de la trisectrice ( $\vec{N} = \vec{k}$ ) puis dans les directions  $\vec{N}$  orthogonales à  $\vec{k}$ . Pour cette dernière question on utilisera le fait que les composantes  $(N_1, N_2, N_3)$  de  $\vec{N} \perp \vec{k}$  satisfont la relation  $N_1 + N_2 + N_3 = 0$ . Comment évoluent ces dilatations en fonction de  $\tau = \alpha t$  ?
4. Calculer la distorsion  $\gamma_{NT}$  entre les directions  $\vec{N} = \vec{k}$  et  $\vec{T}$  où  $\vec{T} \perp \vec{k}$ . En déduire les directions principales et les valeurs principales des tenseurs de déformation **C** et **L**, ainsi que celles du tenseur de déformation pure avant rotation **U**.
5. On s'intéresse à la courbe matérielle constituée, à l'instant  $t = 0$ , par la trisectrice  $\Delta$ . Que devient-elle à l'instant  $t$  ? Reprendre cette question en considérant les courbes matérielles

constituées, à l'instant  $t = 0$ , par les cercles de rayon  $R$  centrés sur la trisectrice et orthogonaux à celle-ci. Pour cela on utilisera le fait que ces cercles ont pour équations  $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = C$  et  $\sqrt{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2} = R$  avec  $C \in \mathbb{R}$  et  $R \in \mathbb{R}_+^*$ .

6. On s'intéresse à présent à la décomposition polaire  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$  de la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$ . Dédurre des questions 4 et 5 que la rotation  $\mathbf{R}$  a pour axe la trisectrice  $\Delta$  et donner son expression ainsi que celle de  $\mathbf{U}$  relativement au repère orthonormé direct  $R^* = (\mathcal{O}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , où  $\vec{n}_1 = \vec{k}$  est le vecteur directeur de la trisectrice défini à la question 3 et où  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  sont deux vecteurs unitaires orthogonaux entre eux et à la trisectrice et tels que  $(\vec{n}_1 | \vec{n}_2 | \vec{n}_3) = 1$ . Pour cela on déterminera l'angle  $\theta$  de la rotation autour de  $\Delta$  en considérant la transformée  $\vec{n}'$  d'un vecteur  $\vec{n} \perp \Delta$ . Plus précisément, on déduira du produit scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{n}'$  la valeur de  $\cos \theta$  et du produit vectoriel  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$  celle de  $\sin \theta$ . Comment évolue l'angle  $\theta$  en fonction de  $\tau = \alpha t$  ?
7. Donner l'expression du champ des vitesses  $\mathbf{v}$  en variables d'Euler. Que vaut, en un lieu géométrique  $\vec{x}$  donné, la limite de  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ? Calculer également les limites, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , de  $J$ ,  $\dot{J}$  et  $\text{div}_x \mathbf{v}$ . Conclusion ? Déterminer le tourbillon des vitesses  $\vec{\omega}$ .
8. On se restreint à présent au cas des petites transformations ( $\tau \ll 1$ ). Donner l'expression des tenseurs linéarisés des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des petites rotations  $\boldsymbol{\omega}$ , puis retrouver ces expressions à partir de celles de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{R}$  précédemment établies. Même question en ce qui concerne les déformations principales. Tracer le cercle de Mohr des déformations et en déduire la valeur maximale de la distorsion. Enfin, que peut-on dire à présent de la dilatation volumique ?

## P2.4 Transformation finie d'un tube épais

Le tube épais de rayon intérieur  $R_0$ , de rayon extérieur  $R_1$  et de hauteur  $H$  représenté sur la figure 2.13 est soumis à un système d'actions mécaniques extérieures induisant la transformation

$$\begin{cases} r &= R + \alpha t Z^2 \\ \theta &= \Theta \\ z &= (1 + \beta t) Z \end{cases}$$

où  $(R, \Theta, Z)$  (resp<sup>t</sup>  $(r, \theta, z)$ ) sont les coordonnées cylindriques d'une particule quelconque mais fixée avant (resp<sup>t</sup> après) transformation, où  $t \geq 0$  désigne la variable temps et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes données et strictement positives de dimensions respectives  $L^{-1}T^{-1}$  et  $T^{-1}$ .

1. Donner, en fonction des variables de Lagrange  $R$ ,  $\Theta$  et  $Z$ , les expressions des champs des déplacements puis des vitesses. En déduire la nature des trajectoires.
2. Soient, dans un demi-plan radial quelconque mais fixé, les segments de droite matériels ayant pour équations à l'instant initial  $R = \text{cste}$ ,  $Z \in [0, H]$ . Quelles sont leurs trans-

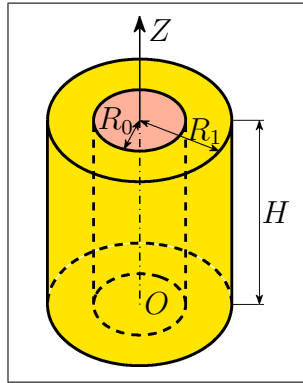


FIG. 2.13 – Transformation finie d'un tube épais

formées à l'instant  $t$ ? Représenter sommairement ces dernières pour  $R = R_0$ ,  $R = R_1$  et  $R = \frac{R_0+R_1}{2}$ .

- Soient à présent les couronnes matérielles ayant pour équations à l'instant initial  $Z = \text{cste}$ ,  $R \in [R_0, R_1]$ . Montrer que leurs transformées à l'instant  $t$  restent des couronnes dont on donnera précisément les équations avant d'en évaluer l'aire.
- Évaluer successivement le gradient lagrangien  $\mathbf{H}^L$  des déplacements, la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  et le tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$ . En déduire alors la valeur des dilatations dans les directions  $\vec{e}_R$ ,  $\vec{e}_\Theta$  et  $\vec{e}_z$ .
- Calculer le volume  $v$  qu'occupe la transformée du cylindre à l'instant  $t$ .
- Donner, dans un demi-plan radial quelconque mais fixé et relativement au système d'axes orthonormés  $(Or, Oz)$ , l'expression des lignes de courant à l'instant  $t$ . Représenter quelques unes de ces dernières pour  $t = 0$ .

### 2.6.3 Indications et éléments de réponse

#### E2.1 Transformations linéaires planes

$$(a) \begin{cases} u_1 = aX_1 \\ u_2 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} u_1 = aX_2 \\ u_2 = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = aX_1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} u_1 = aX_2 \\ u_2 = aX_1 \end{cases}$$

#### E2.2 Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques

En exploitant la relation intrinsèque  $\vec{du} = \mathbf{H} \cdot \vec{dx}$ , on obtient les expressions données en annexe B.3.2 (resp<sup>t</sup> B.3.3).

#### E2.3 Déformation d'un tube épais

- On trouve  $\varepsilon_{rz} = \frac{a}{2R}$ ,  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0$ .

2. Les directions principales de déformation ont pour vecteurs directeurs  $\vec{e}_\theta$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_z + \vec{e}_r)$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_z - \vec{e}_r)$ . Les déformations principales associées sont respectivement égales à 0,  $\frac{a}{2R}$  et  $-\frac{a}{2R}$ .

## E2.4 Quadriques directrices des dilatations

1. Ce lieu est constitué par les quadriques d'équations  $\vec{P}_t \vec{M}_n \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{P}_t \vec{M}_n = \pm 1$ .
2. On obtient les quadriques représentées sur la figure 2.14.

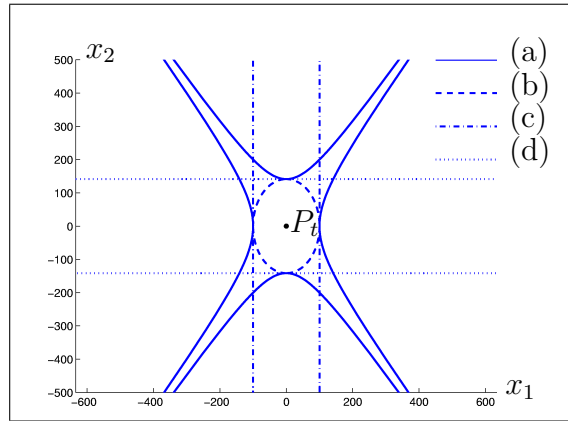


FIG. 2.14 – Quadriques directrices des dilatations

## E2.5 Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes

On obtient les figures 2.15 (a) et (b).

## E2.6 Effet transversal dans une jauge d'extensométrie

1. On trouve aisément  $\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{K} \frac{\Delta R}{R_0}$ .
2. En intégrant de plus les dilatations le long des arrondis des brins de fil il vient  $\frac{\Delta R}{R_0} = K \left( \varepsilon_{11} + \frac{(2n-1)\Pi e_0/4}{2nh_0 + (2n-1)\Pi e_0/2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \right)$ . L'erreur commise à la question 1 est alors égale à  $e = \frac{(2n-1)\Pi e_0/4}{2nh_0 + (2n-1)\Pi e_0/2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})$  soit, pour  $n = 5$ ,  $h_0 = 1$  cm et  $e_0 = 0.2$  mm,  $e = 0.014(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})$ .

## E2.7 Extensométrie par jauges électriques

1. On trouve, en affectant respectivement les indices 1 et 2 aux axes  $PA$  et  $PC$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_C$ , et  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_B - \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C)$ .

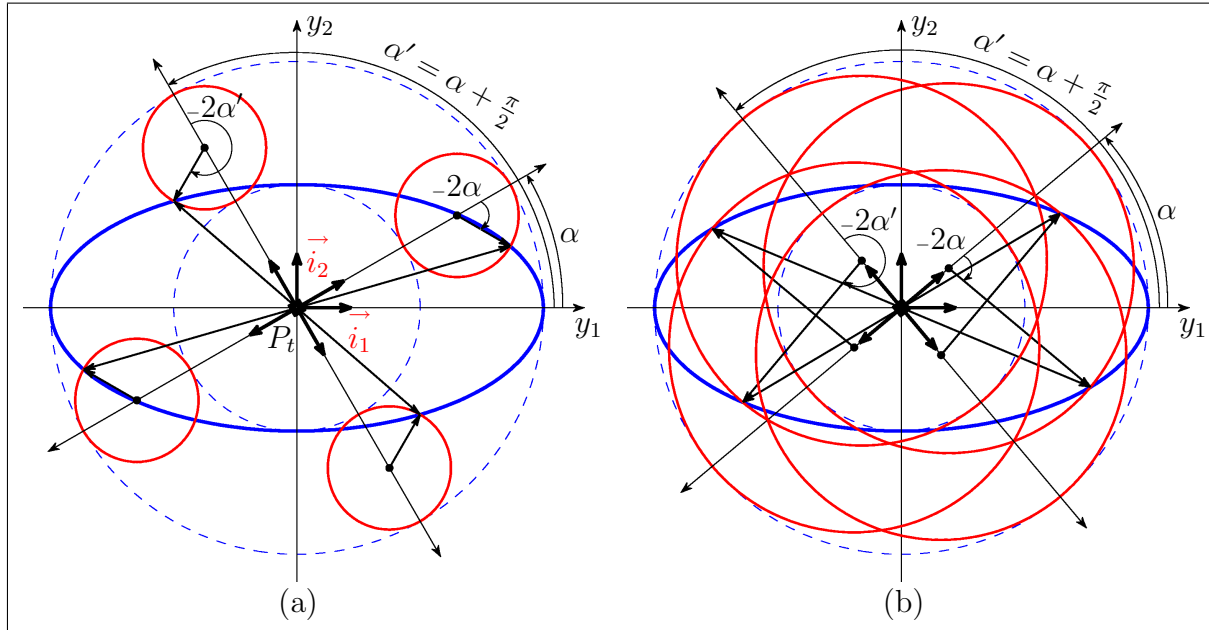


FIG. 2.15 – Ellipses de Lamé et cercles de Mohr des déformations planes

2. Les déformations principales ont pour expression

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2} \end{cases}$$

et les directions principales associées sont les droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équations respectives

$$\begin{cases} D_1 : \left( \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2} \right) x_1 + \left( \varepsilon_B - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \right) x_2 = 0 \\ D_2 : \left( \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2} \right) x_1 + \left( \varepsilon_B - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \right) x_2 = 0 \end{cases}$$

3. Le centre du cercle de Mohr a pour abscisse  $\frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C)$  et son rayon est égal à  $\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2}$ .

4. On trouve  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = 100 \mu\text{def}$ ,  $\varepsilon_{12} = 100\sqrt{3} \mu\text{def}$ ,  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 200 \mu\text{def}$ ,  
 $D_1 : x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1$  et  $D_2 : x_2 = -\sqrt{3}x_1$ .

## E2.8 Écoulement irrotationnel de fluide incompressible

1. On trouve aisément  $v_1 = ax_1$ ,  $v_2 = -ax_2$  et  $v_3 = v_0$ , avec  $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .
2. Les lignes de courant à l'instant  $t$  constituent la famille de courbes géométriques de paramètres  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  et d'équations  $\frac{|x_1|}{C_1} = \frac{C_2}{|x_2|} = \exp\left(\frac{a}{v_0}x_3\right)$ .
3. Une telle conduite est représentée sur la figure 2.16.

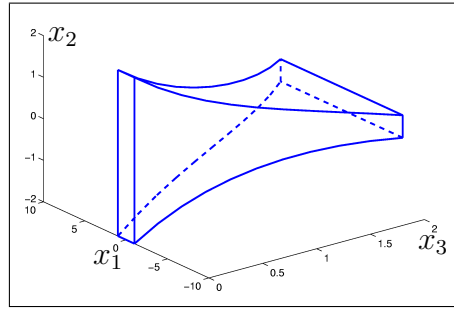


FIG. 2.16 – Exemple de conduite permettant un tel écoulement

### E2.9 Petites ou grandes transformations ?

1. On trouve  $u_1 = X_2 \sin \alpha$ ,  $u_2 = -X_1 \tan \alpha + X_2(\cos \alpha - 1)$  et  $u_3 = 0$ .
2. En restreignant l'étude au plan  $(OX_1, OX_2)$  on a

$$\mathbf{H}^L = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha \\ -\tan \alpha & \cos \alpha - 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \tan^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. On obtient

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\sin \alpha - \tan \alpha) \\ \frac{1}{2}(\sin \alpha - \tan \alpha) & \cos \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

et l'on constate que l'utilisation de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  conduit ici à des indications absurdes : dilatation nulle suivant l'axe  $OX_1$  et non nulle suivant l'axe  $OX_2$ , distorsion non nulle entre les directions  $OX_1$  et  $OX_2$ . La raison en est la suivante : bien que  $\mathbf{H}^L$  possède des termes en  $\mathcal{O}(\alpha)$ ,  $\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L$  ne possède plus que des termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $\alpha$ . Il n'est alors plus possible de négliger les termes du second ordre en  $\alpha$  de  ${}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L$  devant ceux de  $\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L$ , et l'approximation de  $\mathbf{L}$  par  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pour les petites valeurs de  $\alpha$  est donc ici illégitime.

### E2.10 Mouvement de corps rigide

Si  $\mathcal{F}_t$  est un mouvement de corps rigide on a  $\vec{x} = \vec{a}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \vec{X}$ ,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ , où  $\mathbf{Q}(t)$  est une matrice orthogonale de déterminant égal à +1 (rotation). Il vient alors,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{Q}(t)$  et donc  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ .

Supposons à l'inverse que l'on ait  $\mathbf{L} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ . La transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  est donc représentée, en tout point  $\vec{X} \in \Omega_0$ , par une matrice orthogonale de déterminant égal à +1. Il ne reste alors plus qu'à montrer que cette matrice est indépendante de  $\vec{X}$ . De  $F_{iK} F_{iL} = \delta_{KL}$ ,  $\forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2$ , on tire tout d'abord, puisque  $\mathcal{F}_t$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega_0$ ,

$$\partial_M (F_{iK} F_{iL}) = 0 \quad \forall (K, L, M) \in \{1, 2, 3\}^3$$



c'est-à-dire

$$F_{iL}\partial_M F_{iK} + F_{iK}\partial_M F_{iL} = 0 \quad \forall (K,L,M) \in \{1,2,3\}^3$$

Il vient ensuite, par permutation circulaire des indices  $K$ ,  $L$  et  $M$ ,

$$\begin{cases} F_{iM}\partial_K F_{iL} + F_{iL}\partial_K F_{iM} = 0 \\ F_{iK}\partial_L F_{iM} + F_{iM}\partial_L F_{iK} = 0 \end{cases} \quad \forall (K,L,M) \in \{1,2,3\}^3$$

En sommant ces deux égalités puis en soustrayant la précédente de l'expression résultante on obtient enfin, puisque  $\mathcal{F}_t$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega_0$ ,  $F_{iM}\partial_K F_{iL} = 0$ ,  $\forall (K,L,M) \in \{1,2,3\}^3$ . La transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}$  étant inversible, on en déduit alors  $\partial_K F_{iL} = 0$ ,  $\forall (K,i,L) \in \{1,2,3\}^3$ .

### P2.1 Expansion plane homogène

1. La trajectoire de la particule  $P$  de position initiale  $\vec{X}$  est la demi-droite du plan  $x_3 = X_3$  indirectement orthogonale à la projection dans ce plan du vecteur  $\vec{X}$ . Elle est décrite à vitesse constante  $\vec{v} = \alpha X_2 \vec{e}_1 - \alpha X_1 \vec{e}_2$ , de module proportionnel à la distance initiale entre cette particule et l'axe  $OX_3$ .
2. Dans tout ce qui suit on pose  $\tau = \alpha t$ . On trouve alors

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 \\ -\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. En désignant par  $\rho_0$  la masse volumique à l'instant initial  $t = 0$  on a, à l'instant  $t$ ,  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \tau^2}$ .
4. Soit  $\mathcal{D}_0$  l'une de ces droites matérielles, quelconque mais fixée. Sa transformée  $\mathcal{D}_t$  à l'instant  $t$  est alors la droite du plan  $x_3 = C$  passant par l'origine de ce plan, image de  $\mathcal{D}_0$  par la rotation d'axe  $Ox_3$  et d'angle  $\theta(t) = \arcsin \frac{-\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}$  (on rappelle que  $\tau = \alpha t$ ).
5. Le cercle du plan  $X_3 = C$ , de rayon  $R$  et de centre l'origine de ce plan a pour transformé à l'instant  $t$  le cercle du même plan, de même centre et de rayon  $r(t) = \sqrt{1 + \tau^2} R$ .
6. On trouve

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \sqrt{1 + \tau^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui n'est autre que la restriction de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  au plan  $X_3 = C$ .

7. De l'expression lagrangienne de la vitesse on tire, après inversion de la transformation,  $\vec{v}(\vec{x}, t) = \alpha \frac{\tau x_1 + x_2}{1 + \tau^2} \vec{e}_1 + \alpha \frac{\tau x_2 - x_1}{1 + \tau^2} \vec{e}_2$ , ce qui donne  $\vec{w} = \frac{-\alpha}{1 + \tau^2} \vec{e}_3$  ainsi que

$$\mathbf{G} = \frac{\alpha}{1 + \tau^2} \begin{bmatrix} \tau & 1 & 0 \\ -1 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{D} = \frac{\alpha\tau}{1+\tau^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \frac{\alpha}{1+\tau^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Il suffit d'intégrer la relation  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = \frac{2\alpha\tau}{1+\tau^2} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ .
9. Les lignes de courant à l'instant  $t$  sont les spirales logarithmiques contenues dans les plans  $x_3 = C$  et ayant pour équations en coordonnées polaires  $r = r_0 \exp(-\tau\theta)$ .
10. La ligne d'émission  $\mathcal{E}_t$  à l'instant  $t$  du point  $M$  de coordonnées  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = C$  a pour équations de paramètre  $\tau' = \alpha t'$

$$\mathcal{E}_t \begin{cases} x_1 = \frac{\tau - \tau'}{1 + \tau'^2} \\ x_2 = \frac{1 + \tau\tau'}{1 + \tau'^2} \\ x_3 = C \end{cases} \quad \tau' \in [0, \tau]$$

11. Il est clair que  $\mathcal{E}_t$  a pour extrémités le point  $M$  (faire  $\tau' = \tau$ ) ainsi que le point de coordonnées  $x_1 = \tau$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_3 = C$  (faire  $\tau' = 0$ ). Soit alors  $\mathcal{C}_t$  le cercle passant par ces deux points et par l'origine du plan  $x_3 = C$ . Ce cercle a donc pour centre le point de coordonnées  $x_1 = \frac{\tau}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  et  $x_3 = C$  et pour rayon  $r(t) = \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{2}$ . Il suffit ensuite, pour conclure, de vérifier que les équations paramétriques de  $\mathcal{E}_t$  satisfont la relation  $(x_1 - \frac{\tau}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1+\tau^2}{4}$ . La figure 2.17 montre la famille de lignes d'émission  $\mathcal{E}_t$  et de cercles associés  $\mathcal{C}_t$  pour  $\tau = \alpha t \in \{1, 2, \dots, 10\}$ .

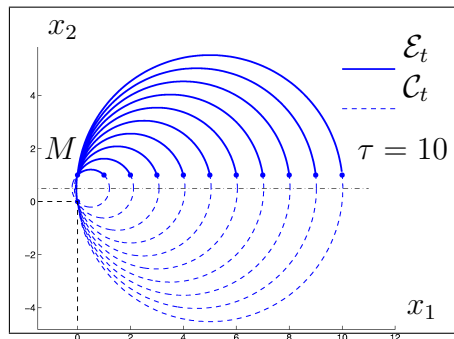


FIG. 2.17 – Lignes d'émission  $\mathcal{E}_t$  du point  $M$  et cercles  $\mathcal{C}_t$  associés pour  $\tau \in \{1, 2, \dots, 10\}$

## P2.2 Concentration plane homogène

1. On a  $\|\vec{d}\| = a(t)\|\vec{D}\|$ . De  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$  on déduit alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{x} - \vec{x}'\| = 0, \forall (\vec{X}, \vec{X}')$ . En particulier on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{X}$ .
2. Les droites matérielles du plan  $X_3 = 0$  passant à l'instant  $t = 0$  par l'origine ont subi, à l'instant  $t$ , une rotation d'axe  $OX_3$  et d'angle  $b(t)$ . Les cercles matériels de ce même plan initialement centrés sur l'origine le restent et leur rayon  $R$  devient, à l'instant,  $t$

$r(t) = a(t)R$ . La transformation plane  $\mathcal{F}_t$  relative à cet instant est donc la composée d'une déformation pure isotrope  $\mathbf{U} = a(t)\boldsymbol{\delta}$  ( $\boldsymbol{\delta}$  désigne ici le tenseur unité du second ordre sur  $\mathbb{R}^2$  orthonormé) et d'une rotation d'angle  $b(t)$ .

3. On a, en se restreignant au plan de l'étude  $X_3 = 0$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos b(t) & -\sin b(t) \\ \sin b(t) & \cos b(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & a(t) \end{bmatrix}$$

La figure 2.18 illustre les variations de  $a$  et  $b$  en fonction de  $\tau = \alpha t$ .

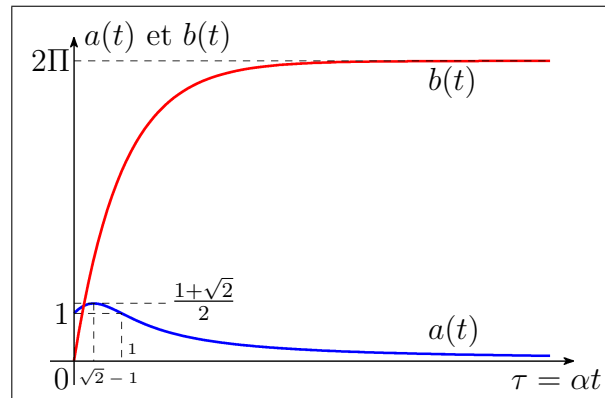


FIG. 2.18 – Variations de  $a$  et  $b$  en fonction de  $\tau = \alpha t$

4. On trouve  $r = a(t)R$  et  $\theta = \Theta + b(t)$ . Les trajectoires de quelques particules initialement situées sur l'axe  $OX_1$  sont représentées sur la figure 2.19.

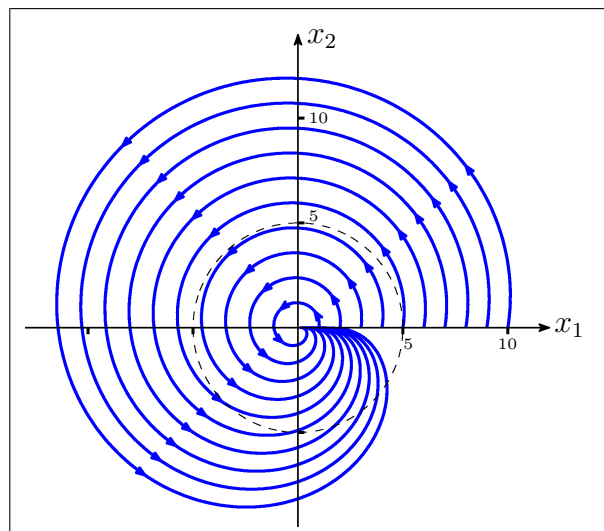


FIG. 2.19 – Tracé de quelques trajectoires

5. En désignant respectivement par  $a'$  et  $b'$  les dérivées de  $a$  et  $b$  par rapport à la variable temps l'on obtient finalement, en variables d'Euler,

$$\begin{cases} v_1 &= \frac{a'(t)}{a(t)}x_1 - b'(t)x_2 \\ v_2 &= \frac{a'(t)}{a(t)}x_2 + b'(t)x_1 \end{cases}$$

6. Les lignes de courant à l'instant  $t$  ont pour équations en coordonnées polaires  $r = r_0 \exp\left(\frac{a'(t)}{b'(t)a(t)}\theta\right)$ . La figure 2.20 représente la ligne de courant passant par le point  $M$  de coordonnées  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$  aux instants  $t = \frac{t_0}{2}$ ,  $t = t_0$  et  $t = 2t_0$  où  $t_0 = \alpha^{-1}(\sqrt{2} - 1)$  est l'instant où  $a$  atteint son maximum.

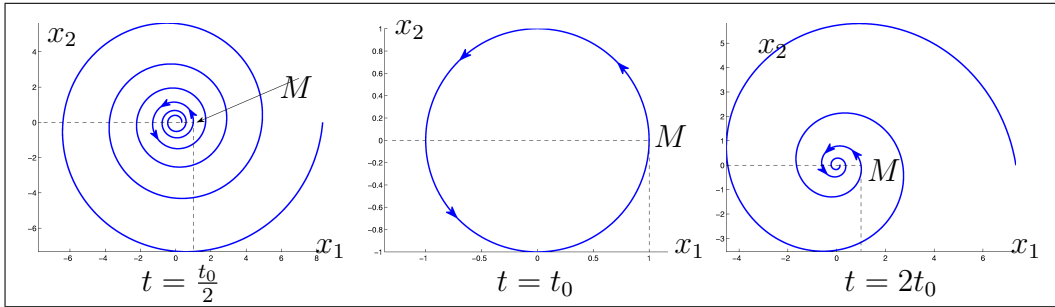


FIG. 2.20 – Lignes de courant passant par le point  $M$  aux instants  $\frac{t_0}{2}$ ,  $t_0$  et  $2t_0$

7. La ligne d'émission  $\mathcal{E}_t$  à l'instant  $t$  du point  $M$  de coordonnées  $(x_1^M, x_2^M)$  a pour équations de paramètre  $t'$

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{a(t)}{a(t')} [x_1^M \cos(b(t) - b(t')) - x_2^M \sin(b(t) - b(t'))] \\ x_2 &= \frac{a(t)}{a(t')} [x_1^M \sin(b(t) - b(t')) + x_2^M \cos(b(t) - b(t'))] \end{cases} \quad t' \in [0, t]$$

Le passage en coordonnées polaires fournit quant à lui  $r(t') = \frac{a(t)}{a(t')}r_M$  et  $\theta(t') = \theta_M + b(t) - b(t')$ ,  $t' \in [0, t]$ .

8. Des questions 4 et 7 on déduit aisément  $\frac{\theta_{\mathcal{E}}(t') + \theta_{\mathcal{T}}(t')}{2} = \theta_M + \frac{1}{2}b(t)$  ainsi que  $r_{\mathcal{E}}(t')r_{\mathcal{T}}(t') = a(t)r_M^2$ ,  $\forall t' \in [0, t]$ . Pour  $t$  quelconque mais fixé ces deux grandeurs sont donc indépendantes de  $t' \in [0, t]$ . De  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$  il découle alors que la ligne d'émission  $\mathcal{E}_t$  du point  $M$  dégénère en l'origine du plan  $X_3 = 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . La figure 2.21 représente  $\mathcal{E}_t$  et  $\mathcal{T}_t$  pour  $x_1^M = 1$ ,  $x_2^M = 0$  et  $t = 10\alpha^{-1}$ .

9. On a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{a'(t)}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{a'(t)}{a(t)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -b'(t) \\ b'(t) & 0 \end{bmatrix}$$

ainsi que  $\vec{\omega} = b'(t)\vec{e}_3 = 2\Pi\alpha e^{-\alpha t}\vec{e}_3$ .

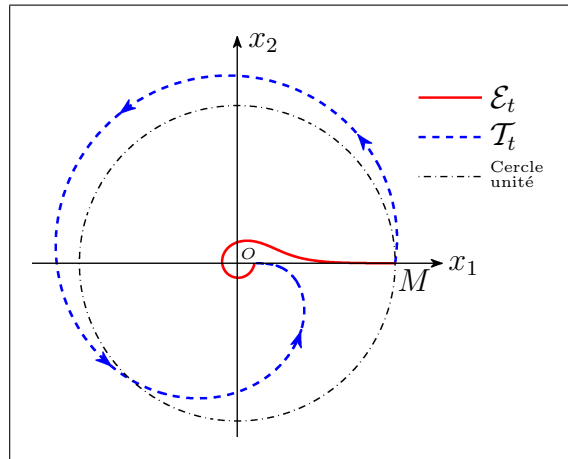


FIG. 2.21 – Graphes de  $\mathcal{E}_t$  et  $\mathcal{T}_t$  pour  $x_1^M = 1$ ,  $x_2^M = 0$  et  $t = 10\alpha^{-1}$

10. On trouve aisément  $\mathbf{L} = \frac{1}{2}(a^2(t) - 1)\boldsymbol{\delta}$  où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur unité du second ordre sur  $\mathbb{R}^2$  orthonormé. La figure 2.22 illustre les variations de la déformation principale  $L = \frac{1}{2}(a^2(t) - 1)$  (valeur propre double) en fonction de  $\tau = \alpha t$ .

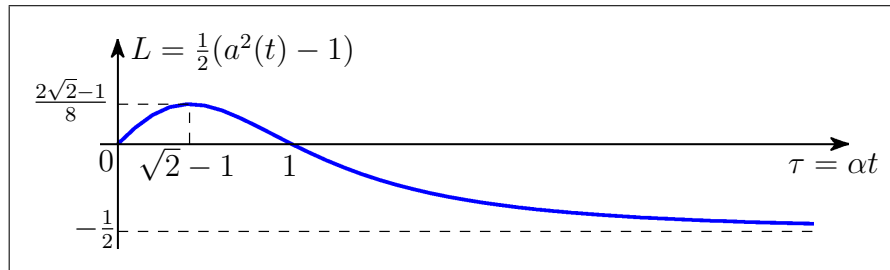


FIG. 2.22 – Évolution de la déformation principale  $L = \frac{1}{2}(a^2(t) - 1)$

11. On trouve  $Q(t) = 2\Pi\rho_0 \frac{a'(t)}{a^3(t)}$ . L'étude des variations de  $\frac{a'(t)}{a^3(t)}$  en fonction de  $t$  montre alors que  $Q$  est une fonction monotone et décroissante du temps avec  $Q(0) = 2\Pi\rho_0\alpha$ ,  $Q(t_0) = 0$  (on rappelle que  $t_0 = \alpha^{-1}(\sqrt{2} - 1)$ ) et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = -\infty$ .

### P2.3 Transformation tridimensionnelle homogène

- Soit  $\vec{Y} = X_2\vec{e}_1 + X_3\vec{e}_2 + X_1\vec{e}_3$ . De  $\vec{x} = \vec{X} + \alpha t\vec{Y}$  on déduit alors  $\vec{v} = \alpha\vec{Y}$  puis  $\|\vec{v}\| = \alpha\|\vec{Y}\| = \alpha\|\vec{X}\|$ .
- On obtient, en posant  $\tau = \alpha t$ ,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \tau^2 & \tau & \tau \\ \tau & 1 + \tau^2 & \tau \\ \tau & \tau & 1 + \tau^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau & \frac{1}{2}\tau \\ \frac{1}{2}\tau & \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau \\ \frac{1}{2}\tau & \frac{1}{2}\tau & \frac{1}{2}\tau^2 \end{bmatrix}$$

et l'on en déduit  $\theta_v = \tau^3$  ainsi que  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \tau^3}$

3. On a  $\varepsilon_{NN} = \tau$  si  $\vec{N} = \vec{k}$  et  $\varepsilon_{NN} = \sqrt{1 - \tau + \tau^2} - 1$ ,  $\forall \vec{N} \perp \vec{k}$ . La figure 2.23 illustre l'évolution de ces dilatations avec  $\tau$ .

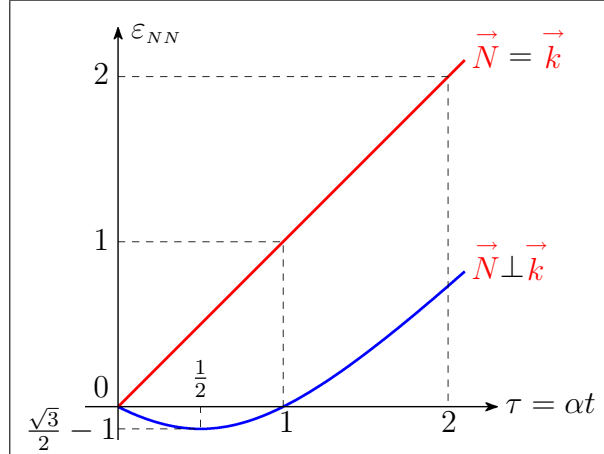


FIG. 2.23 – Évolution des dilatations  $\varepsilon_{NN}$  dans les directions  $\vec{N} = \vec{k}$  et  $\vec{N} \perp \vec{k}$

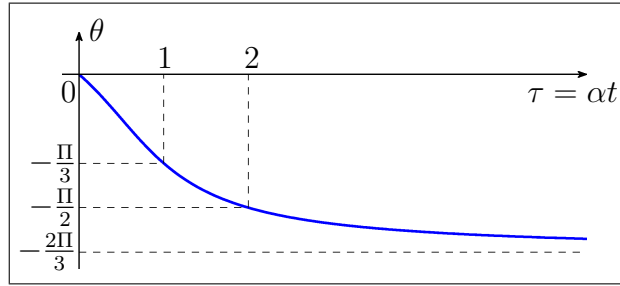
4. On trouve  $\gamma_{NT} = 0 \quad \forall \vec{T} \perp \vec{N} = \vec{k}$ . La trisectrice  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{k}$  est donc direction principale des tenseurs de déformation  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$ , les autres directions principales de ces tenseurs étant celles orthogonales à  $\vec{k}$ . De façon plus précise, le plan orthogonal à la trisectrice est un plan principal de  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$  puisque la dilatation  $\varepsilon_{NN}$  est la même  $\forall \vec{N} \perp \vec{k}$ . Les valeurs principales de ces tenseurs sont regroupées dans le tableau 2.7.

TAB. 2.7 – Valeurs principales des tenseurs  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$

Directions principales	Valeurs principales de		
	$\mathbf{C}$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{L}$
$\vec{N} = \vec{k}$	$(1 + \tau)^2$	$1 + \tau$	$\tau + \frac{1}{2}\tau^2$
$\vec{N} \perp \vec{k}$	$1 - \tau + \tau^2$	$\sqrt{1 - \tau + \tau^2}$	$-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau^2$

5. La trisectrice  $\Delta$  est globalement invariante. Les cercles matériels initialement centrés sur cette dernière et orthogonaux à celle-ci le restent. Leur centre devient le point de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$  avec  $\bar{x} = (1 + \tau)\bar{X}$  et leur rayon vaut alors  $\sqrt{1 - \tau + \tau^2}R$ .
6. La rotation  $\mathbf{R}$  a pour axe la trisectrice  $\Delta$  puisque cette dernière est globalement invariante et direction principale de  $\mathbf{U}$ . On a alors, relativement au repère  $R^* = (\mathcal{O}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  et compte-tenu des résultats des questions 4 et 5,

$$\mathbf{U}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 + \tau & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \tau + \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \tau + \tau^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

FIG. 2.24 – Variations de  $\theta$  en fonction de  $\tau = \alpha t$ 

avec  $\cos \theta = \frac{1-\tau/2}{\sqrt{1-\tau+\tau^2}}$  et  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}\tau}{2\sqrt{1-\tau+\tau^2}}$ . Les variations de  $\theta$  en fonction de  $\tau = \alpha t$  sont représentées sur la figure 2.24.

7. De l'expression lagrangienne de la vitesse on tire, après inversion de la transformation,

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\alpha}{1+\tau^3}(x_2 - \tau x_3 + \tau^2 x_1) \\ v_2 = \frac{\alpha}{1+\tau^3}(x_3 - \tau x_1 + \tau^2 x_2) \\ v_3 = \frac{\alpha}{1+\tau^3}(x_1 - \tau x_2 + \tau^2 x_3) \end{cases}$$

ce qui donne  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = \frac{3\alpha\tau^2}{1+\tau^3}$  ainsi que  $\tilde{\omega} = -\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1+\tau}{1+\tau^3}\vec{k}$ . De  $J = 1 + \tau^3$  on tire par ailleurs  $\dot{J} = 3\alpha\tau^2$ . On a alors, en un lieu géométrique  $\vec{x}$  quelconque mais fixé,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} J = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{J} = +\infty$  tandis que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ .

8. On a, relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2} & \frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{2} & 0 & \frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{\tau}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2} & \frac{-\tau}{2} \\ \frac{-\tau}{2} & 0 & \frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{-\tau}{2} & 0 \end{bmatrix} \implies \tilde{\omega} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\vec{k}$$

et l'on retrouve bien, au premier ordre en  $\tau$ ,  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\varepsilon}$ . On a par ailleurs, toujours au premier ordre en  $\tau$  et compte tenu des résultats de la question 6,  $\cos \theta = 1$  et  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\tau$  ce qui donne  $\mathbf{R} \cdot \vec{X} = \vec{X} + \tilde{\omega} \wedge \vec{X} \quad \forall \vec{X}$  c'est-à-dire  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}$ . Les déformations principales sont quant à elles  $\varepsilon_1 = \tau$  (valeur propre simple associée à la direction principale de vecteur directeur  $\vec{k}$ ) et  $\varepsilon_2 = \frac{-\tau}{2}$  (valeur propre double associée au plan principal orthogonal à  $\vec{k}$ ) ce qui correspond bien, au premier ordre en  $\tau$ , aux valeurs principales de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U} - \boldsymbol{\delta}$ . Enfin, la distorsion maximale est égale à  $\frac{3}{2}\tau$  et la dilatation volumique est ici nulle ( $\operatorname{div}_x \mathbf{u} = 0$ ).

#### P2.4 Transformation finie d'un tube épais

1. On trouve aisément  $\mathbf{u} = \alpha t Z^2 \vec{e}_R + \beta t Z \vec{e}_Z$  puis  $\mathbf{v} = \alpha Z^2 \vec{e}_R + \beta Z \vec{e}_Z$ . Les champs des déplacements et des vitesses exprimés en fonction des variables de Lagrange  $R, \Theta$  et  $Z$  ont donc respectivement pour composantes  $u_R = \alpha t Z^2$ ,  $u_\Theta = 0$ ,  $u_Z = \beta t Z$  et  $v_R = \alpha Z^2$ ,  $v_\Theta = 0$ ,  $v_Z = \beta Z$ . Les trajectoires des particules du tube sont des droites décrites à vitesse uniforme et fonction de la seule variable d'espace  $Z$ .

2. De  $r = R + \alpha t Z^2$ ,  $Z \in [0, H]$  et de  $Z = \frac{z}{1+\beta t}$  on tire  $r = R + \frac{\alpha t}{(1+\beta t)^2} z^2$ ,  $z \in [0, (1+\beta t)H]$ . Les transformées à l'instant  $t$  des segments de droite matériels ayant pour équations à l'instant initial  $R = \text{cste}$  et  $Z \in [0, H]$  sont donc des segments de paraboles. Elles sont représentées sur la figure 2.25 pour  $R = R_0$ ,  $R = R_1$  et  $R = \frac{R_0+R_1}{2}$ .

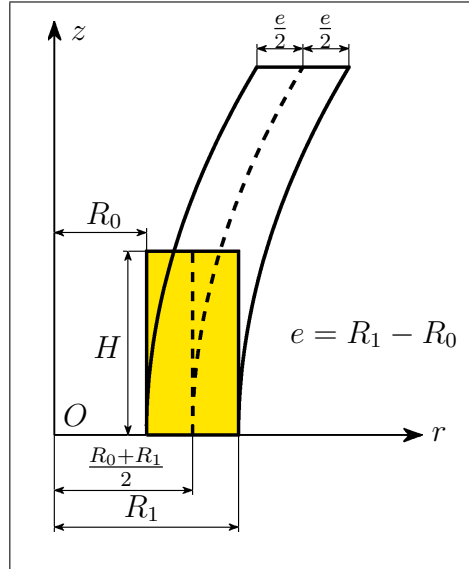


FIG. 2.25 – Transformées des segments matériels  $R = R_0$ ,  $R = R_1$  et  $R = \frac{R_0+R_1}{2}$

3. Les composantes de  $\mathbf{u}$  ne dépendant que de  $Z$ , les transformées à l'instant  $t$  des couronnes matérielles ayant pour équations à l'instant initial  $Z = \text{cste}$  et  $R \in [R_0, R_1]$  sont les couronnes d'équations  $z = (1+\beta t)Z$  et  $r \in [r_0, r_1]$ , avec  $r_0 = R_0 + \alpha t Z^2$  et  $r_1 = R_1 + \alpha t Z^2$ . Elles ont pour aire  $\Pi(r_1^2 - r_0^2)$  c'est-à-dire  $\Pi(R_1^2 - R_0^2)(1 + 2\alpha t \frac{Z^2}{R_1+R_0})$ .
4. On trouve

$$\mathbf{H}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\alpha t Z \\ 0 & \alpha t \frac{Z^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \beta t \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\alpha t Z \\ 0 & 1 + \alpha t \frac{Z^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta t \end{bmatrix}$$

ce qui donne

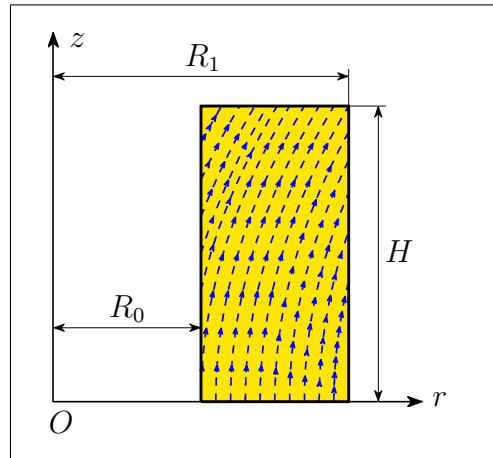
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\alpha t Z \\ 0 & (1 + \alpha t \frac{Z^2}{R})^2 & 0 \\ 2\alpha t Z & 0 & (1 + \beta t)^2 + (2\alpha t Z)^2 \end{bmatrix}$$

De  $\varepsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} - 1$  et de l'expression précédente de  $\mathbf{C}$  on déduit alors aisément les valeurs, regroupées dans le tableau 2.8, des dilatations  $\varepsilon_{NN}$  dans les directions  $\vec{e}_R$ ,  $\vec{e}_\Theta$  et  $\vec{e}_Z$ .



TAB. 2.8 – Dilatations dans les directions  $\vec{e}_R$ ,  $\vec{e}_\Theta$  et  $\vec{e}_Z$ 

$\vec{N}$	$\vec{e}_R$	$\vec{e}_\Theta$	$\vec{e}_Z$
$\varepsilon_{NN}$	0	$\alpha t \frac{Z^2}{R}$	$\sqrt{(1 + \beta t)^2 + (2\alpha t Z)^2} - 1$

FIG. 2.26 – Lignes de courant à l'instant  $t = 0$ 

5. De  $v = \int_0^H \int_{R_0}^{R_1} J 2\Pi R dR dZ$  et de  $J = (1 + \beta t)(1 + \alpha t \frac{Z^2}{R})$  on tire

$$v = (1 + \beta t)\Pi(R_1^2 - R_0^2)H \left( 1 + \frac{2}{3}\alpha t \frac{H^2}{R_1 + R_0} \right)$$

6. De  $v_R = \alpha Z^2$ ,  $v_Z = \beta Z$  et  $Z = \frac{z}{1 + \beta t}$  on tire tout d'abord  $v_r = \frac{\alpha}{(1 + \beta t)^2} z^2$  et  $v_z = \frac{\beta}{1 + \beta t} z$ . La résolution du système différentiel  $\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z}$  fournit ensuite  $r = \frac{\alpha}{2\beta(1 + \beta t)} z^2 + r^0$  où  $r^0$  est une constante arbitraire. Les lignes de courant à l'instant  $t$  sont donc des segments de paraboles. Elles sont représentées sur la figure 2.26 pour  $t = 0$ .




# Chapitre 3

## Contraintes

### 3.1 Considérations intuitives

Nous tentons ici de dégager, au travers des deux exemples qui suivent, l'idée intuitive que l'on peut avoir des efforts intérieurs, ou contraintes, développés au sein d'un milieu continu  $\mathcal{M}$  soumis à un système  $\mathcal{S}_m^e$  d'actions mécaniques extérieures (forces gravifiques, actions de contact, ...).

#### 3.1.1 Fluide au repos

 [tab31.html](#) Soit  $\Omega$  un milieu fluide en repos relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , supposé fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'observateur  $\mathcal{O}$ .

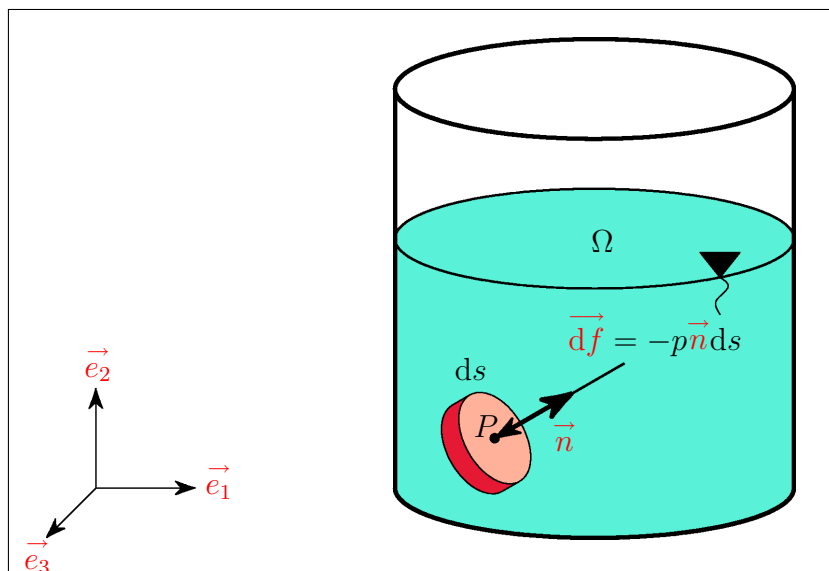


FIG. 3.1 – Fluide au repos

Plaçons alors, au point matériel  $P$  de  $\Omega$  et comme l'illustre la figure 3.1, une capsule manométrique de dimensions suffisamment faibles pour que l'on puisse assimiler l'ensemble des particules fluides en contact avec sa membrane à une surface matérielle élémentaire  $\vec{ds}$ , d'aire  $ds = \|\vec{ds}\|$  et de normale  $\vec{n} = \vec{ds}/\|\vec{ds}\|$  orientée vers l'extérieur de la capsule (normale sortante). Ces particules, situées du côté de  $\vec{n}$ , exercent sur la membrane une force élémentaire  $\vec{df}$  proportionnelle à  $ds$  et de direction opposée à  $\vec{n}$ . Plus précisément, on a

$$\vec{df} = -p\vec{n}ds \quad (3.1)$$

où  $p > 0$  est la pression hydrostatique au point  $P$ .

La densité surfacique de forces ou **vecteur contrainte**  $\vec{\sigma}_n$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P$  est alors donnée par

$$\vec{\sigma}_n = \frac{\vec{df}}{ds} = -p\vec{n} \quad (3.2)$$

Elle traduit l'action mécanique, en ce point matériel et sur ce plan, des particules fluides situées du côté de  $\vec{n}$ .

Désignant enfin par  $\sigma$  le tenseur isotrope du second ordre défini par

$$\sigma = -p\delta \quad (3.3)$$

il vient, compte tenu de (3.2),

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n} \quad (3.4)$$

### Remarques

1. De  $\vec{ds} = \vec{n}ds$  et de (3.1), on tire

$$\vec{df} = -p\vec{ds} \quad (3.5)$$


De  $\vec{df} = \vec{\sigma}_n ds$  et de (3.4), on tire par ailleurs

$$\vec{df} = \sigma \cdot \vec{ds} \quad (3.6)$$

2. On appelle **facette de normale**  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point matériel  $P$  le triplet  $(P, \vec{n}, ds)$  associé à la surface matérielle élémentaire  $\vec{ds}$  en ce point. Le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P$  est alors aussi dénommé "**vecteur contrainte sur la facette de normale**  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P$ ".

3. Dans un fluide au repos, le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P$  est toujours colinéaire et de direction opposée à  $\vec{n}$ . Il se réduit donc à une composante normale (selon  $\vec{n}$ ) de compression (sa direction est opposée à  $\vec{n}$ ), sa composante tangentielle (i.e. sa projection sur le plan de normale  $\vec{n}$ ) étant nulle. Cette particularité des fluides au repos est le plus souvent mise en défaut pour la plupart des milieux déformables (fluides visqueux en mouvement, solides), ainsi que l'illustre l'exemple suivant.

### 3.1.2 Poutre en traction simple

 [tab32.html](#) Considérons donc l'essai de traction simple homogène d'une poutre de longueur  $l$  et de section droite de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  représentée sur la figure 3.2.

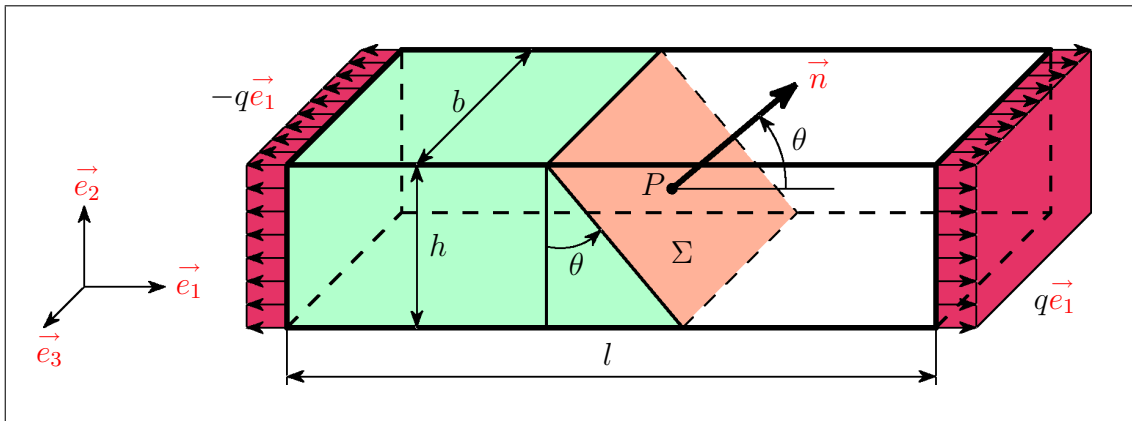


FIG. 3.2 – Poutre en traction simple

Cette poutre, constituée d'un matériau homogène isotrope et non pesant, est en équilibre sous l'action des densités surfaciques uniformes de forces  $-qe_1$  et  $qe_1$  respectivement appliquées à ses extrémités gauche et droite.

Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire du plan engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  tel que  $\vec{n} \cdot \vec{e}_1 > 0$ , et soit  $\Sigma$  la section de la poutre par le plan de normale  $\vec{n}$  passant par le point  $P$  représentée sur la figure 3.2. La sollicitation étant appliquée uniformément aux extrémités gauche et droite de la poutre, nous supposons que la densité surfacique de forces  $\vec{\sigma}_n$  (vecteur contrainte) est la même en tout point de  $\Sigma$ . Elle traduit l'action mécanique, sur cette section, des particules solides situées du côté de  $\vec{n}$ . Écrivons alors l'équilibre du domaine matériel situé à gauche de  $\Sigma$ . Il vient, avec les notations de la figure 3.2,

$$bh(-qe_1) + b \frac{h}{\cos \theta} \vec{\sigma}_n = \vec{0} \quad (3.7)$$

c'est-à-dire

$$\vec{\sigma}_n = q \cos \theta \vec{e}_1 \quad (3.8)$$

Si  $\sigma$  désigne le tenseur du second ordre de composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par

$$\sigma = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

on a aussi, puisque  $\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ ,

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n} \quad (3.10)$$

### Remarques

1. Contrairement à l'exemple précédent du fluide au repos, le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P$  défini par (3.8) n'est plus colinéaire à  $\vec{n}$  dès que ce vecteur unitaire du plan engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  diffère de ces derniers. Ce vecteur contrainte possède alors une composante normale  $\sigma_{nn} \vec{n}$  caractérisée par  $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$ , ainsi qu'une composante tangentielle  $\sigma_{nt} \vec{t}$  non nulle donnée par  $\sigma_{nt} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{t}$ , avec  $\vec{t}$  le vecteur unitaire du plan de normale  $\vec{n}$  directement orthogonal à  $\vec{n}$  dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . De  $\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ , de  $\vec{t} = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$  ainsi que de (3.8), on tire alors

$$\begin{cases} \sigma_{nn} &= q \cos^2 \theta \\ \sigma_{nt} &= -q \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.11)$$

La composante normale  $\sigma_{nn} \vec{n}$  de  $\vec{\sigma}_n$  a donc même direction que  $\vec{n}$ , c'est une composante de traction. Les grandeurs physiques scalaires  $\sigma_{nn}$  et  $\sigma_{nt}$  définies ci-dessus sont respectivement appelées **contrainte normale** et **contrainte tangentielle**.

2. Les relations (3.4) et (3.10) relatives à l'expression du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P$  dans le cas du fluide au repos et de la poutre en traction simple se généralisent, comme nous l'allons voir dans les sections suivantes, à tout milieu continu  $\mathcal{M}$  soumis à un quelconque système  $\mathcal{S}_m^e$  d'actions mécaniques extérieures.

## 3.2 Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes

### 3.2.1 Classification des actions mécaniques

Soit  $\mathcal{M}$  un milieu continu, ensemble de ses particules. Il est d'usage de distinguer, parmi l'ensemble des actions s'exerçant sur ce corps matériel et plus généralement sur tout système physique  $\mathcal{S}$ , deux catégories :

- Les actions mécaniques qui se traduisent par des forces et des couples, ou par des densités (linéiques, surfaciques, volumiques ou massiques) de forces et de couples.


- Les actions non mécaniques, liées à l'existence de flux (flux de chaleur par exemple) ou de sources (par exemple, source de masse associée à une réaction chimique).

Bien que certaines actions non mécaniques puissent engendrer, ainsi que nous le verrons dans le chapitre 4, des déformations au sein des milieux continus qui les subissent, nous ne nous préoccupons ici que des actions mécaniques. Les deux exemples de la section 3.1 nous montrent alors que ces dernières sont de deux sortes :

- Les actions mécaniques qu'exerce sur  $\mathcal{M}$  le milieu extérieur (efforts extérieurs).
- Les actions mécaniques développées au sein du corps matériel  $\mathcal{M}$ , dues aux interactions mutuelles entre les particules qui le composent (efforts intérieurs).

**Remarque** Dans le cas du fluide au repos de la section 3.1.1, les actions mécaniques extérieures sont les forces de pesanteur qui s'appliquent en tout point matériel du milieu continu  $\mathcal{M}$  (actions à distance). Dans le cas de l'essai de traction simple décrit dans la section 3.1.2, les effets gravifiques ne sont pas pris en compte (le matériau est supposé non pesant) et les actions mécaniques extérieures se réduisent alors aux densités surfaciques de forces appliquées aux extrémités gauche et droite de la poutre (actions de contact).

### 3.2.1.1 Actions mécaniques extérieures

 [tab33.html](#) Soit  $\mathcal{M}$  un milieu continu et soit  $\Omega_t$  sa configuration actuelle à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $\Gamma_t$  la frontière de  $\Omega_t$ , que l'on supposera "suffisamment régulière" pour qu'y soit défini presque partout le champ  $\mathbf{n} : \Gamma_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des **normales sortantes** (i.e. dirigées vers l'extérieur de  $\Omega_t$ ).

Parmi l'ensemble des actions mécaniques qu'exerce sur  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  le milieu extérieur, nous distinguerons

- Les actions extérieures à distance qui s'appliquent en tout point matériel du milieu continu  $\mathcal{M}$  (actions gravifiques, électromagnétiques, inertielles) et qui se traduisent par des champs de densités massiques ou volumiques de forces et de couples définis sur  $\Omega_t$ .
- Les actions extérieures de contact qui ne s'appliquent qu'aux points de la frontière  $\Gamma_t$  ou d'une partie stricte  $\Gamma_{t2}$  de celle-ci, et auxquelles sont cette fois associés des champs de densités surfaciques de forces et de couples définis sur  $\Gamma_t$  ou  $\Gamma_{t2}$ .

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des milieux matériels non électrisés et non magnétisés, de sorte que les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur eux se réduisent à des densités massiques ou surfaciques de forces (absence de densités massiques ou surfaciques de couples). C'est ce qu'exprime l'


**Hypothèse 4 (Actions mécaniques extérieures)** Soit  $\mathcal{M}$  un milieu matériel et soit  $\Omega_t$  sa configuration actuelle à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, de frontière  $\Gamma_t$  "suffisamment

régulière". Le système  $\mathcal{S}_m^e$  des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur  $\mathcal{M}$  à cet instant est réduit aux champs de densité massique de forces  $\mathbf{b} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  (actions à distance) et de densité surfacique de forces  $\mathbf{g} : \Gamma_{t2} \mapsto \mathbb{R}^3$  (actions de contact), avec  $\Gamma_{t2} \subseteq \Gamma_t$ .

### 3.2.1.2 Actions mécaniques intérieures : Définition du vecteur contrainte


Les deux exemples de la section 3.1 nous ont apporté une première notion intuitive des efforts intérieurs, ou contraintes, qui se développent au sein d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  soumis à un système  $\mathcal{S}_m^e$  d'actions mécaniques extérieures, efforts induits par les interactions mutuelles entre les particules composant ce milieu. Nous nous proposons, dans cette section, d'asseoir cette notion par la définition du vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point matériel  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ .

Donnons donc la

**Définition 15 (Vecteur contrainte)**  [def15t.html](#) Soient  $\mathcal{M}$  un milieu matériel et  $\Omega_t$  sa configuration actuelle à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. Soient par ailleurs  $\vec{x} \in \Omega_t$  et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire, également quelconques mais fixés. Considérons, pour  $r > 0$ , la surface matérielle finie  $\vec{s}_r$  constituée par les particules du disque de normale  $\vec{n}$  et de rayon  $r$  centré sur le point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  (figure 3.3). Soit  $\vec{f}(\vec{n}, \vec{x}, t, r)$  la force qu'exercent sur cette surface matérielle d'aire  $s_r = \Pi r^2$  les particules de  $\mathcal{M}$  à son contact et situées du côté de  $\vec{n}$ .

On appelle alors vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , et l'on note  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  ou  $\vec{\sigma}_n(\vec{x}, t)$ , ou plus simplement  $\vec{\sigma}_n$  et même  $\vec{\sigma}$  lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, la limite, lorsqu'elle existe, de  $\frac{\vec{f}}{s_r}$  quand  $r$  tend vers 0 par valeurs strictement positives.

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{n}, \vec{x}, t, r)}{\Pi r^2} \quad (3.12)$$

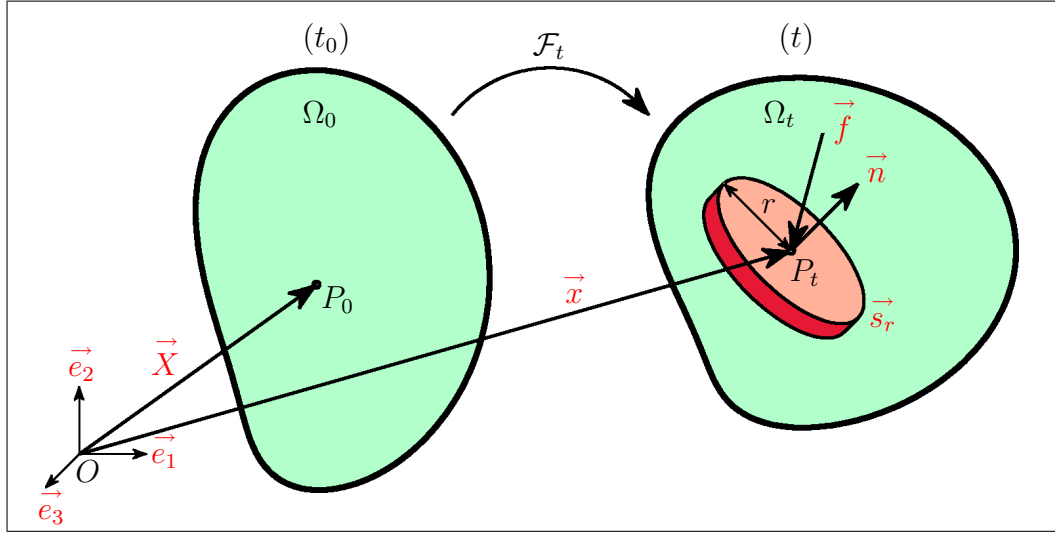
 [tab34.html](#) La surface matérielle  $\vec{s}_r$  étant en équilibre sous l'action des particules de  $\mathcal{M}$  en contact avec elle, c'est-à-dire des particules situées du côté de  $\vec{n}$  mais également de  $-\vec{n}$ , on a

$$\vec{f}(\vec{n}, \vec{x}, t, r) + \vec{f}(-\vec{n}, \vec{x}, t, r) = \vec{0} \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t, \forall \vec{n}, \forall r > 0 \quad (3.13)$$

de sorte qu'il vient, compte tenu de (3.12),

$$\vec{\sigma}(-\vec{n}, \vec{x}, t) = -\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t, \forall \vec{n} \quad (3.14)$$



FIG. 3.3 – Efforts intérieurs sur le plan de normale  $\vec{n}$ 

Considérons à présent, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , une surface matérielle élémentaire  $\vec{ds}$  d'aire  $ds = \|\vec{ds}\|$  et de normale  $\vec{n} = \vec{ds}/\|\vec{ds}\|$ . Les particules de  $\mathcal{M}$  en contact avec cette surface matérielle et situées du côté de  $\vec{n}$  exercent alors sur elle une force élémentaire  $\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds)$  et l'on a, compte tenu de la définition (3.12) du vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ ,

$$\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds) = \vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) ds \quad (3.15)$$

ou encore

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds)}{ds} \quad (3.16)$$

Le triplet  $(P_t, \vec{n}, ds)$  associé à la surface matérielle élémentaire  $\vec{ds}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  est appelé **facette de normale  $\vec{n}$**  et d'aire  $ds$  en ce point et à cet instant. Conséquemment, et compte tenu de (3.16), le vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  est aussi dénommé “**vecteur contrainte sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$** ” en ce point et à cet instant.

Pour un milieu continu  $\mathcal{M}$  quelconque et contrairement au cas du fluide au repos (section 3.1.1), le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  n'est pas nécessairement colinéaire à  $\vec{n}$ . Il possède une composante normale  $\sigma_{nn}\vec{n}$  (projection sur  $\vec{n}$ ) caractérisée par

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} \quad (3.17)$$

ainsi qu'une composante tangentielle  $\vec{\tau}_n$ , vecteur du plan de normale  $\vec{n}$  égal à la projection de  $\vec{\sigma}_n$  sur ce plan et donné par

$$\vec{\tau}_n = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn}\vec{n} \quad (3.18)$$

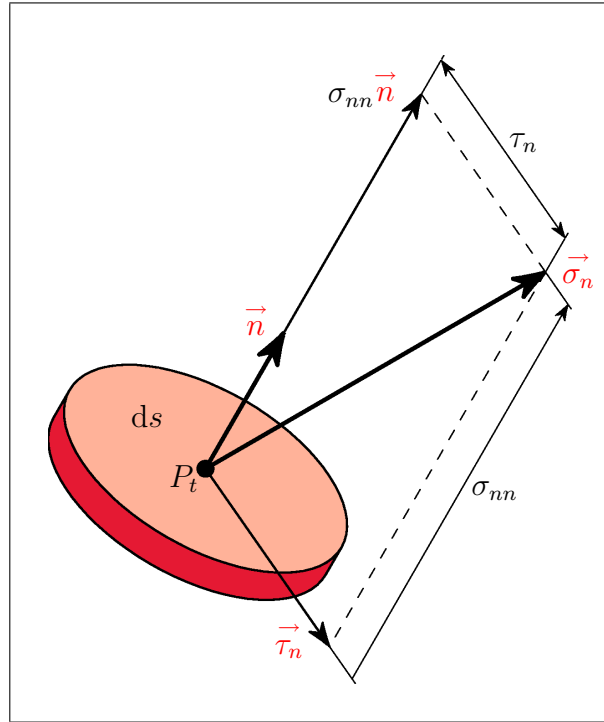


FIG. 3.4 – Décomposition du vecteur contrainte

La figure 3.4 illustre cette décomposition. Les grandeurs physiques scalaires  $\sigma_{nn}$  définie par (3.17) et  $\tau_n$  définie par

$$\tau_n = \|\vec{\tau}_n\| \quad (3.19)$$


où  $\vec{\tau}_n$  est donné par (3.18), sont respectivement appelées **contrainte normale** et **contrainte tangentielle**<sup>1</sup> sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ . Notons que la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  possède un signe (elle peut être positive mais aussi négative), tandis que la contrainte tangentielle  $\tau_n$  est toujours positive. Nous verrons toutefois, dans la section 3.4.5.2, que l'on peut, dans le cas d'un état de contrainte plane, définir la contrainte tangentielle d'une façon différente et telle que cette grandeur soit dotée d'un signe (voir aussi la remarque 1 de la section 3.1.2 page 156). Lorsque  $\sigma_{nn} > 0$ , la composante normale  $\sigma_{nn}\vec{n}$  du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  a même direction que  $\vec{n}$  et la **contrainte normale** est alors dite **de traction**. Si  $\sigma_{nn} < 0$ , cette composante est de direction opposée à  $\vec{n}$  et l'on parle alors de **contrainte normale de compression**.

<sup>1</sup> $\tau_n$  est aussi dénommée contrainte de cisaillement ou simplement cisaillement

**Remarque** Le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  est entièrement défini relativement à la configuration actuelle  $\Omega_t$  à cet instant. C'est donc une grandeur eulérienne.

## 3.2.2 Tenseurs des contraintes

### 3.2.2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

 **tab35.html** Nous nous proposons, dans cette section, de généraliser à des milieux continus quelconques les relations (3.4) et (3.10) précédemment obtenues pour le fluide au repos (section 3.1.1) et la poutre en traction simple (section 3.1.2).

Soient donc  $\mathcal{M}$  un milieu continu et  $\Omega_t$  sa configuration actuelle à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. Soit par ailleurs  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un repère orthonormé direct supposé fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'observateur  $\mathcal{O}$ , et soit  $\vec{x} \in \Omega_t$  également quelconque mais fixé. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $\vec{\sigma}_j(\vec{x}, t)$ , ou plus simplement  $\vec{\sigma}_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , le vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{e}_j$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , et par  $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ , ou plus brièvement  $\sigma_{ij}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Autrement dit, on a


$$\vec{\sigma}(\vec{e}_j, \vec{x}, t) = \vec{\sigma}_j(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t)\vec{e}_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.20)$$

Soit alors  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  le tenseur du second ordre de composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définies par  $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ , c'est-à-dire le tenseur dont la matrice représentative relativement à ce repère a pour  $j$ -ième colonne les composantes du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) = \left[ \vec{\sigma}_1(\vec{x}, t), \vec{\sigma}_2(\vec{x}, t), \vec{\sigma}_3(\vec{x}, t) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\vec{x}, t) & \sigma_{12}(\vec{x}, t) & \sigma_{13}(\vec{x}, t) \\ \sigma_{21}(\vec{x}, t) & \sigma_{22}(\vec{x}, t) & \sigma_{23}(\vec{x}, t) \\ \sigma_{31}(\vec{x}, t) & \sigma_{32}(\vec{x}, t) & \sigma_{33}(\vec{x}, t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Il vient alors, par construction,

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_j, \vec{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{e}_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.22)$$

 **tab36.html** Nous nous proposons, dans ce qui suit, de montrer que la relation (3.22), satisfaite par les trois vecteurs de base  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ , l'est encore par tout vecteur unitaire  $\vec{n}$ , c'est-à-dire que le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  est donné par  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$ , où  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  est défini par (3.21).

Soit tout d'abord  $\vec{n}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé, de composantes non nulles  $n_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Considérons alors, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , le volume matériel élémentaire tétraédrique représenté sur la figure 3.5.

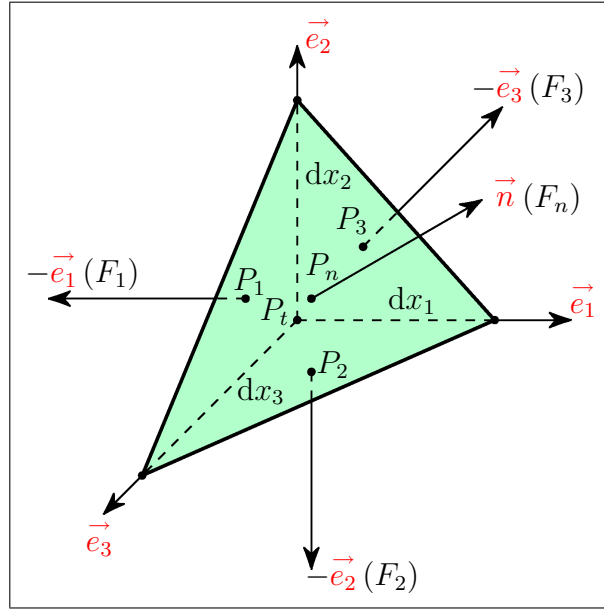


FIG. 3.5 – Volume matériel élémentaire tétraédrique au point  $P_t$  et à l'instant  $t$

Soit  $F_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , (resp<sup>t</sup>  $F_n$ ) la facette de normale sortante<sup>2</sup>  $-\vec{e}_i$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}$ ) et soit  $P_i$  (resp<sup>t</sup>  $P_n$ ) son centre de gravité. L'arête du tétraèdre de même direction que  $\vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ayant pour longueur  $dx_i$ , nous noterons  $dx$  la distance du point  $P_t$  à la facette  $F_n$ . On a alors

$$\frac{dx}{dx_i} = n_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.23)$$

Soit par ailleurs  $dv$  le volume élémentaire du tétraèdre,  $P_c$  son centre de gravité,  $ds$  l'aire de la facette  $F_n$  et  $ds_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , celle de la facette  $F_i$ . Il vient


$$dv = \frac{1}{3} dx ds = \frac{1}{3} dx_1 ds_1 = \frac{1}{3} dx_2 ds_2 = \frac{1}{3} dx_3 ds_3 \quad (3.24)$$

ce qui donne, compte tenu de (3.23),

$$ds_i = n_i ds \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.25)$$

<sup>2</sup>i.e. dirigée vers l'extérieur du tétraèdre

Omettant la variable temps dans un souci de simplicité, nous désignerons par  $\vec{\sigma}(\vec{n}, P_n)$  le vecteur contrainte sur la facette  $F_n$ , de composantes  $\sigma_i(\vec{n}, P_n)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Remarquons en outre, compte tenu de (3.14) et (3.20), que le vecteur contrainte sur la facette  $F_i$  de normale  $-\vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , n'est autre que  $-\vec{\sigma}_i(P_i)$  (sans sommation sur  $i$ ).

 [tab37.html](#) Traduisons alors l'équilibre du tétraèdre élémentaire de la figure 3.5 relativement au repère  $R' = (P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié au point matériel  $P_t$ . Soit tout d'abord  $\vec{d}f^d$  la résultante des actions mécaniques à distance s'exerçant sur ce volume matériel, de composantes  $df_i^d$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R' = (P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Si  $\rho : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}$  désigne le champ des masses volumiques,  $\mathbf{b} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  le champ des actions mécaniques à distance s'exerçant à l'instant  $t$  sur  $\Omega_t$  (hypothèse 4 page 158) et  $\boldsymbol{\gamma} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  celui des accélérations, il vient, compte tenu de (3.24),

$$df_i^d = \frac{1}{3} dx ds \rho(P_c) [b_i(P_c) - \gamma_i(P_c)] \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.26)$$

TAB. 3.1 – Bilan des actions de contact sur la frontière du tétraèdre

facette		$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_n$
centre		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_n$
aire		$ds_1 = n_1 ds$	$ds_2 = n_2 ds$	$ds_3 = n_3 ds$	$ds$
normale		$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$\vec{n}$
vecteur contrainte		$-\vec{\sigma}_1(P_1)$	$-\vec{\sigma}_2(P_2)$	$-\vec{\sigma}_3(P_3)$	$\vec{\sigma}(\vec{n}, P_n)$
composante du vecteur contrainte sur	$\vec{e}_1$	$-\sigma_{11}(P_1)$	$-\sigma_{12}(P_2)$	$-\sigma_{13}(P_3)$	$\sigma_1(\vec{n}, P_n)$
	$\vec{e}_2$	$-\sigma_{21}(P_1)$	$-\sigma_{22}(P_2)$	$-\sigma_{23}(P_3)$	$\sigma_2(\vec{n}, P_n)$
	$\vec{e}_3$	$-\sigma_{31}(P_1)$	$-\sigma_{32}(P_2)$	$-\sigma_{33}(P_3)$	$\sigma_3(\vec{n}, P_n)$

Soit à présent  $\vec{d}f^c$  la résultante des actions de contact exercées sur la frontière du tétraèdre par les particules de  $\Omega_t$  extérieures à celui-ci, de composantes  $df_i^c$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R' = (P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On a alors, en tirant parti des développements précédents regroupés dans le tableau 3.1,

$$\begin{cases} df_1^c = -\sigma_{11}(P_1)n_1 ds - \sigma_{12}(P_2)n_2 ds - \sigma_{13}(P_3)n_3 ds + \sigma_1(\vec{n}, P_n) ds \\ df_2^c = -\sigma_{21}(P_1)n_1 ds - \sigma_{22}(P_2)n_2 ds - \sigma_{23}(P_3)n_3 ds + \sigma_2(\vec{n}, P_n) ds \\ df_3^c = -\sigma_{31}(P_1)n_1 ds - \sigma_{32}(P_2)n_2 ds - \sigma_{33}(P_3)n_3 ds + \sigma_3(\vec{n}, P_n) ds \end{cases} \quad (3.27)$$

c'est-à-dire

$$df_i^c = ds \left[ \sigma_i(\vec{n}, P_n) - \sigma_{i1}(P_1)n_1 - \sigma_{i2}(P_2)n_2 - \sigma_{i3}(P_3)n_3 \right] \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.28)$$

L'équilibre du tétraèdre matériel élémentaire relativement au repère  $R' = (P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  impliquant  $\vec{d}f^d + \vec{d}f^c = \vec{0}$ , il vient, compte tenu de (3.26) et (3.28),

$$\begin{aligned} \sigma_i(\vec{n}, P_n) - \sigma_{i1}(P_1)n_1 - \sigma_{i2}(P_2)n_2 - \sigma_{i3}(P_3)n_3 \\ + \frac{1}{3}dx \rho(P_c) [b_i(P_c) - \gamma_i(P_c)] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  restant fixé, faisons à présent tendre la distance  $dx$  du point  $P_t$  à la facette  $F_n$  vers 0 par valeurs strictement positives. Les points  $P_i, i \in \{1, 2, 3\}, P_n$  et  $P_c$  tendent alors vers le point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$ , de sorte qu'il reste simplement

$$\sigma_i(\vec{n}, \vec{x}) = \sigma_{i1}(\vec{x})n_1 + \sigma_{i2}(\vec{x})n_2 + \sigma_{i3}(\vec{x})n_3 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.30)$$

Autrement dit, on a, relativement aux axes du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\sigma_i(\vec{n}, \vec{x}, t) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t)n_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.31)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \quad (3.32)$$

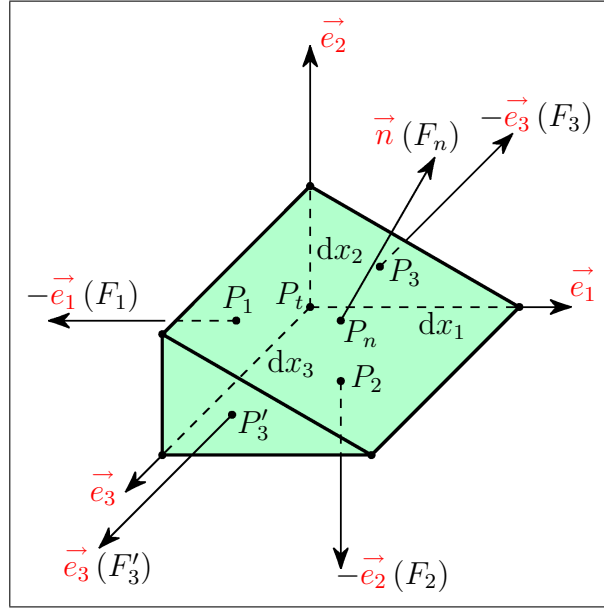
Il nous reste donc à montrer que cette relation, établie pour tout vecteur unitaire  $\vec{n}$  de composantes non nulles  $n_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , reste valable lorsque  $n_1 n_2 n_3 = 0$ . La preuve étant fournie par les relations (3.14) et (3.22) si  $\vec{n} = \pm \vec{e}_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , il suffit d'examiner le cas des vecteurs  $\vec{n}$  ayant une unique composante nulle, par exemple et sans perte de généralité ainsi que nous l'allons voir,  $n_3 = 0$ .

Soit donc  $\vec{n}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé de composantes  $n_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  telles que  $n_3 = 0$  et  $n_1 n_2 \neq 0$ . Considérons, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , le volume matériel élémentaire prismatique décrit par la figure 3.6.

Nous désignerons par  $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , (resp<sup>t</sup>  $F_n, F_3$ ) la facette de normale sortante<sup>3</sup>  $-\vec{e}_i$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}, \vec{e}_3$ ), par  $P_i$  (resp<sup>t</sup>  $P_n, P_3$ ) son centre de gravité, par  $dx_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , la longueur des arêtes du prisme ayant même direction que  $\vec{e}_i$  et par  $dx$  la distance du point  $P_t$  à la facette  $F_n$ . Il vient alors

$$\frac{dx}{dx_i} = n_i \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.33)$$

<sup>3</sup>i.e. dirigée vers l'extérieur du prisme

FIG. 3.6 – Volume matériel élémentaire prismatique au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ 

Soit par ailleurs  $dv$  le volume élémentaire du prisme,  $P_c$  son centre de gravité,  $ds$  l'aire de la facette  $F_n$  et  $ds_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , celle de la facette  $F_i$ , la facette  $F'_3$  ayant quant à elle même aire que  $F_3$ . On a

$$dv = \frac{1}{2} dx ds = \frac{1}{2} dx_1 ds_1 = \frac{1}{2} dx_2 ds_2 = dx_3 ds_3 \quad (3.34)$$

ce qui donne, avec (3.33),

$$ds_i = n_i ds \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.35)$$

Choisissant à présent, sans perte de généralité, d'imposer  $dx_3 = \frac{1}{2} dx$ , nous obtenons

$$ds_3 = ds \quad (3.36)$$

TAB. 3.2 – Bilan des actions de contact sur la frontière du prisme

facette		$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F'_3$	$F_n$
centre		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P'_3$	$P_n$
aire		$ds_1 = n_1 ds$	$ds_2 = n_2 ds$	$ds_3 = ds$	$ds'_3 = ds$	$ds$
normale		$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{n}$
vecteur contrainte		$-\vec{\sigma}_1(P_1)$	$-\vec{\sigma}_2(P_2)$	$-\vec{\sigma}_3(P_3)$	$\vec{\sigma}_3(P'_3)$	$\vec{\sigma}(\vec{n}, P_n)$
composante du vecteur contrainte sur	$\vec{e}_1$	$-\sigma_{11}(P_1)$	$-\sigma_{12}(P_2)$	$-\sigma_{13}(P_3)$	$\sigma_{13}(P'_3)$	$\sigma_1(\vec{n}, P_n)$
	$\vec{e}_2$	$-\sigma_{21}(P_1)$	$-\sigma_{22}(P_2)$	$-\sigma_{23}(P_3)$	$\sigma_{23}(P'_3)$	$\sigma_2(\vec{n}, P_n)$
	$\vec{e}_3$	$-\sigma_{31}(P_1)$	$-\sigma_{32}(P_2)$	$-\sigma_{33}(P_3)$	$\sigma_{33}(P'_3)$	$\sigma_3(\vec{n}, P_n)$

Écrivons alors, comme précédemment, l'équilibre du prisme élémentaire de la figure 3.6 relativement au repère  $R' = (P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié au point matériel  $P_t$ . Les composantes relativement à ce repère de la résultante  $\vec{d}f^d$  des actions mécaniques à distance agissant sur ce volume matériel étant données par

$$df_i^d = \frac{1}{2} dx ds \rho(P_c) [b_i(P_c) - \gamma_i(P_c)] \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.37)$$

et celles de la résultante  $\vec{d}f^c$  des actions de contact s'exerçant sur sa frontière ayant pour expression, compte tenu des résultats rassemblés dans le tableau 3.2,

$$df_i^c = ds \left[ \sigma_i(\vec{n}, P_n) - \sigma_{i1}(P_1)n_1 - \sigma_{i2}(P_2)n_2 - \sigma_{i3}(P_3) + \sigma_{i3}(P'_3) \right] \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.38)$$

l'équilibre du prisme fournit

$$\begin{aligned} \sigma_i(\vec{n}, P_n) - \sigma_{i1}(P_1)n_1 - \sigma_{i2}(P_2)n_2 - \sigma_{i3}(P_3) + \sigma_{i3}(P'_3) \\ + \frac{1}{2} dx \rho(P_c) [b_i(P_c) - \gamma_i(P_c)] = 0 \end{aligned} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.39)$$

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  restant fixé, faisons tendre  $dx$  vers 0 par valeurs strictement positives. Les points  $P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $P'_3$ ,  $P_n$  et  $P_c$  tendent alors vers le point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$ , si bien qu'il reste

$$\sigma_i(\vec{n}, \vec{x}) = \sigma_{i1}(\vec{x})n_1 + \sigma_{i2}(\vec{x})n_2 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.40)$$

On retrouve bien, puisque  $n_3 = 0$ , la relation (3.31), et l'expression (3.32) du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  reste donc valable.

Le tenseur du second ordre défini par (3.21) est le **tenseur des contraintes de Cauchy** au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ . La relation intrinsèque (3.32) traduit alors le fait que le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  en ce point et à cet instant est égal au produit contracté de ce tenseur par  $\vec{n}$ .

### Remarques [tab38.html](#)

1. Le lecteur saura garder présent à l'esprit que les composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur la facette de normale  $\vec{n} = \vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont fournies par la  $i$ -ème colonne de la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  relativement à ce repère.
2. Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma(\vec{x}, t)$  est entièrement bâti relativement à la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ . C'est donc un tenseur eulérien.



3. On appelle **contrainte moyenne** au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , et l'on note  $\sigma_m(\vec{x}, t)$ , l'invariant scalaire défini par

$$\sigma_m(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \quad (3.41)$$

4. La contrainte normale  $\sigma_{nn}$  définie par (3.17) s'écrit encore, compte tenu de (3.32) et en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (3.42)$$


Exprimée relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , cette relation devient

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (3.43)$$

et le lecteur remarquera l'analogie entre (3.42) et (2.188), de même qu'entre (3.43) et (2.191).

5. Les contraintes sont homogènes à des forces par unité de surface et s'expriment donc, dans le système international d'unités, en Pascal (Pa). Leurs valeurs souvent élevées conduisent à l'utilisation des multiples tels que le kilopascal (1 kPa =  $10^3$  Pa), le Mégapascal (1 MPa =  $10^6$  Pa) ou encore le Gigapascal (1 GPa =  $10^9$  Pa). Enfin, le bar (1 bar =  $10^5$  Pa) ainsi que son multiple l'hectobar (1 hbar =  $10^7$  Pa = 1 daN.mm<sup>-2</sup>), bien qu'unités non légales, restent utilisés.

### 3.2.2.2 Tenseurs des contraintes de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff

 [pap3222a.html](#) Ainsi que nous l'avons vu dans la section 3.2.2.1, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , entièrement bâti relativement à cette configuration, est un tenseur eulérien. Nous nous proposons, dans cette section, de construire un tenseur des contraintes totalement lagrangien.

Soient  $t$  l'instant actuel et  $\vec{X} \in \Omega_0$  quelconques mais fixés, soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ , et soit  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  la transformation linéaire tangente au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$  et à cet instant, gradient de  $\mathcal{F}_t$  en ce point. Considérons alors, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ , la surface matérielle élémentaire  $\vec{ds}$  représentée sur la figure 3.7, de normale  $\vec{n} = \vec{ds} / \|\vec{ds}\|$  et d'aire élémentaire  $ds = \|\vec{ds}\|$ .

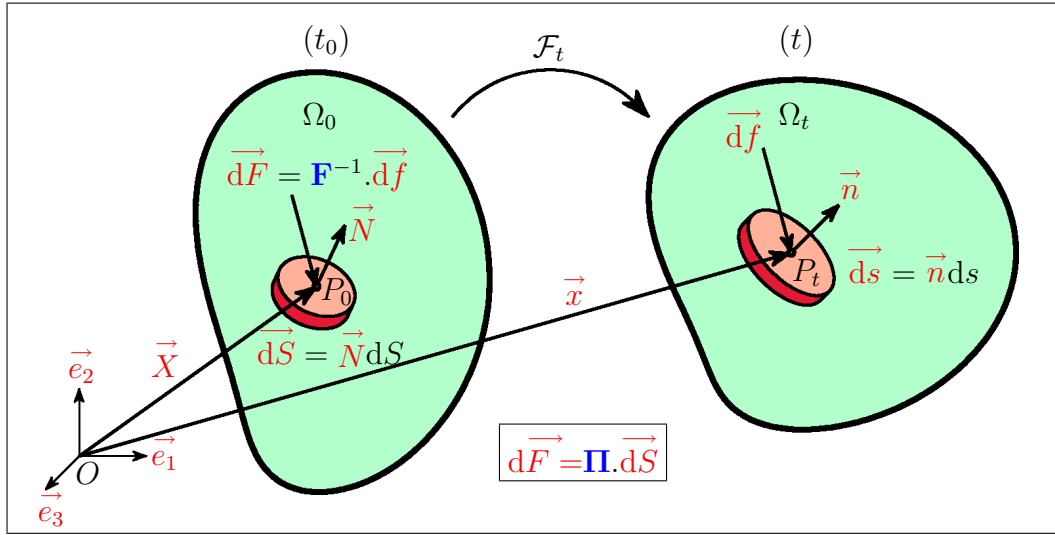


FIG. 3.7 – Définition du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Les développements de la section 3.2.1.2 nous ont appris que les particules de  $\mathcal{M}$  en contact avec cette surface matérielle et situées du côté de  $\vec{n}$  exercent sur elle une force élémentaire  $\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds)$  définie par


$$\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds) = \vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) ds \quad (3.44)$$

où  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  est le vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ . Si  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy en ce point et à cet instant, de (3.32) ainsi que de  $\vec{ds} = \vec{n} \cdot ds$ , on tire alors

$$\vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{ds} \quad (3.45)$$

et nous écrivons plus simplement, en omettant notamment les variables d'espace et de temps,

$$\vec{df} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{ds} \quad (3.46)$$

 [pap3222b.html](#) Dans une première tentative de construction d'un tenseur des contraintes lagrangien, considérons, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x})$ , la surface élémentaire  $\vec{dS}$  correspondant à  $\vec{ds}$ , c'est-à-dire constituée à l'instant de référence  $t_0$  des mêmes particules matérielles que  $\vec{ds}$  (figure 3.7). Soit alors  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur du second ordre défini par

$$\vec{df} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \vec{dS} \quad (3.47)$$

Si  $J$  désigne le déterminant de  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ , jacobien de la transformation  $\mathcal{F}_t$  au point  $P_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ , on a, avec (3.46) et compte tenu de (2.98),


$$\begin{aligned} \vec{df} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{ds} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (J^t \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{dS}) \\ &= (J \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1}) \cdot \vec{dS} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Comparant (3.47) et (3.48), nous obtenons alors

$$\boldsymbol{\Sigma} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1} \quad (3.49)$$

Le tenseur  $\boldsymbol{\Sigma}$  est appelé **tenseur des contraintes de Boussinesq**. Il n'est toutefois pas lagrangien. En effet, la relation (3.47) montre que ce tenseur relie la surface élémentaire  $\vec{dS}$ , grandeur vectorielle lagrangienne, à la force élémentaire  $\vec{df}$  s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , grandeur vectorielle eulérienne. Il ne peut donc qu'être un tenseur mixte (bâti sur les deux configurations  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$ ), comme l'illustre l'expression de ses composantes relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  auxquelles se trouvent attachés deux indices de nature différente (un indice minuscule et un indice majuscule).

$$\Sigma_{iK} = J \sigma_{ij} F_{Kj}^{-1} \quad \forall (i, K) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (3.50)$$

 [pap3222c.html](#) Un tenseur des contraintes lagrangien ne pouvant relier que deux grandeurs vectorielles lagrangiennes, on construit alors, par analogie avec la relation  $\vec{dX} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{dx}$ , la force élémentaire  $\vec{dF}$  telle que

$$\vec{dF} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{df} \quad (3.51)$$

et l'on introduit le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\Pi}$  défini par

$$\vec{dF} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{dS} \quad (3.52)$$

De (3.47) et (3.51), on tire ensuite

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{df} \\ &= \mathbf{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \vec{dS}) \\ &= (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \vec{dS} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ce qui donne, après comparaison avec (3.52),

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.54)$$

ou encore, compte tenu de (3.49),

$$\boldsymbol{\Pi} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1} \quad (3.55)$$


Le tenseur  $\mathbf{\Pi}$  est le **tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**. Il est totalement lagrangien, ainsi que le montre l'expression de ses composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  auxquelles sont à présent associés deux indices majuscules.

$$\boxed{\Pi_{KL} = JF_{Ki}^{-1}\sigma_{ij}F_{Lj}^{-1} \quad \forall (K, L) \in \{1, 2, 3\}^2} \quad (3.56)$$

### Remarques

1. Les tenseurs des contraintes de Boussinesq  $\Sigma$  et de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  sont également parfois appelés tenseurs des contraintes, respectivement, de Piola-Kirchhoff 1 (noté PK1) et de Piola-Kirchhoff 2 (noté PK2).
2. La signification physique du tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  est bien moins évidente que celle du tenseur eulérien des contraintes de Cauchy  $\sigma$ , en raison principalement du mode de construction de la force élémentaire  $\vec{dF}$  définie par (3.51). On notera en outre qu'il n'y a aucun lien entre cette force élémentaire et celle s'exerçant, à l'instant initial  $t_0$ , sur la facette de normale  $\vec{N} = \vec{dS}/\|\vec{dS}\|$  et d'aire élémentaire  $dS = \|\vec{dS}\|$  au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X}$ .

### 3.2.3 Relation fondamentale de la dynamique

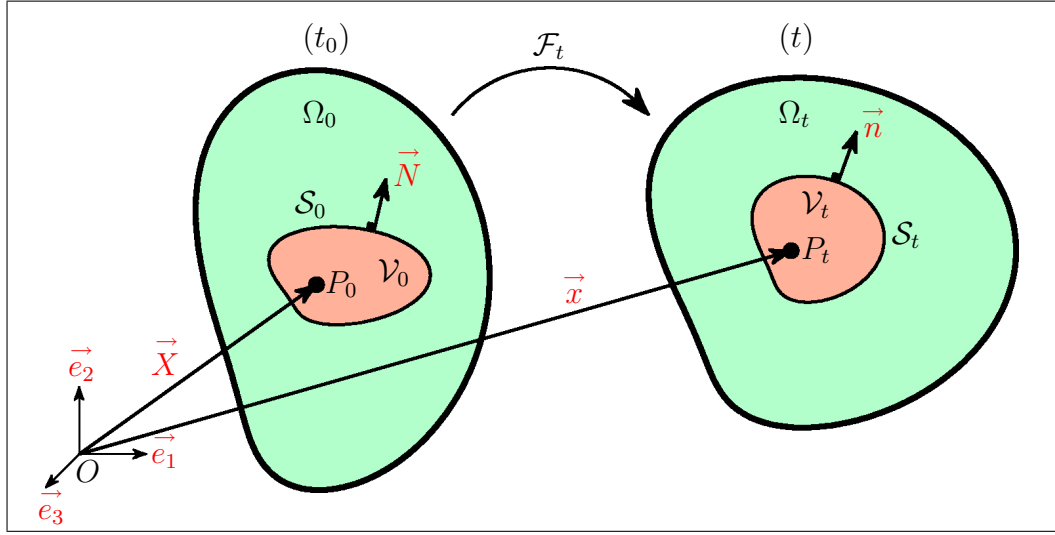
 **tab39.html** Soient  $\mathcal{M}$  un milieu continu et  $t$  l'instant courant quelconque mais fixé, et soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  un volume matériel fini occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à cet instant, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique (figure 3.8). Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $\mathcal{S}_t$  la frontière de  $\mathcal{V}_t$ , que l'on supposera "suffisamment régulière" pour qu'y puisse être défini presque partout le champ  $\mathbf{n} : \mathcal{S}_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des normales sortantes (c'est-à-dire dirigées vers l'extérieur de  $\mathcal{V}_t$ ).

Soit  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  le torseur des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$ , de résultante  $\vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t)$  et de moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}^e(\mathcal{V}_t)$  en l'origine  $O$  du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soit par ailleurs  $\mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t)$  le torseur dynamique (i.e. le torseur des quantités d'accélération) de ce volume matériel au même instant, de résultante  $\vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t)$  et de moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}^d(\mathcal{V}_t)$  en  $O$ . La relation fondamentale de la dynamique nous permet alors d'écrire


$$\boxed{\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t) = \mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t) \quad \forall t, \forall \mathcal{V} \subset \mathcal{M}} \quad (3.57)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t) = \vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t) \\ \vec{\mathcal{M}}^e(\mathcal{V}_t) = \vec{\mathcal{M}}^d(\mathcal{V}_t) \end{cases} \quad \forall t, \forall \mathcal{V} \subset \mathcal{M}} \quad (3.58)$$

FIG. 3.8 – Relation fondamentale de la dynamique appliquée au volume matériel  $\mathcal{V}$ 

### 3.2.3.1 Équations indéfinies eulériennes du mouvement

 [tab310.html](#) Intéressons-nous tout d'abord à l'égalité des résultantes des torseurs  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  et  $\mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t)$ . Si  $\rho : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}$  désigne le champ des masses volumiques du milieu matériel  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  et  $\gamma : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  celui des accélérations, on a

$$\vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) \gamma(\vec{x}, t) dv \quad (3.59)$$

Soit par ailleurs  $\mathbf{b} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  le champ des actions mécaniques à distance s'exerçant à l'instant  $t$  sur  $\Omega_t$  (hypothèse 4 page 158) et soit  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  le vecteur contrainte sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point courant  $P_t$  de  $\mathcal{S}_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à cet instant (figure 3.8). La résultante  $\vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t)$  des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  est alors somme de deux termes. Le premier, induit par les actions mécaniques à distance agissant en tout point de  $\mathcal{V}_t$ , est donné par

$$\vec{\mathcal{R}}_d^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) \mathbf{b}(\vec{x}, t) dv \quad (3.60)$$

tandis que le second, associé aux actions de contact sur  $\mathcal{S}_t$  dues aux particules de  $\mathcal{M}$  situées à l'extérieur de  $\mathcal{V}_t$ , a pour expression

$$\vec{\mathcal{R}}_c^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{S}_t} \vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) ds \quad (3.61)$$

Si  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^9$  désigne le champ tensoriel des contraintes de Cauchy, on a aussi, compte tenu de (3.32),

$$\vec{\mathcal{R}}_c^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds \quad (3.62)$$

La résultante du torseur des actions extérieures  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  vaut donc

$$\vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) \mathbf{b}(\vec{x}, t) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds \quad (3.63)$$

et son égalité avec la résultante  $\vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t)$  du torseur dynamique fournie par (3.59) donne

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho(\vec{x}, t) [\mathbf{b}(\vec{x}, t) - \boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t)] dv + \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds = \vec{0} \quad (3.64)$$

Exprimons la relation (3.64) relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Nous obtenons, en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho (b_i - \gamma_i) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j ds = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.65)$$

Or on a, par application du théorème d'Ostrogradski,

$$\int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.66)$$

Reportant (3.66) dans (3.65), on obtient alors

$$\int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho (b_i - \gamma_i) \right] dv = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.67)$$

Le volume matériel  $\mathcal{V}$  étant quelconque, on en déduit, presque partout sur  $\Omega_t$ , les équations locales

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho b_i = \rho \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.68)$$

appelées **équations indéfinies du mouvement en variables d'Euler**, c'est-à-dire la relation vectorielle intrinsèque de champs<sup>4</sup>

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \mathbf{b}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t) \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.69)$$

<sup>4</sup>Nous désignons ici par  $\mathbf{div}_x$  l'opérateur différentiel  $\mathbf{div}_x^{(2)}$  défini dans l'annexe B (section B.2.1 page 400)

### Remarques

1. Si la relation vectorielle de champs (3.69) est intrinsèque, les trois équations scalaires (3.68) ne valent quant à elles que pour un système de coordonnées spatiales cartésiennes.
2. Les équations indéfinies du mouvement, généralisation aux milieux déformables de la relation  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$  de la mécanique du point matériel, établissent le lien entre les efforts intérieurs modélisés par le champ tensoriel des contraintes de Cauchy  $\sigma$  et les actions mécaniques à distance (densité massique de forces  $\mathbf{b}$ ) ou inertielles (accélération  $\gamma$ ).
3. Lorsque  $\gamma = \mathbf{0}$ , les équations (3.68) ou (3.69) sont dénommées **équations indéfinies de l'équilibre**.
4. Soit  $\mathcal{T}^c(\mathcal{V}_t)$  le torseur cinétique (i.e. le torseur des quantités de mouvement) du volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, de résultante  $\vec{\mathcal{R}}^c(\mathcal{V}_t)$  et de moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}^c(\mathcal{V}_t)$  en  $O$ . De (1.95) (c'est la remarque de la section 1.5.1 du chapitre 1, page 55), on tire

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{R}}^c(\mathcal{V}_t) = \vec{\mathcal{R}}^d(\mathcal{V}_t) \quad (3.70)$$


ainsi que

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{M}}^c(\mathcal{V}_t) = \vec{\mathcal{M}}^d(\mathcal{V}_t) \quad (3.71)$$

de sorte que l'on a

$$\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t) = \mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t) = \frac{d}{dt}\mathcal{T}^c(\mathcal{V}_t) \quad (3.72)$$

#### 3.2.3.2 Équations indéfinies lagrangiennes du mouvement

 [pap3232.html](#) Reconsidérons ici l'égalité (3.64) et désignons par  $\vec{ds}$  la surface matérielle élémentaire associée à la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point courant  $P_t$  de  $\mathcal{S}_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  (figure 3.8). On a donc  $\vec{ds} = \vec{n}ds$  et il vient, en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho(\mathbf{b} - \gamma) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \sigma \cdot \vec{ds} = \vec{0} \quad (3.73)$$

Soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$ , et soit  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{V}_t) \subset \Omega_0$  le domaine de l'espace physique qu'occupe le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ , de frontière  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{S}_t)$ . Effectuons alors, dans les deux intégrales de l'égalité (3.73), le changement de variables d'espace  $\vec{X} \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$  associé à cette transformation. Nous obtenons, avec (1.26) et (2.98),

$$\int_{\mathcal{V}_0} \rho(\mathbf{b} - \gamma) J dV + \int_{\mathcal{S}_0} \sigma \cdot (J^t \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{dS}) = \vec{0} \quad (3.74)$$

Soit alors  $\vec{N} = \frac{\vec{dS}}{\|\vec{dS}\|}$  et  $dS = \|\vec{dS}\|$ . On a donc  $\vec{dS} = \vec{N}dS$  et il vient, compte tenu de l'expression (3.49) du tenseur des contraintes de Boussinesq  $\Sigma$ ,

$$\int_{\mathcal{V}_0} J\rho(\mathbf{b} - \boldsymbol{\gamma}) dV + \int_{\mathcal{S}_0} \Sigma \cdot \vec{N} dS = \vec{0} \quad (3.75)$$

Exprimant à présent la relation (3.75) relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_0} J\rho(b_i - \gamma_i) dV + \int_{\mathcal{S}_0} \Sigma_{iK} N_K dS = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.76)$$

Par application du théorème d'Ostrogradski, nous avons par ailleurs

$$\int_{\mathcal{S}_0} \Sigma_{iK} N_K dS = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial \Sigma_{iK}}{\partial X_K} dV \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.77)$$

Reportons ensuite (3.77) dans (3.76). Il vient

$$\int_{\mathcal{V}_0} \left[ \frac{\partial \Sigma_{iK}}{\partial X_K} + J\rho(b_i - \gamma_i) \right] dV = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.78)$$

Le volume matériel  $\mathcal{V}$  étant quelconque, on en déduit alors, presque partout sur  $\Omega_0$ , les équations locales

$$\partial_K \Sigma_{iK} + J\rho b_i = J\rho \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.79)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque de champs vectoriels

$$\operatorname{div}_X \Sigma(\vec{X}, t) + J(\vec{X}, t)\rho(\vec{X}, t)\mathbf{b}(\vec{X}, t) = J(\vec{X}, t)\rho(\vec{X}, t)\boldsymbol{\gamma}(\vec{X}, t) \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.80)$$

Tirant enfin parti de l'équation locale (1.102) de conservation de la masse en variables de Lagrange, nous obtenons les **équations indéfinies lagrangiennes du mouvement**

$$\operatorname{div}_X \Sigma(\vec{X}, t) + \rho(\vec{X}, t_0)\mathbf{b}(\vec{X}, t) = \rho(\vec{X}, t_0)\boldsymbol{\gamma}(\vec{X}, t) \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.81)$$

dont l'expression relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est, en posant  $\rho_0 = \rho(\cdot, t_0)$  tout en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\partial_K \Sigma_{iK} + \rho_0 b_i = \rho_0 \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.82)$$



### Remarques


1. Tout comme les relations (3.68), les trois équations scalaires (3.79) ou (3.82) ne valent que dans un système de coordonnées spatiales cartésiennes.
2. Les équations indéfinies lagrangiennes du mouvement s'écrivent aussi, en tirant parti de la définition (3.54) du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  tout en omettant les variables d'espace et de temps,

$$\mathbf{div}_X(\mathbf{F}\mathbf{\Pi}) + \rho_0\mathbf{b} = \rho_0\boldsymbol{\gamma} \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.83)$$

et l'on a donc, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\partial_K(F_{iL}\Pi_{LK}) + \rho_0 b_i = \rho_0 \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.84)$$

### 3.2.3.3 Symétrie des tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff

 [tab311.html](#) Intéressons-nous à présent à l'égalité des moments résultants des torseurs  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  et  $\mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t)$  en l'origine  $O$  du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On a, avec les notations introduites dans la section 3.2.3.1,

$$\vec{\mathcal{M}}^d(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \vec{x} \wedge [\rho(\vec{x}, t)\boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t)] dv \quad (3.85)$$

Le moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}^e(\mathcal{V}_t)$  des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  est quant à lui, comme  $\vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t)$ , somme de deux termes. Le premier est dû aux actions mécaniques à distance et vaut

$$\vec{\mathcal{M}}_d^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \vec{x} \wedge [\rho(\vec{x}, t)\mathbf{b}(\vec{x}, t)] dv \quad (3.86)$$

Le second est induit par les actions de contact sur la frontière  $\mathcal{S}_t$  de  $\mathcal{V}_t$  et a pour expression, compte tenu de (3.32),

$$\vec{\mathcal{M}}_c^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{S}_t} \vec{x} \wedge [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}] ds \quad (3.87)$$

On a donc

$$\vec{\mathcal{M}}^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \vec{x} \wedge [\rho(\vec{x}, t)\mathbf{b}(\vec{x}, t)] dv + \int_{\mathcal{S}_t} \vec{x} \wedge [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}] ds \quad (3.88)$$

et l'égalité de ce moment avec celui  $\vec{\mathcal{M}}^d(\mathcal{V}_t)$  du torseur dynamique  $\mathcal{T}^d(\mathcal{V}_t)$  défini par (3.85) donne

$$\int_{\mathcal{V}_t} \vec{x} \wedge [\rho(\vec{x}, t) (\mathbf{b}(\vec{x}, t) - \boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t))] dv + \int_{\mathcal{S}_t} \vec{x} \wedge [\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}] ds = \vec{0} \quad (3.89)$$

Soit alors  $\vec{e}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé. Projetons l'égalité vectorielle (3.89) sur  $\vec{e}$ . Ce vecteur étant indépendant des variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , il vient, en omettant ces dernières ainsi que celle de temps dans un souci de simplicité et compte tenu des propriétés du produit mixte de trois vecteurs,

$$\int_{\mathcal{V}_t} \left( \vec{e} | \vec{x} | \rho (\mathbf{b} - \gamma) \right) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \left( \vec{e} | \vec{x} | \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \right) ds = 0 \quad (3.90)$$

Exprimons à présent la relation (3.90) relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On a, en tirant parti de la notation indicielle ainsi que du tenseur d'orientation  $\epsilon$ ,

$$\int_{\mathcal{V}_t} \epsilon_{ijk} e_i x_j \rho (b_k - \gamma_k) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \epsilon_{ijk} e_i x_j \sigma_{kl} n_l ds = 0 \quad (3.91)$$

On a par ailleurs, en appliquant le théorème d'Ostrogradski,

$$\int_{\mathcal{S}_t} \epsilon_{ijk} e_i x_j \sigma_{kl} n_l ds = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} e_i x_j \sigma_{kl}) dv \quad (3.92)$$

Les composantes du vecteur  $\vec{e}$  ainsi que celles du tenseur d'orientation  $\epsilon$  étant indépendantes des variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , il vient

$$\begin{aligned} \partial_l (\epsilon_{ijk} e_i x_j \sigma_{kl}) &= \epsilon_{ijk} e_i \partial_l x_j \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} e_i x_j \partial_l \sigma_{kl} \\ &= \epsilon_{ijk} e_i \delta_{lj} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} e_i x_j \partial_l \sigma_{kl} \\ &= \epsilon_{ijk} e_i \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} e_i x_j \partial_l \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (3.93)$$

et l'on a donc

$$\int_{\mathcal{S}_t} \epsilon_{ijk} e_i x_j \sigma_{kl} n_l ds = \int_{\mathcal{V}_t} (\epsilon_{ijk} e_i \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} e_i x_j \partial_l \sigma_{kl}) dv \quad (3.94)$$

Reportant cette égalité dans (3.91), nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_t} \epsilon_{ijk} e_i x_j \underbrace{[\partial_l \sigma_{kl} + \rho (b_k - \gamma_k)]}_{=0} dv + \int_{\mathcal{V}_t} \epsilon_{ijk} e_i \sigma_{kj} dv = 0 \quad (3.95)$$

Remarquons que la première intégrale de cette égalité est nulle en vertu de (3.68), de sorte qu'il reste simplement

$$\int_{\mathcal{V}_t} \epsilon_{ijk} e_i \sigma_{kj} dv = 0 \quad (3.96)$$

Le volume matériel  $\mathcal{V}$  étant quelconque, on en déduit, presque partout sur  $\Omega_t$ , les équations locales

$$\epsilon_{ijk} e_i \sigma_{kj} = 0 \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.97)$$

qui une fois développées s'écrivent


$$e_1(\sigma_{32} - \sigma_{23}) + e_2(\sigma_{13} - \sigma_{31}) + e_3(\sigma_{21} - \sigma_{12}) = 0 \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.98)$$

Prenant alors successivement pour  $\vec{e}$  les vecteurs de base du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons finalement

$$\begin{cases} \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} \end{cases} \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.99)$$

c'est-à-dire la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$

$${}^t\sigma(\vec{x}, t) = \sigma(\vec{x}, t) \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad (3.100)$$

 [pap3233.html](#) De l'expression (3.55) du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\Pi$ , il découle enfin que l'on a aussi

$${}^t\Pi(\vec{X}, t) = \Pi(\vec{X}, t) \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)} \quad (3.101)$$


### Remarques [tab312.html](#)

1. Les équations (3.68) ou (3.69) ainsi que (3.81) ou (3.82) sont qualifiées d'indéfinies car elles sont insuffisantes à fournir la solution d'un problème d'évolution ou d'équilibre de milieu continu. Considérons en effet le problème de l'équilibre d'un solide déformable en petites transformations. Les champs scalaires inconnus sont alors au nombre de 15 (3 composantes du déplacement  $\mathbf{u}$ , 6 composantes du tenseur linéarisé des petites déformations  $\epsilon$  et 6 composantes du tenseur symétrique des contraintes de Cauchy), tandis que nous ne disposons que de 9 équations (les trois équations indéfinies de l'équilibre et les six relations fournissant les composantes de  $\epsilon$  en fonction de celles de  $\mathbf{u}$ ). Il manque donc 6 équations propres au milieu continu considéré, correspondant aux relations existant entre les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\epsilon$  et appelées pour cela équations de comportement (chapitre 4).
2. Contrairement aux tenseurs des contraintes de Cauchy  $\sigma$  et de Piola-Kirchhoff  $\Pi$ , le tenseur des contraintes de Boussinesq  $\Sigma$  n'est pas symétrique, comme l'on peut aisément s'en rendre compte en considérant son expression (3.49) en fonction de  $\sigma$ , ou encore l'égalité (3.54) le reliant à  $\Pi$ .

3. L'hypothèse 4 page 158 (absence de densités massiques et surfaciques de couples) est essentielle à la symétrie des tenseurs des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Pi}$ . Au sein de milieux continus électrisés ou magnétisés (en magnétohydrodynamique par exemple) ces tenseurs ne sont plus symétriques ainsi que l'on peut facilement s'en convaincre en reconsidérant les développements qui précèdent, les égalités (3.100) et (3.101) étant alors remplacées par des expressions reliant ces tenseurs au champ de densité massique de couples. De tels milieux, dont les cristaux liquides de quartz présents dans nos montres constituent un exemple, sont dénommés **milieux de Cosserat**.

### 3.3 Dérivées matérielles des contraintes

#### 3.3.1 Dérivées matérielles des tenseurs des contraintes

 [pap331.html](#) Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\Pi}$  étant lagrangien, sa dérivée matérielle s'identifie, compte tenu des considérations développées dans la section 1.4.1, à sa dérivée partielle par rapport au temps et l'on a donc

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t} \quad (3.102)$$

Reconsidérons alors l'expression (3.55) reliant ce tenseur au tenseur eulérien des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . On a alors

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} \quad (3.103)$$

et il vient

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{-\dot{J}}{J^2} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \dot{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \dot{\mathbf{F}} \quad (3.104)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.56) et (1.61),

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= -J \operatorname{div}_x \mathbf{v} \frac{1}{J^2} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t (\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}) \\ &= -\operatorname{div}_x \mathbf{v} \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \mathbf{G} \\ &= -\operatorname{div}_x \mathbf{v} \left( \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} \right) + \mathbf{G} \cdot \left( \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} \right) + \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \left( \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot {}^t \mathbf{F} \right) \cdot {}^t \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.105)$$

c'est-à-dire, en tirant à nouveau parti de (3.103),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{G} - \boldsymbol{\sigma} \operatorname{div}_x \mathbf{v} \quad (3.106)$$

Considérant à présent l'égalité (3.54) reliant  $\boldsymbol{\Pi}$  au tenseur mixte des contraintes de Boussinesq  $\boldsymbol{\Sigma}$ , nous avons

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \quad (3.107)$$

et l'on en déduit, compte tenu de (1.56),


$$\begin{aligned}
 \dot{\Sigma} &= \dot{\mathbf{F}}.\Pi + \mathbf{F}.\dot{\Pi} \\
 &= (\mathbf{G}.\mathbf{F}).\Pi + \mathbf{F}.\dot{\Pi} \\
 &= \mathbf{G}.\mathbf{F}.\Pi + \mathbf{F}.\dot{\Pi} \\
 &= \mathbf{G}.\mathbf{(F}.\Pi) + \mathbf{F}.\dot{\Pi}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

ce qui donne, avec (3.107),


$$\boxed{\dot{\Sigma} = \mathbf{F}.\dot{\Pi} + \mathbf{G}.\Sigma} \tag{3.109}$$

### 3.3.2 Dérivée matérielle du vecteur contrainte

Soit  $\Omega_t$  la configuration actuelle du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. Soient par ailleurs  $\vec{x} \in \Omega_t$  et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire, également quelconques mais fixés. Nous nous proposons, dans cette section, d'établir l'expression de la dérivée matérielle du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ .

 [pap332a.html](#) Intéressons-nous tout d'abord à la surface matérielle élémentaire  $\vec{ds} = \vec{n}.ds$  de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$ . Soit  $\mathcal{F}_t$  la transformation du milieu continu  $\mathcal{M}$  relative à l'instant  $t$  et soit, au point  $P_0$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  extrémité du vecteur  $\vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x})$  (figure 3.7 page 168),  $\vec{dS}$  la surface élémentaire correspondant à  $\vec{ds}$ , c'est-à-dire constituée à l'instant de référence  $t_0$  de mêmes particules que  $\vec{ds}$ . On a alors (c'est la relation 2.98), en omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\vec{ds} = J^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS} \tag{3.110}$$

et l'on en déduit, en tirant parti de (1.58) et (1.61),  [pap332b.html](#)


$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{ds}) &= j^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS} + J^t \dot{\mathbf{F}}^{-1}.\vec{dS} \\
 &= J \operatorname{div}_x \mathbf{v}^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS} + J^t (-\mathbf{F}^{-1}.\mathbf{G}).\vec{dS} \\
 &= J \operatorname{div}_x \mathbf{v}^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS} - J^t \mathbf{G}.\mathbf{F}^{-1}.\vec{dS} \\
 &= \operatorname{div}_x \mathbf{v}^t (J^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS}) - \mathbf{G}.\mathbf{(} J^t \mathbf{F}^{-1}.\vec{dS})
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

c'est-à-dire, en réutilisant (3.110),

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{ds}) = \operatorname{div}_x \mathbf{v}^t \vec{ds} - \mathbf{G}.\vec{ds}} \tag{3.112}$$

Exprimant cette relation relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous obtenons

$$\boxed{\dot{ds}_i = \operatorname{div}_x \mathbf{v}^t ds_i - G_{ji} ds_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}} \tag{3.113}$$

 [pap332c.html](#) De  $ds^2 = \|\vec{ds}\|^2$ , on tire par ailleurs, en effectuant les développements relativement à ce même repère,

$$ds^2 = ds_i ds_i \quad (3.114)$$

ce qui donne, compte tenu de (3.113) ainsi que de la décomposition (2.117) du gradient des vitesses  $\mathbf{G}$  en parties symétrique  $\mathbf{D}$  et antisymétrique  $\mathbf{W}$ ,


$$\begin{aligned} ds \dot{ds} &= ds_i \dot{ds}_i \\ &= ds_i (\operatorname{div}_x \mathbf{v} ds_i - G_{ji} ds_j) \\ &= \operatorname{div}_x \mathbf{v} ds_i ds_i - ds_j G_{ji} ds_i \\ &= \operatorname{div}_x \mathbf{v} ds_i ds_i - ds_j (D_{ji} + W_{ji}) ds_i \\ &= \operatorname{div}_x \mathbf{v} ds_i ds_i - ds_j D_{ji} ds_i - \underbrace{ds_j W_{ji} ds_i}_{=0} \end{aligned} \quad (3.115)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$ds \dot{ds} = \operatorname{div}_x \mathbf{v} ds^2 - \vec{ds} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{ds} \quad (3.116)$$

et l'on en déduit, puisque  $\vec{ds} = \vec{n} \cdot ds$ ,


$$\dot{ds} = (\operatorname{div}_x \mathbf{v} - \vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) ds \quad (3.117)$$

 [pap332d.html](#) De  $\vec{n} = \frac{\vec{ds}}{ds}$ , on tire ensuite, en tirant parti de (3.112) ainsi que de (3.117),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{n}) &= -\frac{1}{ds^2} \frac{d}{dt}(ds) \vec{ds} + \frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(\vec{ds}) \\ &= -\frac{1}{ds} (\operatorname{div}_x \mathbf{v} - \vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{ds} + \frac{1}{ds} (\operatorname{div}_x \mathbf{v} \vec{ds} - {}^t \mathbf{G} \cdot \vec{ds}) \\ &= (-\operatorname{div}_x \mathbf{v} + \vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \frac{\vec{ds}}{ds} + \operatorname{div}_x \mathbf{v} \frac{\vec{ds}}{ds} - {}^t \mathbf{G} \cdot \frac{\vec{ds}}{ds} \end{aligned} \quad (3.118)$$

ce qui donne, après simplification,

$$\frac{d}{dt}(\vec{n}) = -{}^t \mathbf{G} \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.119)$$

 [pap332e.html](#) Intéressons-nous à présent au vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ . Si  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy en ce point et à cet instant, on a  $\vec{\sigma} = \sigma \cdot \vec{n}$  et il vient, compte tenu de (3.119),


$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}) &= \dot{\sigma} \cdot \vec{n} + \sigma \cdot \frac{d}{dt}(\vec{n}) \\ &= \dot{\sigma} \cdot \vec{n} + \sigma \cdot [-{}^t \mathbf{G} \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{n}] \\ &= \dot{\sigma} \cdot \vec{n} - (\sigma \cdot {}^t \mathbf{G}) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \sigma \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (3.120)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}) = [\dot{\sigma} - \sigma \cdot {}^t \mathbf{G} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \sigma] \cdot \vec{n} \quad (3.121)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}) = (\dot{\sigma} - \sigma \cdot {}^t \mathbf{G}) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{\sigma} \quad (3.122)$$

 [pap332f.html](#) Considérant enfin la force élémentaire  $\vec{df}$  s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , on a  $\vec{df} = \vec{\sigma} ds = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} ds = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{ds}$  (c'est la relation (3.46)), ce qui donne, avec (3.112),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{df}) &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{ds} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{ds}) \\ &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{ds} + \boldsymbol{\sigma} \cdot [\text{div}_x \mathbf{v} \vec{ds} - {}^t\mathbf{G} \cdot \vec{ds}] \\ &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{ds} + \text{div}_x \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{ds} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t\mathbf{G}) \cdot \vec{ds} \end{aligned} \quad (3.123)$$

et l'on a

$$\frac{d}{dt}(\vec{df}) = [\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \text{div}_x \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t\mathbf{G}] \cdot \vec{ds} \quad (3.124)$$

ou également


$$\frac{d}{dt}(\vec{df}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t\mathbf{G}) \cdot \vec{ds} + \text{div}_x \mathbf{v} \vec{df} \quad (3.125)$$

## 3.4 Étude du tenseur des contraintes de Cauchy

La signification physique aisément accessible à l'intuition du tenseur eulérien des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , que ne possède pas le tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\Pi}$ , rend l'utilisation du premier naturelle pour l'écriture des lois de comportement (chapitre 4) et justifie l'étude particulière qui en est faite dans cette section. Toutefois, les développements qui suivent ne nécessitant pas d'autre propriété de ce tenseur que sa symétrie, ceux-ci sont directement transposables à  $\boldsymbol{\Pi}$ .

Soit  $\Omega_t$  la configuration actuelle du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, et soit  $\vec{x} \in \Omega_t$  donné. Dans tout ce qui suit, nous omettrons le plus souvent les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité et désignerons simplement par  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ .

### 3.4.1 Théorème de Cauchy

 [tab313.html](#) Soient  $\vec{n}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}'$ ) un vecteur unitaire et  $\vec{\sigma}_n$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{\sigma}_{n'}$ ) le vecteur contrainte sur la facette de normale  $\vec{n}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}'$ ) au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ . On a alors, compte tenu de (3.32),

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_n &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \\ \vec{\sigma}_{n'} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}' \end{cases} \quad (3.126)$$

et il vient, en exploitant la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}' &= \vec{n}' \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}) \\ &= \vec{n}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}' \\ &= \vec{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}')\end{aligned}\tag{3.127}$$

c'est-à-dire

$$\vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\sigma}_{n'} \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n}, \forall \vec{n}'\tag{3.128}$$

Soient à présent  $\sigma_{nn}$  (resp<sup>t</sup>  $\sigma_{n'n'}$ ) la contrainte normale sur la facette de normale  $\vec{n}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n}'$ ) et  $\vec{\tau}_n$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{\tau}_{n'}$ ) la composante tangentielle de  $\vec{\sigma}_n$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{\sigma}_{n'}$ ). On a, compte tenu de (3.18),

$$\begin{cases} \vec{\tau}_n &= \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn} \vec{n} \\ \vec{\tau}_{n'} &= \vec{\sigma}_{n'} - \sigma_{n'n'} \vec{n}' \end{cases}\tag{3.129}$$

Supposons  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  orthogonaux. De (3.128) et (3.129), on déduit alors


$$\vec{\tau}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\tau}_{n'} \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n}, \forall \vec{n}' \perp \vec{n}\tag{3.130}$$

C'est le

**Théorème 8 (Cauchy - Réciprocité des contraintes tangentielles)** *Sur deux facettes orthogonales au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , les projections sur la normale à l'autre facette des composantes tangentielles des vecteurs contraintes s'exerçant sur chacune d'elles sont égales en module et toutes deux dirigées à l'identique ou à l'inverse de ces normales, c'est-à-dire pointent ou non simultanément vers l'arête commune aux deux facettes.*

La figure 3.9 illustre ce résultat.

### 3.4.2 Directions principales des contraintes

 [tab314.html](#) Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  étant symétrique, sa matrice représentative relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est diagonalisable. Plus précisément, il existe, au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , un repère orthonormé direct  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  relativement auquel la matrice représentative de  $\boldsymbol{\sigma}$  est diagonale

$$\boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}\tag{3.131}$$



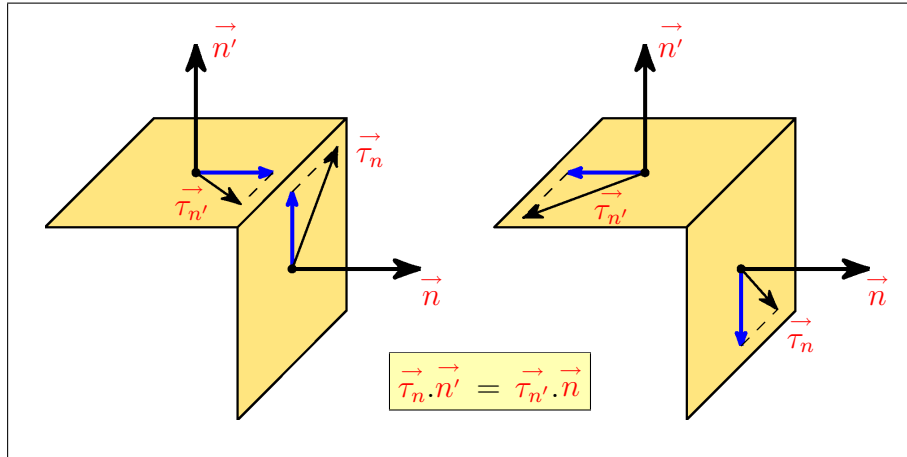


FIG. 3.9 – Réciprocité des contraintes tangentielles

Ce repère est le **repère des contraintes principales**, ou **repère principal de contrainte**. Les directions propres  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  sont les **directions principales de contrainte**, tandis que les valeurs propres associées  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont appelées **contraintes principales**.

Les directions principales de contrainte au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  possèdent la propriété physique suivante. Le vecteur contrainte s'exerçant en ce point et à cet instant sur la facette de normale  $\vec{n} = \vec{j}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , est donné, compte tenu de (3.32) et (3.131), par

$$\vec{n} = \vec{j}_\alpha \implies \vec{\sigma}_n = \sigma_\alpha \vec{n} \quad \forall \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (3.132)$$

Ce vecteur est donc colinéaire à la normale et sa composante tangentielle est nulle. Cette propriété est évidemment caractéristique des directions principales de contrainte, c'est le

**Théorème 9 (Directions principales de contrainte)** *Si sur deux facettes orthogonales au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  les vecteurs contraintes s'exerçant sur chacune d'elles sont colinéaires à leur normale (i.e. si les composantes tangentielles de ces deux vecteurs sont nulles), ces normales sont directions principales de contrainte, la troisième direction principale étant alors celle qui leur est orthogonale.*

### 3.4.3 Déviateur des contraintes

 [tab315.html](#) On donne ici la

**Définition 16 (Déviateur des contraintes)** Soit  $\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , et soit  $\sigma_m(\vec{x}, t) = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)$  la contrainte moyenne en ce point et à cet instant. On appelle déviateur des contraintes le tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{s}(\vec{x}, t)$  défini par

$$\mathbf{s}(\vec{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) - \sigma_m(\vec{x}, t) \boldsymbol{\delta} \quad (3.133)$$

On a donc, en omettant à nouveau les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s} \quad (3.134)$$

Le tenseur isotrope  $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$  est appelé partie isotrope, ou encore partie sphérique, de  $\boldsymbol{\sigma}$ . La relation (3.32) montre alors que les vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_n$  qui lui correspondent sont de la forme  $\vec{\sigma}_n = \sigma_m \vec{n}$ . Ils sont donc colinéaires à  $\vec{n}$  pour tout choix de cette direction, la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  étant par ailleurs indépendante de  $\vec{n}$  (isotropie) et égale à la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .

Pour un tel état de contrainte isotrope dont le fluide au repos de la section 3.1.1 constitue un exemple, toute direction est direction principale et le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur une facette de normale  $\vec{n}$  quelconque est réduit à sa composante normale (absence de contrainte tangentielle).



Le déviateur des contraintes  $\mathbf{s}$  est également appelé partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$  et l'on a, par construction et compte tenu de (3.41),

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{s} &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - \text{tr } (\sigma_m \boldsymbol{\delta}) \\ &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \text{tr } \boldsymbol{\delta} \\ &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - 3\sigma_m \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

À la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$  est donc associée une contrainte moyenne nulle ( $\text{tr } \mathbf{s} = 0$ ).

**Remarque** Si  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est réduit à sa partie sphérique  $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$ , et l'état de contrainte correspondant est qualifié de purement isotrope (cas du fluide au repos). Lorsque  $\sigma_m = 0$ , on a  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}$ , et l'état de contrainte est alors dit purement déviatorique.

### 3.4.4 Invariants scalaires du tenseur des contraintes

 [tab316.html](#)  [pap344a.html](#) Désignant simplement par  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés, nous nous proposons ici d'introduire trois invariants scalaires de ce tenseur couramment utilisés pour l'écriture des lois de comportement et notamment des critères de limite élastique (chapitre 4).

Le premier invariant de  $\boldsymbol{\sigma}$ , noté  $I_1$ , n'est autre que la contrainte moyenne  $\sigma_m$  introduite dans la section 3.2.2.1 (remarque 3 page 167)

$$I_1 = \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (3.136)$$

Les deuxième et troisième invariants de ce tenseur sont quant à eux notés  $J_2$  et  $J_3$  et s'expriment à l'aide du déviateur des contraintes  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$ , comme suit,

$$\begin{cases} J_2 = \text{tr } \mathbf{s}^2 \\ J_3 = \text{tr } \mathbf{s}^3 \end{cases} \quad (3.137)$$

Notons que l'on a, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de la symétrie de  $\mathbf{s}$ ,

$$\begin{cases} J_2 = \text{tr } \mathbf{s}^2 \\ = s_{ij} s_{ji} \\ = s_{ij} s_{ij} \\ = \|\mathbf{s}\|^2 \end{cases} \quad (3.138)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\sqrt{J_2} = \|\mathbf{s}\| \quad (3.139)$$

Soient par ailleurs  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  (resp<sup>t</sup>  $s_1, s_2$  et  $s_3$ ) les valeurs principales de  $\boldsymbol{\sigma}$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{s}$ ). Les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{s}$  ayant par construction mêmes directions principales, de  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$ , on tire

$$\begin{cases} s_1 = \sigma_1 - \sigma_m \\ s_2 = \sigma_2 - \sigma_m \\ s_3 = \sigma_3 - \sigma_m \end{cases} \quad (3.140)$$

Considérant alors les expressions (3.136) et (3.137) de  $I_1, J_2$  et  $J_3$ , nous obtenons

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ J_2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \\ J_3 = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \end{cases} \quad (3.141)$$

Enfin, de  $\text{tr } \mathbf{s} = 0$ , on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (s_1 + s_2 + s_3)^3 \\ = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + 3(s_1s_2^2 + s_2s_1^2 + s_1s_3^2 + s_3s_1^2 + s_2s_3^2 + s_3s_2^2) + 6s_1s_2s_3 \\ = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 + 3[s_1^2(s_2 + s_3) + s_2^2(s_1 + s_3) + s_3^2(s_1 + s_2)] + 6s_1s_2s_3 \\ = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 - 3(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) + 6s_1s_2s_3 \\ = 6s_1s_2s_3 - 2(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \end{array} \right. \quad (3.142)$$

ce qui donne

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 = 3s_1s_2s_3 \quad (3.143)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\text{tr } \mathbf{s}^3 = 3 \det \mathbf{s} \quad (3.144)$$

et l'on a donc également

$$J_3 = 3 \det \mathbf{s} \quad (3.145)$$

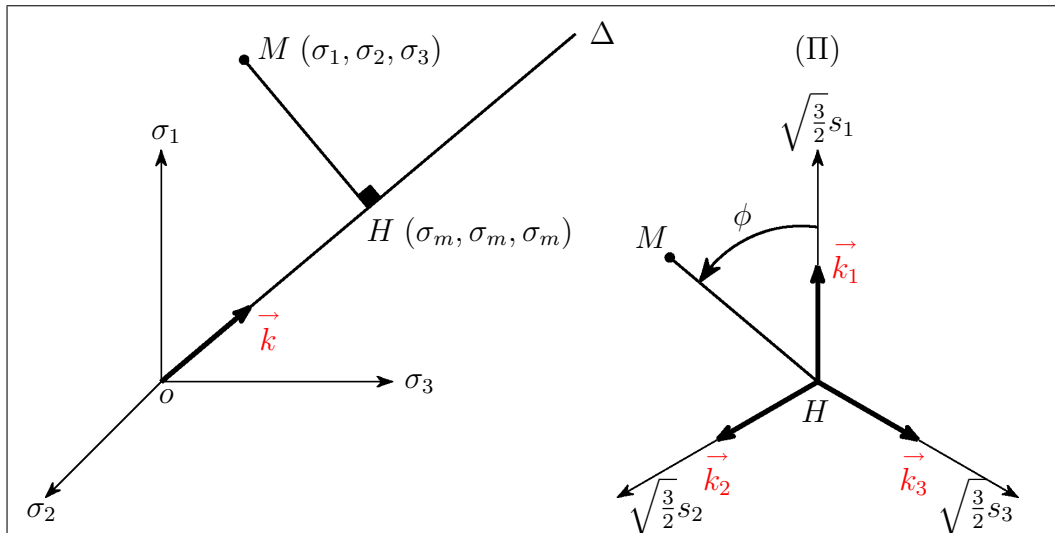



FIG. 3.10 – Système d'axes orthonormés associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$

 [pap344b.html](#) Tentant à présent de dégager la signification physique des invariants scalaires  $I_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ , considérons le système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  d'axes orthonormés direct d'origine  $o$  de  $\mathbb{R}^3$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . À ce système et à l'état de contrainte au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  défini par  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond alors, ainsi que l'illustre la figure 3.10, le point  $M$  de coordonnées  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Soit par ailleurs  $\Delta$  la trisectrice, de direction le vecteur unitaire  $\vec{k}$  de composantes

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

et soit  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$ . On a  [pap344c.html](#)

$$\begin{aligned}\overline{oH} &= \vec{k} \cdot \overline{oM} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\quad (3.147)$$

c'est-à-dire, puisque  $I_1 = \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\overline{oH} = \sqrt{3}I_1 = \sqrt{3}\sigma_m \quad (3.148)$$

On en déduit alors, en tirant parti de (3.146),

$$\overline{oH} = \overline{oH} \vec{k} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

ce qui donne


$$\begin{aligned}\overline{HM} &= \overline{oM} - \overline{oH} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.150)$$

et l'on a donc, compte tenu de (3.140),

$$\overline{HM} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

c'est-à-dire, avec (3.141),

$$\sqrt{J_2} = \|\overline{HM}\| \quad (3.152)$$

 [pap344d.html](#) On appelle plan déviatorique passant par  $M$ , et l'on note  $(\Pi)$ , le plan orthogonal en  $H$  à  $\Delta$ . Soient alors  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  et  $\vec{k}_3$  les vecteurs unitaires de  $(\Pi)$  associés aux projections orthogonales sur ce plan des axes orthonormés du système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  lié aux contraintes principales, et soit  $\phi$  l'angle orienté que font entre eux dans ce plan les vecteurs  $\vec{k}_1$  et  $\overline{HM}$ , ou angle de Lode (figure 3.10). Le vecteur  $\vec{k}_1$  étant orthogonal à  $\Delta$  et symétrique par rapport aux axes  $o\sigma_2$  et  $o\sigma_3$ , ses composantes relativement au système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  sont de la forme  $(2a, -a, -a)$ . Ce vecteur étant unitaire, il vient alors


$$\vec{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

et l'on a, compte tenu de (3.151) et (3.152),

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{\overrightarrow{HM} \cdot \vec{k}_1}{\|\overrightarrow{HM}\|} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}(2s_1 - s_2 - s_3)}{\sqrt{J_2}}\end{aligned}\quad (3.154)$$

c'est-à-dire, puisque  $\text{tr } \mathbf{s} = 0$ ,

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{\sqrt{J_2}} \quad (3.155)$$

 [pap344e.html](#) Les symétries des axes du plan déviatorique de directions respectives  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  et  $\vec{k}_3$  nous suggérant de considérer le triple de l'angle de Lode  $\phi$ , de  $\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$  et de (3.155), on tire, compte tenu de l'expression (3.141) de  $J_2$ ,

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= 4 \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{\sqrt{J_2}} \right)^3 - 3 \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{\sqrt{J_2}} \right) \\ &= \frac{6\sqrt{\frac{3}{2}}s_1^3 - 3\sqrt{\frac{3}{2}}s_1 J_2}{J_2^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{J_2^{\frac{3}{2}}} [2s_1^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)] \\ &= \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}s_1}{J_2^{\frac{3}{2}}} (s_1^2 - s_2^2 - s_3^2)\end{aligned}\quad (3.156)$$

De  $\text{tr } \mathbf{s} = 0$ , on tire par ailleurs  $s_1 = -s_2 - s_3$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}s_1^2 &= (-s_2 - s_3)^2 \\ &= s_2^2 + s_3^2 + 2s_2s_3\end{aligned}\quad (3.157)$$

Reportant ce résultat dans (3.156), nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \frac{6\sqrt{\frac{3}{2}}s_1s_2s_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{6\sqrt{\frac{3}{2}} \det \mathbf{s}}{J_2^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (3.158)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3.145),

$$\cos 3\phi = \frac{\sqrt{6}J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \quad (3.159)$$

**Remarque** Les relations (3.148) et (3.152) jointes à la figure 3.10 montrent que les grandeurs  $\sqrt{3}I_1$ ,  $\sqrt{J_2}$  et  $\phi$  associées aux trois invariants  $I_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  constituent, dans le système d'axes orthonormés direct  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  associé aux contraintes principales, un jeu de coordonnées cylindriques avec pour axe la trisectrice  $\Delta$ .

### 3.4.5 Représentations géométriques d'un état de contrainte plane

 [tab317.html](#) Donnons tout d'abord la

**Définition 17 (Contraintes planes)** Soit  $\vec{d}$  une direction quelconque mais fixée, et soit  $\sigma$  le champ tensoriel des contraintes de Cauchy du milieu continu  $\mathcal{M}$ . On dit que  $\mathcal{M}$  est soumis à un état de contrainte plane par rapport au plan orthogonal à  $\vec{d}$ , ou plan de contrainte, lorsque qu'en tout point  $P_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à tout instant  $t$  le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma(\vec{x}, t)$  est indépendant de  $\vec{x} \cdot \vec{d}$  et tel que  $\sigma(\vec{x}, t) \cdot \vec{d} = \vec{0}$ .

Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant soumis à un état de contrainte plane, dans toute cette section et par souci de commodité nous supposerons le repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  choisi de façon telle que  $\vec{e}_3$  coïncide avec la direction  $\vec{d}$  orthogonale au plan de contrainte. Il découle alors de la définition précédente que les composantes du champ tensoriel des contraintes de Cauchy relativement à ce repère sont de la forme

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}(x_1, x_2, t) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}(x_1, x_2, t) \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}(x_1, x_2, t) \\ \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{23} &= 0 \\ \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (3.160)$$

Soient  $\Omega_t$  la configuration actuelle du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé,  $\vec{x} \in \Omega_t$  donné, et  $\sigma(\vec{x}, t)$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à cet instant. Omettant les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité, on a alors, relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Un tel tenseur est appelé **tenseur de contrainte plane** et nous écrirons simplement, en ne conservant que ses composantes non nulles,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Soient alors  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  les directions principales de ce tenseur, vecteurs orthogonaux et unitaires du plan de contrainte engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , et soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les valeurs principales associées. Sans perte de généralité nous supposons que  $\vec{j}_2$  est directement orthogonal à  $\vec{j}_1$  dans ce plan et que  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Le repère principal de contrainte  $R^\sigma$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  et à l'instant  $t$  est alors défini par  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{e}_3)$ , les contraintes principales associées à chacune de ces directions étant  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et 0.

Soient à présent  $\vec{n}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé du plan de contrainte engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{t}$  le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{n}$  dans ce plan, et  $\vec{\sigma}_n$  le vecteur contrainte sur le plan de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ .

On se propose ici de construire une représentation de l'état de contrainte plane au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  en considérant le lieu géométrique, lorsque  $\vec{n}$  décrit l'ensemble des directions du plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$ , des points  $M_n$  extrémités des vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_n$  et définis, compte tenu de (3.32), par


$$\vec{P_t M_n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (3.163)$$

Cette construction géométrique est illustrée par la figure 3.11.

De façon plus précise, nous chercherons à déterminer le lieu de ces points relativement à deux repères orthonormés directs du plan de contrainte :

1. le repère  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$  associé aux directions principales de contrainte  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$
2. le repère  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  lié aux vecteurs "tournants"  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$

### 3.4.5.1 Ellipse de Lamé des contraintes planes

 [tab318.html](#) Soient  $y_1$  et  $y_2$  les coordonnées du point  $M_n$  relativement au repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$ . On a, avec les notations de la figure 3.11 et relativement à ce repère,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.164)$$



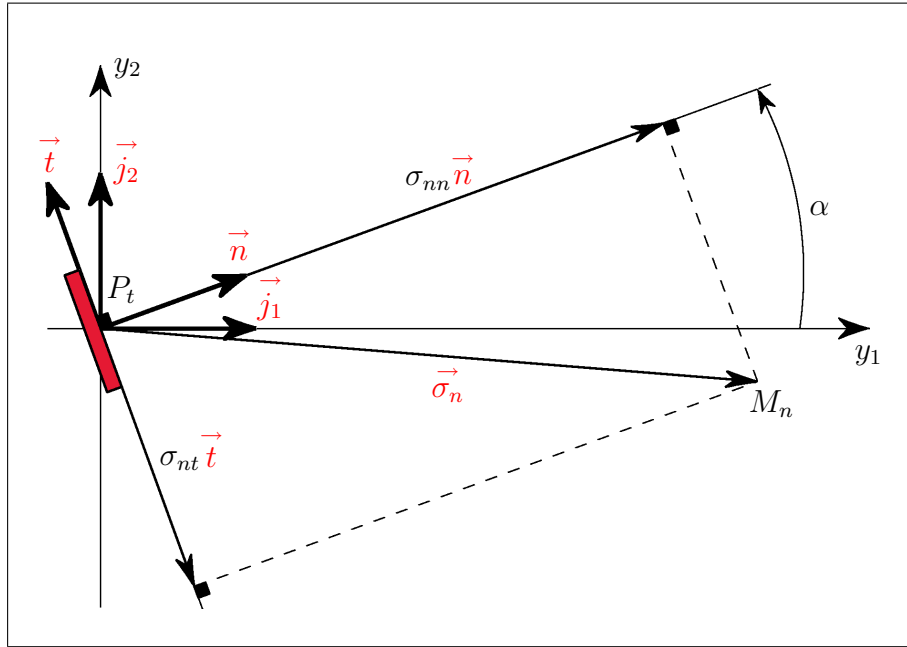


FIG. 3.11 – Représentation géométrique d'un état de contrainte plane


et il vient, compte tenu de (3.163),

$$\begin{cases} y_1 = \sigma_1 \cos \alpha \\ y_2 = \sigma_2 \sin \alpha \end{cases} \quad (3.165)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions du plan de contrainte lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[0, 2\Pi[$ , le lieu géométrique des points  $M_n$  relativement au repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$  est donc l'ellipse centrée sur l'origine de ce repère, de demi grand axe de longueur  $|\sigma_1|$  colinéaire à  $\vec{j}_1$  et de demi petit axe de longueur  $|\sigma_2|$  colinéaire à  $\vec{j}_2$ . Cette ellipse, représentée sur la figure 3.12, est appelée **ellipse de Lamé des contraintes planes**. Si  $\sigma_1\sigma_2 \neq 0$ , son équation cartésienne est donnée par

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad (3.166)$$

### 3.4.5.2 Cercle de Mohr des contraintes planes

 [tab319.html](#) Soient à présent  $\sigma_{nn}$  et  $\sigma_{nt}$  les composantes du point  $M_n$  extrémité du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  dans le repère “tournant”  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  lié à la facette de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  (figure 3.11). On a donc

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn}\vec{n} + \sigma_{nt}\vec{t} \quad (3.167)$$

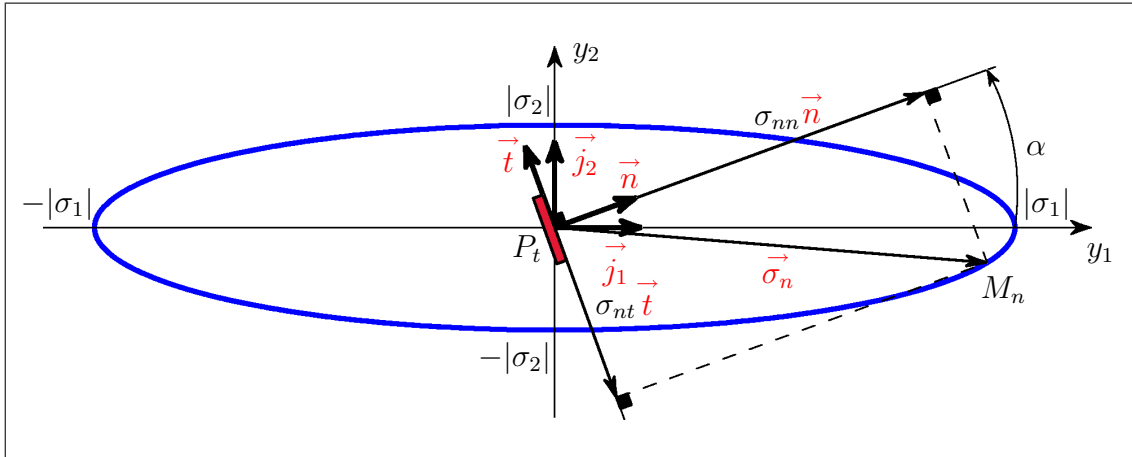


FIG. 3.12 – Ellipse de Lamé des contraintes planes

avec

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} \\ \sigma_{nt} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{t} \end{cases} \quad (3.168)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3.32),

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \\ \sigma_{nt} = \vec{t} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (3.169)$$

La grandeur physique scalaire  $\sigma_{nn}$  n'est autre que la contrainte normale sur la facette de normale  $\vec{n}$  définie dans la section 3.2.1.2 (voir la relation (3.17) page 159), tandis que  $\sigma_{nt}$  est ici dénommée **contrainte tangentielle**, ou **contrainte de cisaillement**, ou tout simplement **cisaillement** sur cette même facette. Dans le cas d'un état de contrainte plane, la contrainte tangentielle  $\sigma_{nt}$  possède donc un signe (i.e. elle peut être positive mais aussi négative). Ceci est dû au fait qu'on peut alors exhiber, dans le plan de contrainte engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , un unique vecteur  $\vec{t}$  directement orthogonal à  $\vec{n}$ .

Les contraintes normale  $\sigma_{nn}$  et tangentielle  $\sigma_{nt}$  étant deux invariants scalaires, leur évaluation à l'aide des relations (3.169) peut être conduite en exprimant les différentes grandeurs impliquées  $(\vec{\sigma}, \vec{n}, \vec{t})$  relativement à un quelconque repère, pourvu qu'il s'agisse du même pour toutes. Choissant alors le repère fixe  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$  dans un souci de simplicité, nous obtenons, compte tenu de (3.164) et (3.169),

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{nt} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (3.170)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\alpha) \\ \sigma_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases} \quad (3.171)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions du plan de contrainte lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , les relations (3.171) montrent que le lieu géométrique des points  $M_n$  extrémités des vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_n$  relativement au repère "tournant"  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$  n'est autre que le cercle ayant pour centre le point  $\Omega$  de coordonnées  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$  et pour rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Ce cercle, représenté sur la figure 3.13, est appelé **cercle de Mohr des contraintes planes**, et son observation appelle les remarques suivantes.

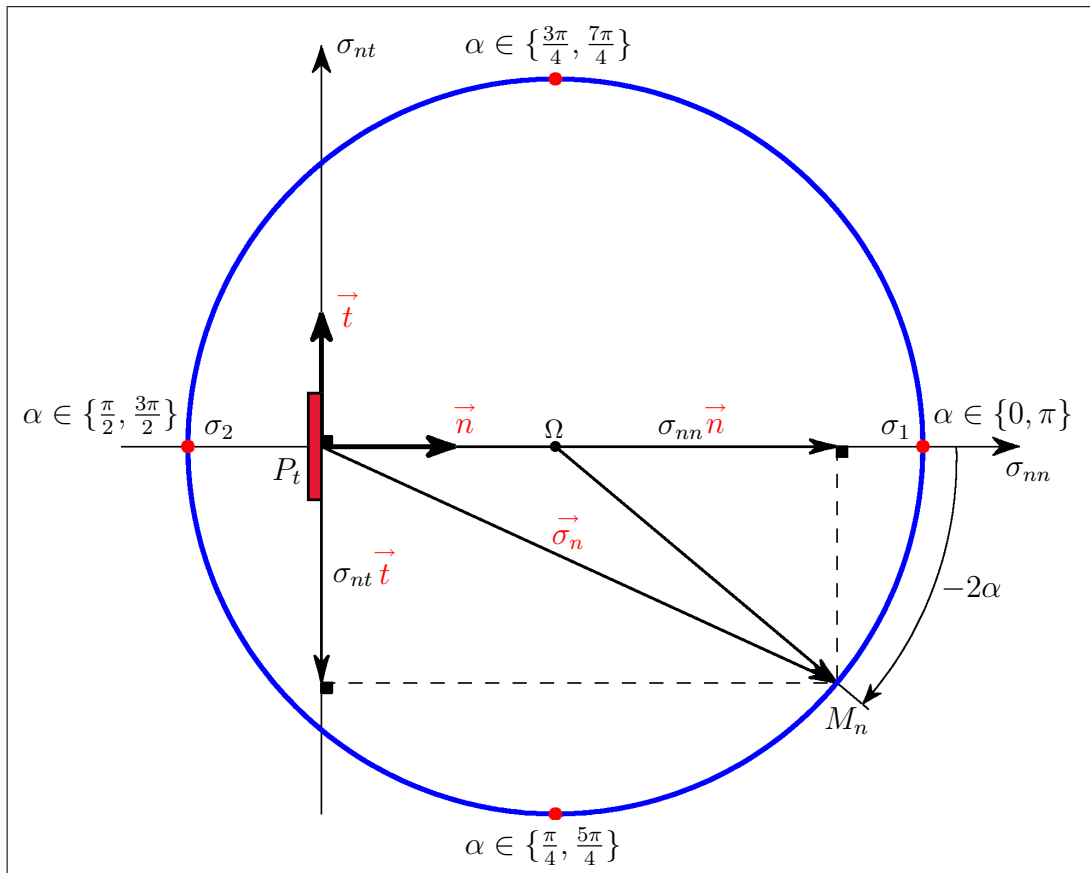



FIG. 3.13 – Cercle de Mohr des contraintes planes

### Remarques

1. Lorsque le vecteur  $\vec{n}$  tourne d'un angle  $\alpha$  dans le plan de contrainte, le rayon vecteur  $\vec{\Omega M_n}$  du cercle de Mohr tourne d'un angle  $-2\alpha$  (figure 3.13).

2. La contrainte normale  $\sigma_{nn}$  est maximale (resp<sup>t</sup> minimale) si  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \Pi$  (resp<sup>t</sup> si  $\alpha = \frac{\Pi}{2}$  ou  $\alpha = \frac{3\Pi}{2}$ ), c'est-à-dire si  $\vec{n} = \pm \vec{j}_1$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{n} = \pm \vec{j}_2$ ). En d'autres termes, la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  est extrémale lorsque  $\vec{n}$  est colinéaire aux directions principales de contrainte plane, les extremums n'étant autres que les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . La contrainte de cisaillement  $\sigma_{nt}$  est alors nulle, et l'on retrouve là la propriété caractéristique de ces directions soulignée dans la section 3.4.2 (théorème 9 page 183).
3. La contrainte tangentielle  $\sigma_{nt}$  est minimale (resp<sup>t</sup> maximale) lorsque  $\alpha = \frac{\Pi}{4}$  ou  $\alpha = \frac{5\Pi}{4}$  (resp<sup>t</sup> lorsque  $\alpha = \frac{3\Pi}{4}$  ou  $\alpha = \frac{7\Pi}{4}$ ), c'est-à-dire lorsque  $\vec{n}$  est colinéaire à la bissectrice des directions principales de contrainte  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{j}_2$  et  $-\vec{j}_1$ ). Les deux extremums ont même valeur absolue égale au rayon du cercle de Mohr, c'est-à-dire à la demi-différence des contraintes principales. Les contraintes normales  $\sigma_{nn}$  sont alors identiques et égales à la moyenne  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , c'est-à-dire à la contrainte moyenne  $\sigma_m = \frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$  associée au tenseur de contrainte plane  $\boldsymbol{\sigma}$ .
4. Si le tenseur de contrainte plane est isotrope ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ), le cercle de Mohr est réduit au point de coordonnées  $(\sigma_1, 0)$ .
5. Lorsque le tenseur de contrainte plane est purement déviatorique ( $\sigma_2 = -\sigma_1$ ), le cercle de Mohr a pour centre l'origine du repère  $R^t = (P_t, \vec{n}, \vec{t})$ . Les extremums des contraintes de cisaillement coïncident alors avec ceux des contraintes normales, c'est-à-dire avec les contraintes principales  $\pm\sigma_1$ .

### 3.4.6 Représentations géométriques d'un état de contrainte tridimensionnel

 [tab320.html](#) Désignant simplement par  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés, nous nous proposons ici de construire, comme dans la section 3.4.5 mais dans le cas général d'un état de contrainte tridimensionnel, une représentation de cet état au point  $P_t$  et à l'instant  $t$  en considérant le lieu géométrique, lorsque  $\vec{n}$  décrit l'ensemble des directions de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ , des points  $M_n$  extrémités des vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\vec{n}$  en ce point et à cet instant et définis, compte tenu de (3.32), par

$$\boxed{P_t M_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}} \quad (3.172)$$


Soient  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  les directions principales de contrainte au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$ , et soient  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes principales associées. Sans perte de généralité nous supposons ces directions choisies de façon telle que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Soient par ailleurs  $\vec{n}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé,  $\vec{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$  le vecteur contrainte sur la facette de normale  $\vec{n}$  au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ ,  $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$  la contrainte normale associée,  $\vec{\tau}_n = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn} \vec{n}$  la composante tangentielle de  $\vec{\sigma}_n$  et  $\tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$  la contrainte tangentielle (ou contrainte de cisaillement ou tout simplement cisaillement) sur cette même facette.

Intéressons-nous alors au lieu géométrique des points  $M_n$  définis par (3.172) relativement aux deux systèmes d'axes suivants :

1. le repère  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  des contraintes principales
2. le système d'axes orthonormés direct du plan d'abscisse  $\sigma_{nn}$  et d'ordonnée  $\tau_n$ , ou plan de Mohr

### 3.4.6.1 Ellipsoïde de Lamé des contraintes

 [tab321.html](#) Soient  $y_1, y_2$  et  $y_3$  les coordonnées du point  $M_n$  et soient  $n_1, n_2$  et  $n_3$  les composantes du vecteur  $\vec{n}$  relativement au repère  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  des contraintes principales. On a alors, dans ce repère,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (3.173)$$


de sorte qu'il vient immédiatement, compte tenu de (3.172),

$$\begin{cases} y_1 = \sigma_1 n_1 \\ y_2 = \sigma_2 n_2 \\ y_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases} \quad (3.174)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  lorsque  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , le lieu géométrique des points  $M_n$  relativement au repère  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  est donc l'ellipsoïde ayant pour centre l'origine de ce repère et dont les demi-axes de longueurs  $|\sigma_1|, |\sigma_2|$  et  $|\sigma_3|$  sont respectivement colinéaires à  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$ . Cet ellipsoïde est appelé **ellipsoïde de Lamé des contraintes**, et son équation cartésienne est donnée, si  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \neq 0$ , par

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (3.175)$$

### 3.4.6.2 Tricercle de Mohr des contraintes

 [tab322.html](#) Les coordonnées du point  $M_n$  relativement au système d'axes orthonormés direct du plan d'abscisse  $\sigma_{nn}$  et d'ordonnée  $\tau_n$ , ou plan de Mohr, sont bien évidemment la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  et la contrainte tangentielle  $\tau_n$ .

La contrainte normale  $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$  étant un invariant scalaire, nous pouvons l'évaluer en exprimant  $\vec{\sigma}_n$  et  $\vec{n}$  relativement au repère  $R^p = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  des contraintes principales. On a alors, dans ce repère et compte tenu de (3.32) et (3.173),

$$\vec{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

de sorte qu'il vient

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (3.177)$$

De  $\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \vec{n} + \vec{\tau}_n$ , de  $\tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$  ainsi que de l'orthogonalité entre  $\vec{\tau}_n$  et le vecteur unitaire  $\vec{n}$ , on tire par ailleurs

$$\|\vec{\sigma}_n\|^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 \quad (3.178)$$

si bien que l'on a, compte tenu de (3.176),

$$\sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (3.179)$$

Le vecteur  $\vec{n}$  décrivant l'ensemble des directions de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  lorsque  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , nous obtenons, avec (3.177) et (3.179), le système suivant de trois équations linéaires aux trois inconnues  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  et  $n_3^2$

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_{nn} \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 \end{cases} \quad (3.180)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

Supposons tout d'abord les contraintes principales deux à deux distinctes, c'est-à-dire  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Le système (3.181) est alors cramérien de déterminant (Van der Monde)  $\Delta$  donné par

$$\Delta = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \quad (3.182)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_{nn} & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ \sigma_{nn} & \sigma_2 - \sigma_{nn} & \sigma_3 - \sigma_{nn} & \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 - \sigma_{nn}^2 - \tau_n^2 & \sigma_3^2 - \sigma_{nn}^2 - \tau_n^2 & \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.183)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3.182),

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sigma_2 - \sigma_{nn} & \sigma_3 - \sigma_{nn} \\ \sigma_2^2 - \sigma_{nn}^2 - \tau_n^2 & \sigma_3^2 - \sigma_{nn}^2 - \tau_n^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} [\sigma_2 \sigma_3^2 - \sigma_2 (\sigma_{nn}^2 + \tau_n^2) - \sigma_{nn} \sigma_3^2 - \sigma_2^2 \sigma_3 + \sigma_3 (\sigma_{nn}^2 + \tau_n^2) + \sigma_{nn} \sigma_2^2] \\ &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} [\sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_{nn}(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &= \frac{(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 + \sigma_2 \sigma_3 - (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \\ &= \frac{(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{aligned} \quad (3.184)$$

Les expressions de  $n_2^2$  et  $n_3^2$  s'obtenant ensuite par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3, nous avons finalement

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \\ n_2^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2})^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \\ n_3^2 = \frac{(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \end{cases} \quad (3.185)$$

De  $n_1^2 \geq 0$ ,  $n_2^2 \geq 0$  et  $n_3^2 \geq 0$  ainsi que de  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , on déduit alors

$$\begin{cases} (\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 \geq (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2 \\ (\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 \leq (\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2})^2 \\ (\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \tau_n^2 \geq (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2 \end{cases} \quad (3.186)$$

Conséquemment, et puisque  $\tau_n \geq 0$ , le lieu des points  $M_n$  dans le plan de Mohr est l'arbelon représenté sur la figure 3.14 et délimité par les demi-cercles  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  du demi-plan  $\tau_n \geq 0$  ayant respectivement pour centres les points de coordonnées  $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ ,  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$  et  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$  et pour rayons  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ ,  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  et  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . L'ensemble constitué par ces trois demi-cercles est dénommé **tricerclé de Mohr des contraintes**.

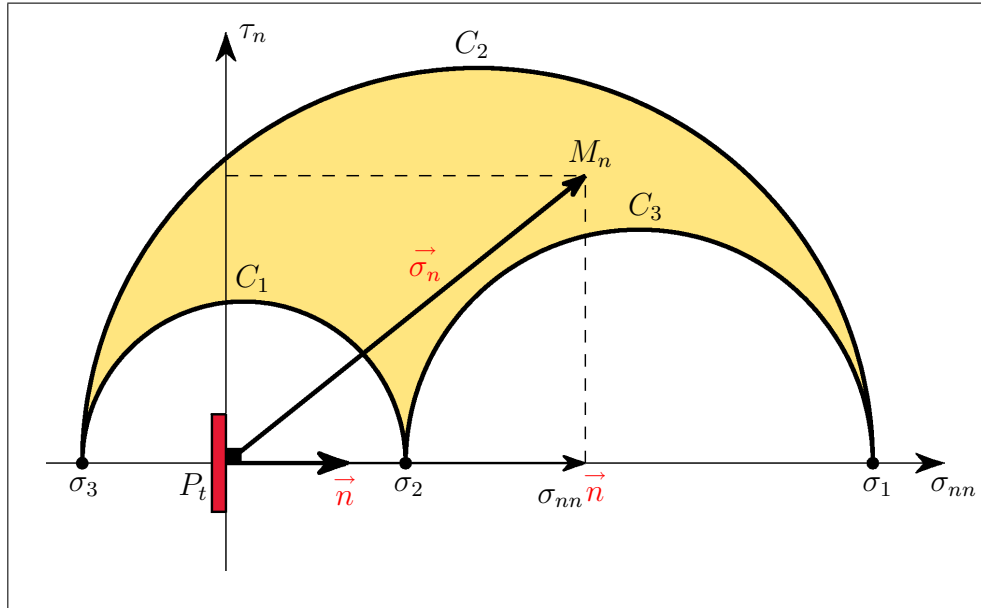


FIG. 3.14 – Tricerle de Mohr des contraintes

Notons, compte tenu de (3.185), que lorsque  $n_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , le point  $M_n$  décrit le demi-cercle  $C_i$ .

Supposons à présent  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ . Le système (3.181) est à présent singulier et devient, après avoir posé  $n^2 = n_2^2 + n_3^2$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

Des deux premières équations, on tire tout d'abord

$$n_1^2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_{nn}}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad n^2 = \frac{\sigma_{nn} - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad (3.188)$$

Reportant ces expressions dans la troisième des équations (3.187), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 &= \frac{\sigma_1^2(\sigma_3 - \sigma_{nn}) + \sigma_3^2(\sigma_{nn} - \sigma_1)}{\sigma_3 - \sigma_1} \\ &= -\sigma_1\sigma_3 + (\sigma_3 + \sigma_1)\sigma_{nn} \end{aligned} \quad (3.189)$$

c'est-à-dire

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (3.190)$$



Le lieu des points  $M_n$  dans le plan de Mohr est alors réduit au demi-cercle  $C_2$  ayant pour centre le point de coordonnées  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$  et pour rayon  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  (figure 3.14). La conclusion est par ailleurs identique si l'on a  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ . Enfin, si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  les équations (3.180) montrent que  $\sigma_{nn} = \sigma_1$  et  $\tau_n = 0$  (l'état de contrainte est purement isotrope), et le lieu des points  $M_n$  dégénère alors en le point de coordonnées  $(\sigma_1, 0)$ .

**Remarque** L'examen de la figure 3.14 montre que la contrainte de cisaillement maximale est égale au rayon du plus grand des cercles du tricerle de Mohr, c'est-à-dire à la demi-différence des contraintes principales extrémales.

$$\begin{aligned} \max_{\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{n}\|=1\}} \tau_n &= \frac{1}{2} [\max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}] \\ &= \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} \end{aligned} \quad (3.191)$$

## 3.5 Récapitulatif des formules essentielles

### 3.5.1 Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \lim_{r \geq 0} \frac{\vec{f}(\vec{n}, \vec{x}, t, r)}{\Pi r^2} \quad \vec{df}(\vec{n}, \vec{x}, t, ds) = \vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) ds$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} \quad \vec{\tau}_n = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn} \vec{n} \quad \tau_n = \|\vec{\tau}_n\|$$

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_j, \vec{x}, t) = \vec{\sigma}_j(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t) \vec{e}_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) = \left[ \vec{\sigma}_1(\vec{x}, t), \vec{\sigma}_2(\vec{x}, t), \vec{\sigma}_3(\vec{x}, t) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\vec{x}, t) & \sigma_{12}(\vec{x}, t) & \sigma_{13}(\vec{x}, t) \\ \sigma_{21}(\vec{x}, t) & \sigma_{22}(\vec{x}, t) & \sigma_{23}(\vec{x}, t) \\ \sigma_{31}(\vec{x}, t) & \sigma_{32}(\vec{x}, t) & \sigma_{33}(\vec{x}, t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \quad \sigma_m(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \quad \sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{df} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot d\vec{S} \quad \boldsymbol{\Sigma} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1}$$

$$d\vec{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{f} = \boldsymbol{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t) \mathbf{b}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t) \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)}$$

$$\text{div}_X \boldsymbol{\Sigma}(\vec{X}, t) + \rho(\vec{X}, t_0) \mathbf{b}(\vec{X}, t) = \rho(\vec{X}, t_0) \boldsymbol{\gamma}(\vec{X}, t) \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)}$$

$${}^t \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \quad \forall t, \forall \vec{x} \in \Omega_t \text{ (p.p.)} \quad {}^t \boldsymbol{\Pi}(\vec{X}, t) = \boldsymbol{\Pi}(\vec{X}, t) \quad \forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0 \text{ (p.p.)}$$

### 3.5.2 Dérivées matérielles des contraintes

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} \cdot {}^t \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{G} - \boldsymbol{\sigma} \text{div}_x \mathbf{v} \quad \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}} + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\frac{d}{dt} (d\vec{s}) = \text{div}_x \mathbf{v} d\vec{s} - {}^t \mathbf{G} \cdot d\vec{s} \quad d\dot{\vec{s}} = (\text{div}_x \mathbf{v} - \vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) d\vec{s}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{n}) = -{}^t \mathbf{G} \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{G}) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{n}) \vec{\sigma}$$

$$\frac{d}{dt} (d\vec{f}) = (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t \mathbf{G}) \cdot d\vec{s} + \text{div}_x \mathbf{v} d\vec{f}$$

### 3.5.3 Étude du tenseur des contraintes de Cauchy

$$\vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\sigma}_{n'} \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n}, \forall \vec{n}'$$

$$\vec{\tau}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\tau}_{n'} \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n}, \forall \vec{n}' \perp \vec{n}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s}$$

$$I_1 = \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$$

$$J_2 = \text{tr } \mathbf{s}^2 = \|\mathbf{s}\|^2$$

$$J_3 = \text{tr } \mathbf{s}^3 = 3 \det \mathbf{s}$$

$$\begin{cases} I_1 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ J_2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \\ J_3 &= s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \end{cases}$$

$$\cos 3\phi = \frac{\sqrt{6} J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \max_{\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{n}\|=1\}} \tau_n &= \frac{1}{2} [\max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} - \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}] \\ &= \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} \end{aligned}$$

## 3.6 Exercices et problèmes

### 3.6.1 Énoncés des exercices

#### E3.1 Solide d'isocontrainte

Un solide pesant de révolution d'axe vertical  $Oz$ , de hauteur  $h$  et de masse volumique  $\rho$  est encastré à son extrémité supérieure  $z = 0$  et supporte une charge  $F$  à son extrémité inférieure  $z = h$  (figure 3.15).

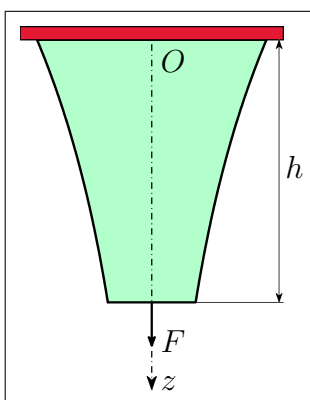


FIG. 3.15 – Solide d'isocontrainte

On souhaite dimensionner ce solide de façon telle que la contrainte normale dans le plan de toute section droite horizontale  $z=\text{cste}$  soit égale à une valeur admissible  $\sigma_0$  donnée. Déterminer alors, en fonction de  $\sigma_0$ ,  $F$ ,  $h$ ,  $\rho$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ , les variations  $z \mapsto S(z)$  de l'aire de ces dernières.

#### E3.2 Essai de traction monoaxiale

L'éprouvette métallique de section droite rectangulaire d'aire  $S$  schématisée sur la figure 3.16 est soumise à un essai de traction monoaxiale.

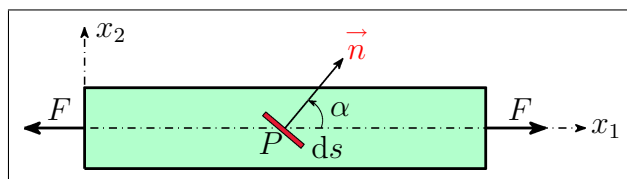


FIG. 3.16 – Essai de traction monoaxiale

Donner l'expression du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  représentée sur cette même figure puis calculer les contraintes normale  $\sigma_{nn}$  et tangentielle  $\sigma_{nt}$  s'exerçant sur cette facette. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  ces contraintes sont elles extrémales ?

### E3.3 États types de contrainte plane

Tracer les cercles de Mohr représentatifs des états de contrainte plane suivants

1. traction pure :  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_1 > 0$ .
2. cisaillement pur :  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{bmatrix}$ .
3. compression hydrostatique :  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_1 < 0$ .

### E3.4 Utilisation d'une plaque fissurée

Un état homogène de contrainte plane  $\boldsymbol{\sigma}$  est défini, relativement au repère orthonormé direct fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , par  $\sigma_{11} = 10 \text{ daN.mm}^{-2}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{22} = -5 \text{ daN.mm}^{-2}$ .

1. Déterminer les contraintes principales ainsi que les directions principales de contrainte associées.
2. Une plaque d'acier présentant une fissure rectiligne  $F$  est destinée à la fabrication d'un objet sur lequel sera appliqué l'état de contrainte plane précédemment défini. Comment doit-on orienter cette fissure par rapport aux axes du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  si l'on veut en minimiser l'effet ?

### E3.5 État homogène de contrainte plane

On considère l'état homogène de contrainte plane défini par la figure 3.17 (l'unité est le  $\text{daN.mm}^{-2}$ ).

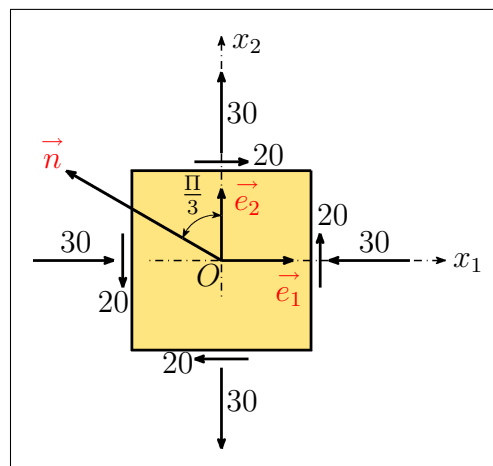


FIG. 3.17 – État homogène de contrainte plane (unité :  $\text{daN.mm}^{-2}$ )

1. Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contrainte associées

- (a) par un calcul algébrique
  - (b) en utilisant le cercle de Mohr
2. Calculer les contraintes normale et tangentielle s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{n}$  représentée sur la figure 3.17
- (a) par un calcul algébrique
  - (b) en utilisant le cercle de Mohr

### E3.6 Quadriques directrices des contraintes normales

On se propose ici de construire une représentation de l'état de contrainte normale au point  $P_t$  de la configuration déformée  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  en considérant le lieu géométrique des points  $M_n$  définis par  $\vec{P_t M_n} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_{nn}|}} \vec{n}$  lorsque le vecteur  $\vec{n}$  décrit l'ensemble des directions de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ .

1. Justifier le titre de l'exercice en déterminant le lieu des points  $M_n$  précédemment définis.
2. À quelle condition les quadriques directrices des contraintes normales sont-elles de révolution ? À quelle condition se réduisent-elles à une sphère ?
3. Soit  $\vec{n}$  quelconque mais fixé et soit  $H_n$  la projection orthogonale de  $P_t$  sur le plan tangent en  $M_n$  aux quadriques directrices des contraintes normales. Montrer que le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  est orthogonal à ce plan et que l'inverse de sa norme euclidienne  $\|\vec{\sigma}_n\|$  est égal à  $\|\vec{P_t M_n}\| \|\vec{P_t H_n}\|$ .
4. Tracer, sur une même figure, les quadriques directrices des contraintes normales correspondant à chacun des états de contrainte plane suivants (valeurs données en  $\text{daN}\cdot\text{mm}^{-2}$ ).

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} & \text{(b) } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \\ \text{(c) } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -40 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(d) } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

### E3.7 Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques

Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ , soient  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  les directions principales de contrainte en ce point et à cet instant et soit  $\Delta$  leur trisectrice de direction le vecteur unitaire  $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3)$ .

Déterminer les contraintes normale  $\sigma_{nn}$  et tangentielle  $\tau_n$  s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{k}$  et d'aire  $ds$  au point  $P_t$  puis exprimer ces dernières en fonction des parties isotrope et déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### E3.8 Contraintes au parement amont d'un barrage

Au point matériel  $P$  du parement amont d'un barrage on connaît la pression hydrostatique  $p$  ainsi que la contrainte normale  $\sigma_{nn} = -q$  s'exerçant sur la facette horizontale de normale  $\vec{e}_2$  (figure 3.18). On suppose par ailleurs qu'aucune contrainte ne s'exerce en ce point sur la facette de normale  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  et l'on désigne par  $\alpha$  l'angle que fait le parement avec la verticale.

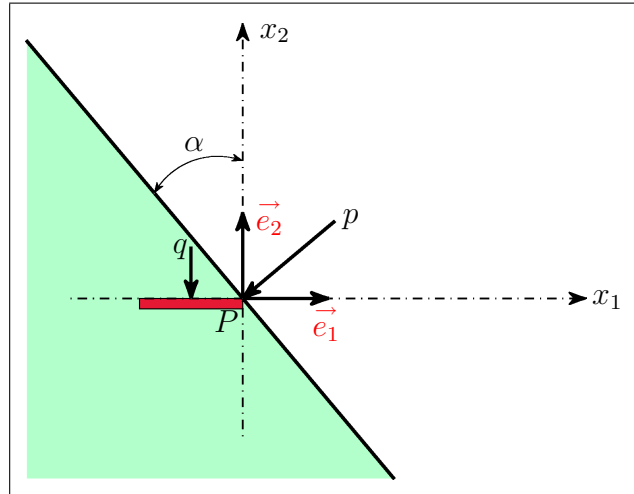


FIG. 3.18 – Parement amont d'un barrage

Déterminer les contraintes principales au point  $P$  ainsi que la contrainte tangentielle  $\sigma_{nt}$  s'exerçant en ce point sur la facette horizontale de normale  $\vec{e}_2$ .

### E3.9 Boîte de Casagrande

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques à la rupture d'un sol, on étudie le comportement d'un échantillon cubique de ce matériau à l'aide du dispositif expérimental représenté sur la figure 3.19 et dénommé boîte de Casagrande.

L'échantillon cubique d'arête  $a$  étant placé entre deux demi-boîtes métalliques pouvant glisser l'une sur l'autre sans frottement, une force verticale  $F$  est appliquée sur la boîte supérieure tandis qu'une traction horizontale  $T$  (effet de cisaillement) est imposée à chacune des deux demi-boîtes ainsi que l'illustre la figure 3.19. La force  $F$  est supposée induire une pression uniforme dans le plan horizontal médian  $x_2 = 0$  de l'échantillon. Déterminer alors le tenseur des contraintes au point  $O$  en supposant que la contrainte de cisaillement dans ce plan varie de façon parabolique et que les contraintes normales dans le plan vertical  $x_1 = 0$  sont en première approximation négligeables.

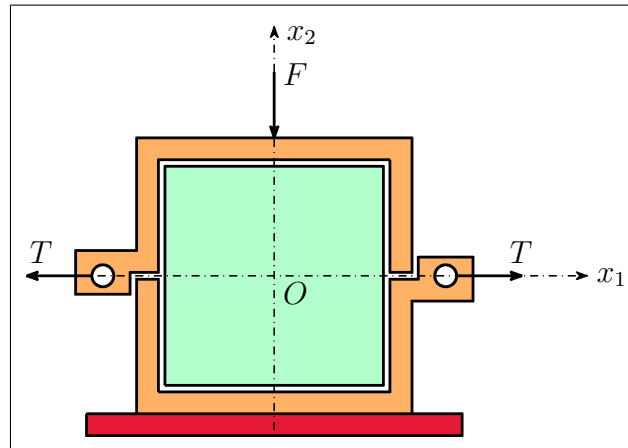
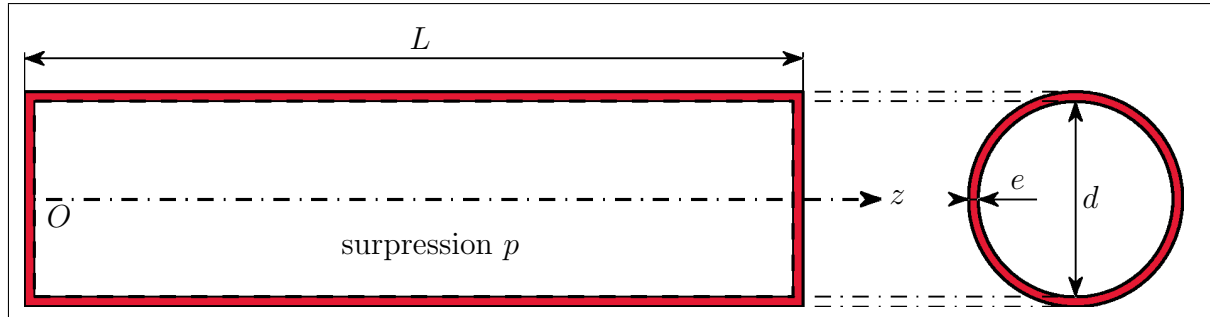


FIG. 3.19 – Boîte de Casagrande

### 3.6.2 Énoncés des problèmes

#### P3.1 Contraintes dans une chaudière

Une chaudière cylindrique de révolution représentée sur la figure 3.20 est soumise à une surpression intérieure  $p$ .

FIG. 3.20 – Chaudière soumise à une surpression intérieure  $p$ 

1. **Étude du tenseur des contraintes** Dans tout ce qui suit l'on supposera qu'en tout point du métal constituant la chaudière les contraintes sont nulles lorsque  $p = 0$  et l'on tirera parti du fait que  $e \ll d$ .
  - (a) Déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  en un point de la paroi intérieure de la chaudière. Le point choisi sera situé suffisamment loin des extrémités  $z = 0$  et  $z = L$  de cette dernière (justifier) et l'on exprimera  $\sigma$  relativement à son repère principal.
  - (b) Reprendre la question 1a en considérant cette fois un point de la paroi extérieure.
  - (c) Application numérique :  $L = 4$  m,  $d = 1$  m,  $e = 1$  cm et  $p = 1.4$  MPa.
2. **Réalisation de la chaudière** On souhaite construire cette chaudière par soudure continue des bords jointifs d'un ruban métallique enroulé en hélice circulaire et l'on veut que



ce ruban soit le plus large possible tout en limitant la contrainte normale dans le plan de soudure à 80 % de la valeur de la contrainte principale maximale déterminée à la question 1.

- Donner la valeur optimale  $\alpha_{\text{opt}}$  de l'angle  $\alpha$  entre l'axe  $Oz$  et la normale au plan de soudure.
- En déduire la largeur maximale du ruban.

### P3.2 Contraintes dans un câble de précontrainte

Une poutre en béton est précontrainte à l'aide d'un câble d'acier schématisé par un cylindre de révolution de rayon  $a$  (figure 3.21).

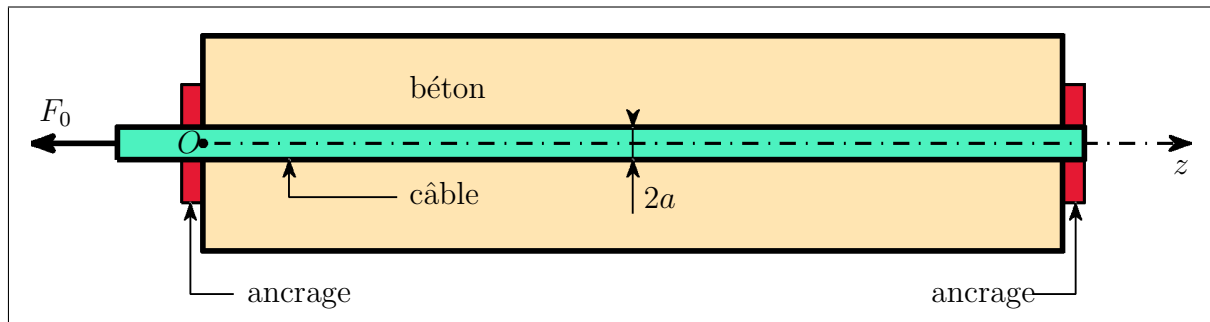


FIG. 3.21 – Câble de précontrainte

On suppose qu'en tout point du câble le tenseur des contraintes de Cauchy exprimé relativement au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

où  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{rz}$  ne sont fonctions que des variables  $r$  et  $z$ .

- Que peut-on dire, compte tenu des symétries du problème, de la parité en  $r$  des fonctions  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{rz}$ .
- Soit  $F(z)$  la tension du câble au droit de la section de cote  $z$ .
  - Relier  $F(z)$  à  $\sigma_{zz}(r, z)$ ,  $r \in [0, a]$ .
  - On suppose à présent que  $\sigma_{zz}$  est indépendant de  $r$  et que  $F(z) = F_0 e^{-kz}$  où  $k$  est une constante strictement positive donnée. Calculer alors  $\sigma_{zz}(z)$ .
- Les hypothèses de la question 2b étant définitivement admises, déterminer  $\sigma_{rz}(r, z)$  en écrivant l'équilibre d'un tronçon cylindrique de câble de rayon  $r \in [0, a]$  et de longueur  $dz$ .

4. Calculer  $\sigma_{rr}(r, z)$  en exprimant l'équilibre d'un volume matériel élémentaire de câble convenablement choisi.
5. Donner l'expression du ratio  $\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_{rr}}$  au contact acier-béton ( $r = a$ ). Quelle est la signification physique de ce dernier ?

### P3.3 Contraintes dans une poutre en potence

Une poutre en potence est soumise à un chargement vertical  $P$  comme l'illustre la figure 3.22 (a) et l'on admettra (cours de Résistance des Matériaux, théorie des poutres) qu'en tout point de ses sections droites suffisamment éloignées des singularités géométriques (points  $A$  et  $B$ ) ainsi que du lieu d'application du chargement (point  $C$ ) ce chargement induit un état de contrainte plane par rapport au plan de la figure.

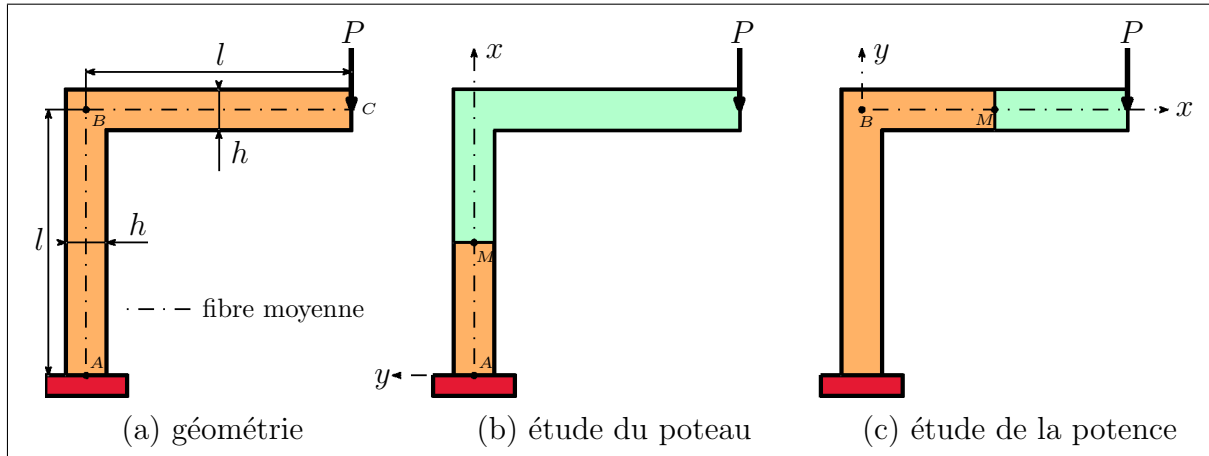


FIG. 3.22 – Poutre en potence

On se propose alors d'exprimer le tenseur de contrainte plane  $\boldsymbol{\sigma}$  au droit de ces sections relativement au système de coordonnées  $(x, y)$  où l'axe des  $x$  a pour direction la fibre moyenne et où celui des  $y$  lui est directement orthogonal (figure 3.22). L'origine de ces axes sera prise au point  $A$  pour les sections droites du poteau (figure 3.22 (b)) et au point  $B$  pour celles de la potence (figure 3.22 (c)). On admettra par ailleurs que l'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$  relativement à ces axes est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{xx} = \alpha(x) + \beta(x)y$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions de la variable  $x$  à déterminer. Enfin l'on désignera par  $b$  la largeur des sections droites rectangulaires de la poutre (i.e. leur dimension dans la direction orthogonale au plan de contrainte), par  $S = bh$  leur aire et par  $I = \frac{bh^3}{12}$  leur moment d'inertie par rapport au plan contenant l'axe des  $x$  et perpendiculaire à celui des  $y$ .

1. **Étude du poteau** On s'intéresse ici aux sections droites du poteau suffisamment éloignées des points  $A$  et  $B$  (figure 3.22 (a)).

- (a) Dédurre de l'équilibre vertical de la partie de poutre représentée en vert sur la figure 3.22 (b) l'expression de  $\alpha(x)$  puis déterminer  $\beta(x)$  en exprimant son équilibre en moment au point  $M$  (figure 3.22 (b)).
- (b) Montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre ainsi que des conditions aux limites en  $y = \pm \frac{h}{2}$ , que l'on a  $\sigma_{xy} = 0$ . Cette solution est-elle compatible avec l'équilibre horizontal de la partie de poutre considérée à la question 1a ?
2. **Étude de la potence** On s'intéresse à présent aux sections droites de la potence suffisamment éloignées des points  $B$  et  $C$  (figure 3.22 (a)).
- (a) Montrer que l'équilibre horizontal de la partie de poutre représentée en vert sur la figure 3.22 (c) impose  $\alpha(x) = 0$  puis déduire de son équilibre en moment au point  $M$  (figure 3.22 (c)) l'expression de  $\beta(x)$ .
- (b) Montrer, en s'inspirant de la question 1b, que  $\sigma_{xy}$  est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on intégrera.
- (c) Vérifier que la solution obtenue à la question 2b satisfait l'équilibre vertical de la partie de poutre considérée à la question 2a.

### 3.6.3 Indications et éléments de réponse

#### E3.1 Solide d'isocontrainte

On trouve  $S(z) = \frac{F}{\sigma_0} \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0}(h - z)\right)$ .

#### E3.2 Essai de traction monoaxiale

On a  $\vec{\sigma}_n = \frac{F}{S} \cos \alpha \vec{e}_1$ ,  $\sigma_{nn} = \frac{F}{S} \cos^2 \alpha$  et  $\sigma_{nt} = -\frac{F}{S} \sin \alpha \cos \alpha$ . La contrainte normale  $\sigma_{nn}$  est donc maximale lorsque  $\alpha = k\Pi$  et minimale si  $\alpha = \frac{\Pi}{2} + k\Pi$  tandis que  $\sigma_{nt}$  est extrémale lorsque  $\alpha = \frac{\Pi}{4} + k\frac{\Pi}{2}$ .

#### E3.4 Utilisation d'une plaque fissurée

- Les contraintes principales ont pour valeurs approchées  $\sigma_1 = 11.5 \text{ daN.mm}^{-2}$  et  $\sigma_2 = -6.5 \text{ daN.mm}^{-2}$ . Les directions principales associées sont les droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équations respectives  $1.5x_1 + 5x_2 = 0$  (pente  $-16.8^\circ$ ) et  $16.5x_1 - 5x_2 = 0$  (pente  $73.2^\circ$ ).
- Les effets de la fissure sont atténués si l'on en comprime les lèvres. Celle-ci doit donc être placée perpendiculairement à  $D_2$ .

### E3.5 État homogène de contrainte plane

1. Soit  $\sigma_1$  la contrainte principale majeure,  $\sigma_2$  la contrainte principale mineure,  $\vec{j}_1$  la direction principale de contrainte associée à  $\sigma_1$  et soit  $\alpha$  l'angle que font entre elles les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{j}_1$ , orienté de  $\vec{e}_1$  vers  $\vec{j}_1$ . On a alors  $\sigma_1 = -\sigma_2 = 36 \text{ daN.mm}^{-2}$  et  $\alpha = 73^\circ$ .
2. On trouve  $\sigma_{nn} = -32 \text{ daN.mm}^{-2}$  et  $\sigma_{nt} = -16 \text{ daN.mm}^{-2}$ .

### E3.6 Quadriques directrices des contraintes normales

1. Ce lieu est constitué par les quadriques d'équations  $\vec{P}_t \vec{M}_n \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{P}_t \vec{M}_n = \pm 1$ .
2. Les directions principales des quadriques directrices des contraintes normales coïncident avec celles du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . Ces quadriques sont donc de révolution s'il existe deux contraintes principales égales et se réduisent à une sphère lorsque  $\boldsymbol{\sigma}$  est isotrope.
3. Soit  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  le repère des contraintes principales au point  $P_t$  et à l'instant  $t$ , soient  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes principales respectivement associées aux directions  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  et soient  $(n_1, n_2, n_3)$  (resp<sup>t</sup>  $(a_1, a_2, a_3)$ ) les composantes de  $\vec{n}$  (resp<sup>t</sup>  $\vec{P}_t \vec{M}_n$ ) relativement à ce repère. Les quadriques directrices des contraintes normales ayant pour équations  $\sigma_i a_i^2 = \pm 1$  relativement à  $R^\sigma$ , le plan tangent en  $M_n$  à ces dernières est orthogonal au vecteur  $\vec{k}$  de composantes  $(\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3)$ . De  $\vec{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$  et de  $\vec{P}_t \vec{M}_n = (1/\sqrt{|\sigma_{nn}|}) \vec{n}$  on tire alors  $\vec{\sigma}_n = \sqrt{|\sigma_{nn}|} \vec{k}$  ce qui établit l'orthogonalité de  $\vec{\sigma}_n$  avec ce plan tangent. Il suffit ensuite de remarquer que  $\|\vec{P}_t \vec{M}_n\| = 1/\sqrt{|\sigma_{nn}|}$  et  $\|\vec{P}_t \vec{H}_n\| = \frac{1}{\|\vec{k}\|}$  pour conclure.
4. On obtient les quadriques représentées sur la figure 3.23.

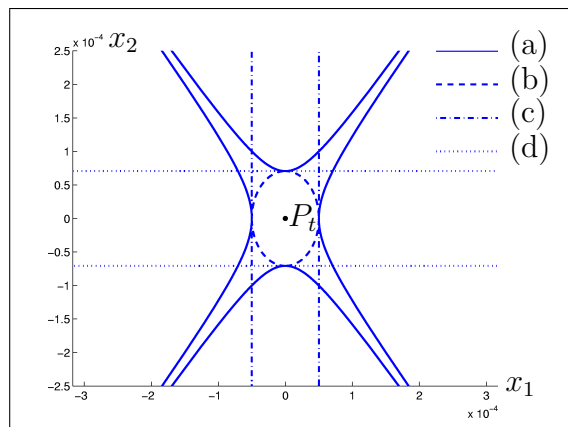


FIG. 3.23 – Quadriques directrices des contraintes normales

### E3.7 Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques

Soient  $\sigma_m$  la contrainte moyenne et  $\mathbf{s}$  le déviateur des contraintes. On a alors  $\vec{\sigma}_n = \sigma_m \vec{k} + \mathbf{s} \cdot \vec{k}$ ,  $\sigma_{nn} = \sigma_m$  et  $\tau_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \|\mathbf{s}\|$ .

### E3.8 Contraintes au parement amont d'un barrage

On est en présence d'un état de contrainte plane par rapport au plan  $(Px_1, Px_2)$ . Les directions principales de contrainte dans ce plan au point  $P$  sont alors les droites orthogonale et parallèle au parement et les contraintes principales respectivement associées à ces directions ont pour expression  $\sigma_1 = -p$  et  $\sigma_2 = -q + (p - q) \tan^2 \alpha$ . La contrainte tangentielle s'exerçant au point  $P$  sur la facette horizontale de normale  $\vec{e}_2$  vaut quant à elle  $\sigma_{nt} = (p - q) \tan \alpha$ .

### E3.9 Boîte de Casagrande

On obtient le tenseur de contrainte plane  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3T}{2a^2} \\ \frac{-3T}{2a^2} & \frac{-F}{a^2} \end{bmatrix}$ .

### P3.1 Contraintes dans une chaudière

- Les directions principales de  $\boldsymbol{\sigma}$  sont celles du repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les contraintes principales correspondantes sont respectivement égales à  $\sigma_r = -p$ ,  $\sigma_\theta = \frac{pd}{2e}$  et  $\sigma_z = \frac{pd}{4e}$ .
  - Les directions principales de contrainte sont identiques à celles trouvées à la question 1a. Les contraintes principales  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_z$  sont elles aussi inchangées tandis que l'on a à présent  $\sigma_r = 0$ .
  - On trouve  $\sigma_\theta = 70$  MPa,  $\sigma_z = 35$  MPa et, pour un point de la paroi intérieure de la chaudière,  $\sigma_r = -1.4$  MPa.
- Soit  $\alpha$  l'angle entre l'axe  $Oz$  et la normale au plan de soudure. La contrainte normale dans ce plan étant donnée par  $\sigma_{nn} = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2} \cos(2\alpha)$ , la condition  $\sigma_{nn} \leq 0.8\sigma_\theta$  impose alors  $\cos(2\alpha) \geq \frac{0.6\sigma_\theta - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_\theta} = -0.2$  c'est-à-dire  $\alpha \leq 51^\circ$ . La valeur optimale de  $\alpha$  est donc  $\alpha_{\text{opt}} = 51^\circ$ .
  - La largeur  $l$  du ruban étant liée au diamètre  $d$  de l'hélice ainsi qu'à son inclinaison  $\alpha$  par  $l = \Pi d \sin \alpha$ , la largeur maximale est alors égale à  $\Pi d \sin \alpha_{\text{opt}}$  c'est-à-dire à 2.43 m.

### P3.2 Contraintes dans un câble de précontrainte

- Les composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{zz}$  de  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des fonctions paires de la variable  $r$  tandis que  $\sigma_{rz}$  est une fonction impaire de cette même variable.
- On a  $F(z) = 2\Pi \int_0^a \sigma_{zz}(r, z) r dr$ .

- (b) On obtient  $\sigma_{zz}(z) = \frac{F_0}{\Pi a^2} e^{-kz}$ .
3. L'équilibre d'un tronçon cylindrique de câble de rayon  $r \in [0, a]$  et de longueur  $dz$  fournit  $\sigma_{rz}(r, z) = \frac{F_0 k r}{2\Pi a^2} e^{-kz}$ .
4. En écrivant l'équilibre d'un secteur angulaire élémentaire de câble de rayon  $r \in [0, a]$ , d'angle  $d\theta$  et de longueur  $dz$  on trouve  $\sigma_{rr}(r, z) = \frac{F_0 k^2 r^2}{6\Pi a^2} e^{-kz}$ .
5. On a  $\frac{\sigma_{rz}(r, z)}{\sigma_{rr}(r, z)} = \frac{3}{kr}$ . La valeur  $\frac{3}{ka}$  de ce ratio obtenue en faisant  $r = a$  représente alors le coefficient de frottement entre l'acier et le béton.

### P3.3 Contraintes dans une poutre en potence

1. (a) On a  $\alpha(x) = -\frac{P}{S}$  et  $\beta(x) = \frac{Pl}{I}$ .
- (b) Ceci découle directement de  $\partial_y \sigma_{xy} = -\partial_x \sigma_{xx} = 0$  ainsi que de  $\sigma_{xy}(x, y = \pm \frac{h}{2}) = 0$ . L'équilibre horizontal de la partie de poutre représentée en vert sur la figure 3.22 (b) est donc bien vérifié.
2. (a) On trouve ici  $\beta(x) = \frac{P(l-x)}{I}$ .
- (b) De  $\partial_y \sigma_{xy} = -\partial_x \sigma_{xx} = \frac{P}{I} y$  et de  $\sigma_{xy}(x, y = \pm \frac{h}{2}) = 0$  on déduit  $\sigma_{xy} = \frac{P}{8I} (4y^2 - h^2)$ .
- (c) On a  $P + b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{P}{8I} (4y^2 - h^2) dy = 0$  et l'équilibre vertical de la partie de poutre représentée en vert sur la figure 3.22 (c) est donc bien satisfait.

# Chapitre 4

## Prolégomènes à la rhéologie des corps continus

### 4.1 Considérations intuitives

Les chapitres précédents du cours nous ont permis de dégager puis de quantifier les notions de déformation et de contrainte au sein d'un milieu continu  $\mathcal{M}$  subissant une transformation  $\mathcal{F}$  induite par un système  $\mathcal{S}_m^e$  d'actions mécaniques extérieures.

Bien qu'introduites indépendamment les unes des autres dans des chapitres distincts, contraintes (chapitre 3) et déformations (chapitre 2) sont liées. D'un point de vue intuitif, on conçoit en effet assez bien que les déformations subies par le corps matériel  $\mathcal{M}$  puissent être génératrices d'efforts intérieurs, c'est-à-dire de contraintes. De même, et par un raisonnement dual, on imagine aisément ce milieu continu se déformer sous l'effet des contraintes engendrées par les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.


Par ailleurs, l'observation quotidienne des phénomènes physiques qui nous entourent (action du vent par exemple) montre que les déformations de milieux matériellement différents soumis à un même système  $\mathcal{S}_m^e$  d'actions mécaniques extérieures n'ont en général pas le même ordre de grandeur : une charge donnée placée sur un cube d'acier n'y produit pas les mêmes effets que sur un cube de mêmes dimensions mais constitué de caoutchouc.

Enfin, les réponses des corps déformables aux sollicitations extérieures ont des évolutions diverses au cours du temps. Si certains cessent de se transformer une fois le chargement appliqué (comportement instantané), d'autres continueront à se déformer au cours du temps sous sollicitation extérieure constante (comportement différé), comme par exemple les sols argileux (cours de Géotechnique, théorie de la consolidation), les enrobés bitumineux (cours de Routes) ou même les bétons (cours de Béton Précontraint).

Contrairement aux résultats établis dans les chapitres précédents du cours, les relations entre contraintes et déformations ou relations de comportement des milieux continus ne sont donc pas intrinsèques, mais propres à ces milieux et à leurs modes de sollicitation. Les quelques exemples qui suivent ont pour seul but d'illustrer, de façon certes non exhaustive, cette diversité des comportements des corps déformables dont l'étude tant expérimentale que théorique constitue la rhéologie.

## 4.1.1 Exemples de comportements de milieux solides

### 4.1.1.1 Comportement élastique

 [tab41.html](#) Intéressons-nous à l'essai de traction simple du ruban de caoutchouc naturel de longueur initiale  $L$  et de section droite d'aire initiale  $S$  représenté sur la figure 4.1 (a), et considérons, avec les notations de cette même figure, le graphe des grandeurs physiques  $\Sigma_a = \frac{F}{S}$  et  $\varepsilon_a = \frac{\Delta L}{L}$  (figure 4.1 (b)), respectivement égales à la contrainte axiale (i.e. dans la direction de traction) de Boussinesq et à la dilatation axiale lagrangienne.

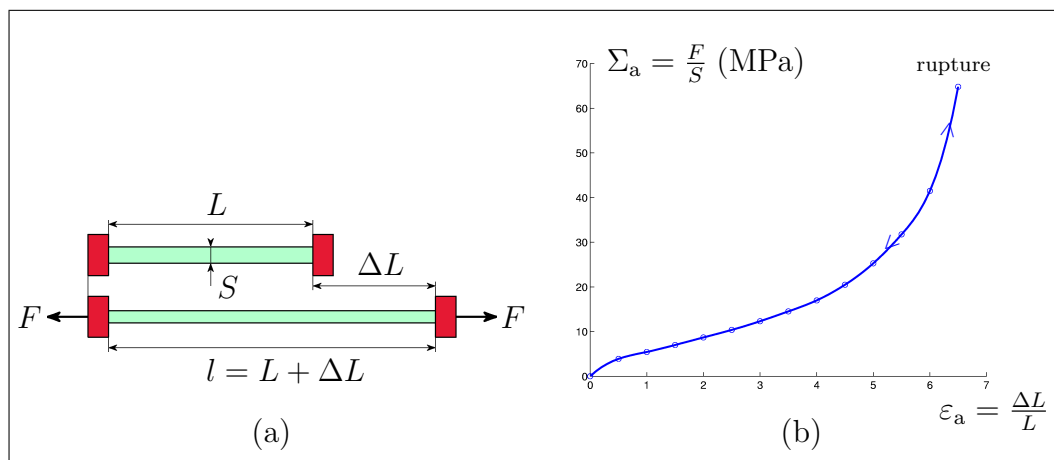



FIG. 4.1 – Essai de traction simple d'un ruban de caoutchouc

Nous constatons qu'en deçà du point de rupture ce graphe est le même en charge ( $F$  croissante) et en décharge ( $F$  décroissante). En d'autres termes, la correspondance entre  $\Sigma_a$  et  $\varepsilon_a$  est bijective, et le comportement instantané et réversible du matériau est alors qualifié d'**élastique**. En particulier, lorsqu'après avoir augmenté jusqu'à une valeur inférieure à celle provoquant la rupture, la force  $F$  décroît pour enfin s'annuler, le ruban de caoutchouc ne présente aucune déformation résiduelle ( $\varepsilon_a = 0$ ) et semble n'avoir jamais été sollicité, de sorte qu'un tel matériau est dit "sans mémoire". Enfin, la non-linéarité du graphe biunivoque de la figure 4.1 montre que le comportement du caoutchouc en deçà de sa limite de rupture est de type **élastique non linéaire**.



### 4.1.1.2 Comportement élastoplastique

 [tab42.html](#) Effectuons maintenant l'essai de traction de la figure 4.1 (a) sur un barreau d'acier doux. Les grandeurs physiques  $\Sigma_a$  et  $\varepsilon_a$  précédemment définies évoluent alors à présent selon le graphe représenté sur la figure 4.2, dont l'observation appelle les commentaires qui suivent.

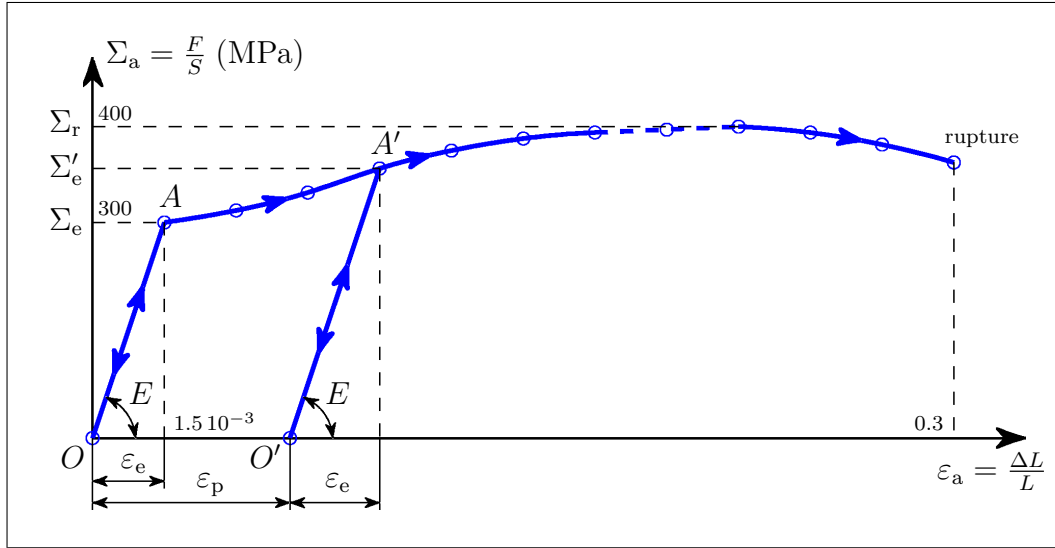


FIG. 4.2 – Essai de traction simple d'un barreau d'acier doux

L'histoire de sollicitation du barreau d'acier étant supposée vierge, son comportement en début de chargement ( $F$  croissant à partir de 0) est élastique (i.e. réversible) et linéaire, et le reste tant que  $\Sigma_a \leq \Sigma_e$ , cette valeur  $\Sigma_e$  étant appelée pour cela limite élastique initiale. La pente  $E$  de la droite  $OA$  (figure 4.2) est quant à elle dénommée **module d'Young** et l'on a donc, sur ce trajet,

$$\Sigma_a = E\varepsilon_a \quad (4.1)$$

La force  $F$  continuant à croître, le graphe contrainte-déformation ( $\Sigma_a - \varepsilon_a$ ) s'incurve au-delà du point  $A$  correspondant à la limite élastique initiale, et des déformations plus importantes et irréversibles (permanentes) apparaissent. Ces déformations permanentes ou déformations plastiques peuvent être mises en évidence en effectuant par exemple une décharge à partir du point  $A'$  (figure 4.2). Lorsque  $F$  s'annule (point  $O'$ ), on a bien  $\Sigma_a = 0$ , tandis que  $\varepsilon_a$  reste égal à la déformation plastique non nulle  $\varepsilon_p$ . Le matériau plastifié possède donc une mémoire de son histoire de sollicitation. La décharge précédente s'effectuant par ailleurs sur la droite  $A'O'$  de pente  $E$ , nous voyons que la déformation mécanique totale  $\varepsilon_a$  au point  $A'$  se décompose en une partie élastique recouvrable (i.e. elle disparaît après décharge)  $\varepsilon_e = \frac{\Sigma_a}{E}$  où  $\Sigma_a = \Sigma'_e$  est la valeur de la contrainte au point  $A'$ , et en une partie non recouvrable (i.e. elle subsiste après décharge)

égale à la déformation plastique  $\varepsilon_p$  : le comportement du matériau est de type **élastoplastique**.


$$\varepsilon_a = \frac{\Sigma_a}{E} + \varepsilon_p \quad (4.2)$$

Si l'on effectue ensuite une recharge à partir du point  $O'$ , le comportement du barreau est à nouveau élastique linéaire et le reste tant que  $\Sigma_a \leq \Sigma'_e$  (figure 4.2). La nouvelle limite élastique  $\Sigma'_e$  est supérieure à  $\Sigma_e$ , c'est le phénomène d'**écrouissage**. Au-delà de  $\Sigma'_e$ , le graphe  $(\Sigma_a - \varepsilon_a)$  s'incurve à nouveau pour rejoindre la branche correspondant à l'essai de traction monotone (i.e.  $F$  croissante et monotone à partir de 0). La force  $F$  continuant à croître, la contrainte  $\Sigma_a$  atteint tout d'abord une valeur maximale, conventionnellement appelée limite de rupture en traction simple et notée  $\Sigma_r$ , avant de redescendre, cette dernière phase étant associée à l'apparition d'un étranglement dans le barreau (phénomène de striction) lié à un régime transitoire et instable conduisant à la rupture effective.

Enfin, notons que tous les points situés sous la branche du graphe  $(\Sigma_a - \varepsilon_a)$  de la figure 4.2 correspondant à l'essai de traction monotone sont accessibles par des trajets de la forme  $OAA'O'$ , de sorte qu'à une valeur donnée  $\Sigma_a < \Sigma_r$  correspond une infinité de valeurs  $\varepsilon_a$  possibles. En élastoplasticité, la relation contrainte-déformation n'est donc pas biunivoque.

## 4.1.2 Exemples de comportements de milieux fluides

### 4.1.2.1 Fluide parfait

 [tab43.html](#) Un fluide est dit parfait, ou non visqueux, lorsque le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est indépendant du tenseur  $D$  des taux de déformation. En mouvement comme à l'équilibre, on a alors

$$\sigma = -p \delta \quad (4.3)$$

où la pression  $p$  est reliée à la masse volumique  $\rho$  ainsi qu'à la température absolue  $T$  par l'équation d'état régissant le comportement du fluide

$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (4.4)$$

Dans le cas d'un gaz idéal, cette équation adopte la forme bien connue


$$pV = nRT \quad (4.5)$$

avec  $V$  le volume occupé,  $n$  le nombre de moles et  $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  la constante molaire des gaz parfaits.

Pour les fluides parfaits dont le comportement obéit au modèle barotrope, pression et température sont associées en une relation unique, de sorte que l'équation d'état devient

$$\rho = h(p) \quad (4.6)$$

#### 4.1.2.2 Fluide visqueux

 [tab44.html](#) Lorsqu'un fluide possédant des propriétés visqueuses est mis en mouvement, à l'état de contrainte isotrope au repos  $\sigma^r = -p\delta$  viennent se superposer les **contraintes visqueuses**  $\sigma^v$  fonctions du taux de déformation  $\mathbf{D}$  et dues aux différences relatives de vitesse entre les particules fluides. On a alors

$$\sigma = -p\delta + \mathcal{F}(\mathbf{D}) \quad (4.7)$$

où la fonction tensorielle  $\mathcal{F}$  satisfait la relation  $\mathcal{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Illustrons notre propos en considérant le dispositif expérimental représenté sur la figure 4.3 (a) et dénommé rhéomètre de Couette.

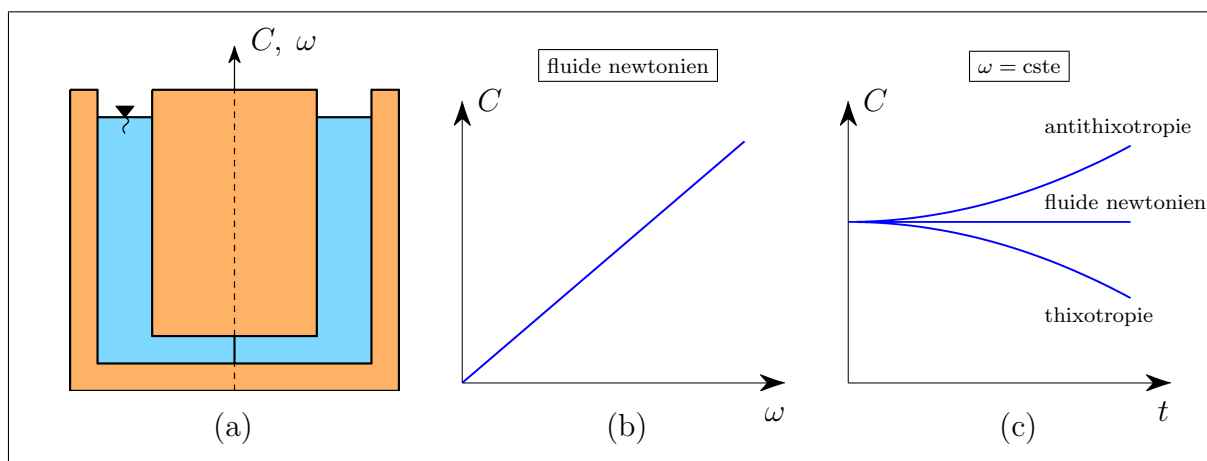


FIG. 4.3 – Rhéomètre de Couette

Cet appareil, utilisé pour mesurer la viscosité des liquides, est composé de deux cylindres coaxiaux : une partie fixe et creuse (stator) et une partie mobile (rotor). Le fluide visqueux occupant le volume intermédiaire, la partie mobile du rhéomètre est alors mise en rotation et l'on mesure le couple  $C$  nécessaire à entretenir une vitesse angulaire  $\omega$  donnée.


Le fluide visqueux est dit **newtonien** (dans un domaine donné de sollicitation) si la relation entre  $C$  et  $\omega$  est biunivoque et linéaire (figure 4.3 (b)). Ses propriétés mécaniques visqueuses sont alors indépendantes du taux de déformation ainsi que de la durée du cisaillement. Les huiles pour moteur ou l'hémoglobine sont des exemples de tels fluides.

Lorsque le couple  $C$  nécessaire à imprimer au rotor une vitesse angulaire  $\omega$  donnée diminue au cours du temps (figure 4.3 (c)), la viscosité apparente (i.e. à l'instant courant  $t$ ) du fluide est fonction décroissante de la durée de l'écoulement. En d'autres termes, le matériau cisailé se fluidifie progressivement. Un tel milieu est alors dit **thixotrope** s'il retrouve ses propriétés mécaniques initiales après un long repos, et **partiellement thixotrope** lorsqu'il ne les recouvre pas intégralement. La thixotropie est un phénomène relativement fréquent qu'illustrent par exemple les vases des côtes de la Manche, plus souvent appelées sables mouvants.

La croissance du couple  $C$  au cours du temps à vitesse angulaire  $\omega$  fixée (figure 4.3 (c)) traduit quant à elle une augmentation de la viscosité apparente c'est-à-dire un épaississement progressif du fluide. On parle alors d'**antithixotropie** (resp<sup>t</sup> d'**antithixotropie partielle**) lorsqu'après un long repos le matériau recouvre en totalité (resp<sup>t</sup> partiellement) ses propriétés mécaniques initiales. Contrairement à la thixotropie, l'antithixotropie reste un phénomène assez rare, l'antithixotropie partielle étant de loin la plus courante.



Signalons enfin l'utilisation du terme rhéopexie pour désigner la solidification d'un système thixotrope sous l'effet d'un mouvement doux et régulier.

## 4.2 Élasticité linéaire isotrope

 [tab45.html](#) Si rares sont les solides déformables purement élastiques (le caoutchouc naturel de la section 4.1.1.1 en est un exemple), il existe néanmoins, pour la plupart d'entre eux, un domaine de sollicitations où leur comportement est réversible et le plus souvent linéaire, ainsi que l'illustre l'exemple de l'acier doux donné dans la section 4.1.1.2. Ce domaine, appelé domaine d'élasticité et exprimé le plus souvent en termes de contraintes (voir l'exemple de l'acier doux cité plus haut ou les développements de la section 4.3), est en général celui dans lequel on cherche à faire travailler les matériaux (aciers, bétons, sols, ...), pour des raisons évidentes de sécurité mais également de confort de l'utilisateur. Nombre d'entre eux ayant par ailleurs des propriétés mécaniques locales identiques dans toutes les directions, le modèle élastique linéaire isotrope ou **loi de Hooke** reste un outil de description de leur comportement simple et souvent suffisamment réaliste.

Soit donc  $\mathcal{M}$  un milieu continu élastique linéaire isotrope. Les déformations des solides dans leur domaine d'élasticité étant en général petites (voir à nouveau l'exemple de l'acier doux, section 4.1.1.2), nous ne considérerons, dans cette section, que des transformations infinitésimales de  $\mathcal{M}$ . Omettant alors les variables d'espace et de temps dans un souci de simplicité, nous désignerons par  $\varepsilon$  le tenseur linéarisé des petites déformations au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés, et par  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy en ce point et à cet instant.

### 4.2.1 Approche en déformations

 [tab46.html](#)  [tab47.html](#) Bien que la formulation naturelle d'une relation de comportement consiste en l'expression de l'histoire des contraintes en fonction de celle des déformations (la cinématique détermine les contraintes alors que la réciproque est en général fausse<sup>1</sup>), la réversibilité du comportement élastique linéaire isotrope nous autorise à tenter d'exhiber le tenseur linéarisé des petites déformations  $\varepsilon$  en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$ .

Adoptons tout d'abord une démarche expérimentale en reconsidérant l'essai de traction simple homogène de la poutre de longueur  $l$  et de section droite de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  décrit dans la section 3.1.2 (figure 3.2 page 155) et reproduit sur la figure 4.4.

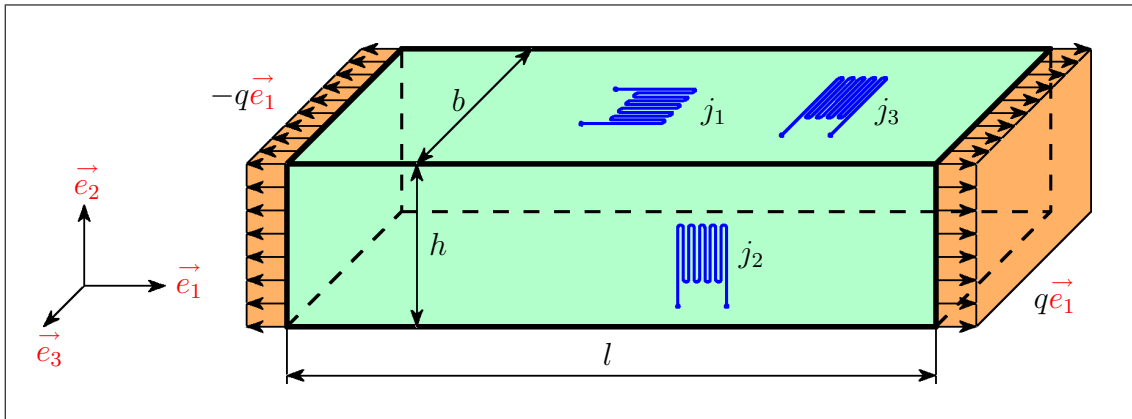


FIG. 4.4 – Poutre en traction simple équipée de jauges

Le matériau constituant la poutre étant supposé homogène et non pesant et les extrémités gauche et droite de celle-ci étant sollicitées uniformément, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est le même en tout point, et sa matrice représentative relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  a pour expression

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

avec  $\sigma_1 = q$ . Les directions du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont donc directions principales de contrainte.

Le matériau étant par ailleurs élastique linéaire isotrope, intéressons-nous aux déformations engendrées par ces contraintes. L'observation de la poutre montre que sa transformation reste

<sup>1</sup>l'exemple de l'acier doux, section 4.1.1.2, en est une preuve

homogène, les directions du repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ne subissant par ailleurs aucune distorsion. Le tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donc en tout point le même et ses directions principales coïncident avec celles de  $\boldsymbol{\sigma}$ , de sorte que sa matrice représentative relativement à ce repère est de la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Équipons la poutre de trois jauges  $j_1, j_2$  et  $j_3$  disposées de façon à mesurer les trois déformations principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  (figure 4.4), et faisons varier la densité surfacique de force  $q$  appliquée à chacune de ses extrémités. On fait alors les constatations suivantes :

- le comportement est réversible (élasticité)
- $\varepsilon_1$  est proportionnel à  $\sigma_1$  (linéarité) et de même signe
- $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont égaux (isotropie), proportionnels (linéarité) et de signe opposé à  $\sigma_1$

Les déformations latérales  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont donc également proportionnelles et de signe opposé à la déformation axiale  $\varepsilon_1$ , et l'on pose alors

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad \nu = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (4.10)$$

ce qui donne

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{-\nu}{E} \sigma_1 \quad (4.11)$$

La grandeur physique scalaire  $E > 0$  est appelée **module d'élasticité linéaire isotrope** ou **module d'Young**. Homogène à une contrainte, elle s'exprime en Pa et ses multiples. Le coefficient  $\nu$ , sans dimension, est quant à lui dénommé **coefficient de Poisson**.

En résumé, au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  de matrice représentative  $\boldsymbol{\sigma}_R$  relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  définie par (4.8) correspond, en élasticité linéaire isotrope, le tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  de matrice représentative  $\boldsymbol{\varepsilon}_R$  relativement à ce même repère donnée par (4.9) et (4.11)

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{\varepsilon}_R = \frac{\sigma_1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Le matériau élastique linéaire considéré étant isotrope, la relation locale (4.12), établie relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , reste valable dans tout système d'axes orthonormés  $R'$

$$\boldsymbol{\sigma}_{R'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{\varepsilon}_{R'} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

si bien que l'on a également

$$\boldsymbol{\sigma}_{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{\varepsilon}_{R'} = \frac{\sigma_2}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\sigma}_{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{\varepsilon}_{R'} = \frac{\sigma_3}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Reconsidérons alors le cas plus général du milieu continu élastique linéaire et isotrope  $\mathcal{M}$  du début de la section 4.2. Soit  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  le repère des contraintes principales au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés, et soient  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes principales associées. Soit par ailleurs  $\boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma}$  (resp<sup>t</sup>  $\boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma}$ ) la matrice représentative de  $\boldsymbol{\sigma}$  (resp<sup>t</sup>  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) relativement à ce repère. On a

$$\boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

De la linéarité du comportement du matériau ainsi que des relations (4.13), (4.14) et (4.15), on tire alors

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} + \frac{\sigma_2}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} + \frac{\sigma_3}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Les directions principales de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  coïncident donc avec celles de  $\boldsymbol{\sigma}$ , les déformations principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  étant reliées aux contraintes principales par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2] \end{cases} \quad (4.19)$$

ou encore, puisque  $\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 \end{cases} \quad (4.20)$$

Autrement dit, on a, relativement au repère  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma} = \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \quad (4.21)$$

Soit alors  $\boldsymbol{\sigma}_R$  (resp<sup>t</sup>  $\boldsymbol{\varepsilon}_R$ ) la matrice représentative de  $\boldsymbol{\sigma}$  (resp<sup>t</sup>  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , et soit  $\mathbf{Q}$  la matrice de passage de  $R^\sigma$  à  $R$ . On a donc

$$\boldsymbol{\sigma}_R = {}^t \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \cdot \mathbf{Q} \quad (4.22)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = {}^t \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma} \cdot \mathbf{Q} \quad (4.23)$$

et il vient, compte tenu de (4.21),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_R &= {}^t \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{R^\sigma} \cdot \mathbf{Q} \\ &= {}^t \mathbf{Q} \cdot \left[ \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \right] \cdot \mathbf{Q} \\ &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_R {}^t \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \frac{1+\nu}{E} {}^t \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{R^\sigma} \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.24)$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_R \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_R \quad (4.25)$$

En d'autres termes, l'égalité (4.21), établie relativement au repère principal  $R^\sigma = (P_t, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ , reste valable dans tout système d'axes orthonormés et l'on a donc la relation intrinsèque

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.26)$$

Exprimant les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous avons alors

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.27)$$

et de façon plus détaillée

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu \sigma_{33}) & \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{33}) & \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) & \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{cases} \quad (4.28)$$



### Remarques

1. Les relations (4.26), (4.27) ou (4.28) montrent que les distorsions  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $(i, j \neq i) \in \{1, 2, 3\}^2$ , sont proportionnelles aux contraintes de cisaillement  $\sigma_{ij}$ . Introduisant le module de cisaillement de Coulomb  $G$  défini par

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.29)$$

nous obtenons alors

$$\gamma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \quad \forall (i, j \neq i) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.30)$$

2. De  $\theta = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ , de  $\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 3\sigma_m$  ainsi que de (4.26), on tire

$$\begin{aligned} \theta &= \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \text{tr} \left[ \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \right] \\ &= \frac{-3\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{1-2\nu}{E} 3\sigma_m \end{aligned} \quad (4.31)$$

La dilatation volumique  $\theta$  est donc proportionnelle à la contrainte moyenne  $\sigma_m$ . Si  $K$  désigne le module de compressibilité volumétrique donné par

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.32)$$

on a

$$\theta = \frac{\sigma_m}{K} \quad (4.33)$$

3. Si  $\nu = \frac{1}{2}$ , de (4.32) et (4.33), on déduit  $\theta = \text{div}_x \mathbf{u} = 0$ , c'est-à-dire l'incompressibilité du matériau.
4. Des décompositions (2.218) de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et (3.134) de  $\boldsymbol{\sigma}$  en parties sphérique et déviatorique ainsi que de (4.26), on tire

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{3} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{e} &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{-\nu}{E} 3\sigma_m \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} [\sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s}] \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.34)$$


La décomposition (2.218) de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  étant unique, on en déduit

$$\frac{\theta}{3} = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_m \quad \mathbf{e} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{s} \quad (4.35)$$

c'est-à-dire la relation (4.33) jointe à la proportionalité des déviateurs de déformation et de contrainte, cette dernière s'écrivant encore, compte tenu de (4.29),

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \mathbf{s} \quad (4.36)$$

## 4.2.2 Approche en contraintes

 [tab48.html](#) Conformément au principe de déterminisme de la rhéologie (i.e. la cinématique détermine les contraintes), nous nous proposons ici d'exprimer le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant élastique linéaire, il existe une correspondance locale linéaire entre  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ , c'est-à-dire un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre 4 (dépendant a priori de  $\vec{x}$  et de  $t$ ), ou tenseur d'élasticité, tel que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.37)$$

On a alors, en explicitant cette égalité relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.38)$$

Le matériau étant isotrope, le tenseur  $\mathbf{A}$  est un tenseur isotrope d'ordre 4 et l'on a donc, compte tenu des considérations développées dans l'annexe A (section A.3 page 394),

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk} \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4 \quad (4.39)$$

Injectons (4.39) dans (4.38). Il vient alors, en tirant partie de la symétrie de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu_1 \varepsilon_{ij} + \mu_2 \varepsilon_{ji} \\ &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (\mu_1 + \mu_2) \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Posant  $2\mu = \mu_1 + \mu_2$ , on en déduit

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.41)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.42)$$

Les grandeurs physiques  $\lambda$  et  $\mu$  sont les **modules de Lamé**. Homogènes à une contrainte, ceux-ci s'expriment en Pa et ses multiples.

### Remarques

1. Détaillons les relations (4.41). Il vient

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) & \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases} \quad (4.43)$$

2. On retrouve à nouveau, en considérant les relations (4.41), (4.42) ou (4.43), la proportionnalité entre les contraintes de cisaillement  $\sigma_{ij}$ ,  $(i, j \neq i) \in \{1, 2, 3\}^2$ , et les distorsions  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ .

$$\sigma_{ij} = \mu\gamma_{ij} \quad \forall (i, j \neq i) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.44)$$

et la comparaison de ces égalités avec (4.30) montre que  $\mu$  n'est autre que le module de cisaillement de Coulomb  $G$  défini par (4.29)

$$\mu = G \quad (4.45)$$

3. De  $3\sigma_m = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ , de  $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \theta$  ainsi que de (4.42), on déduit

$$\begin{aligned} 3\sigma_m &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \\ &= \text{tr } [\lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}] \\ &= 3\lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (3\lambda + 2\mu)\theta \end{aligned} \quad (4.46)$$

et l'on retrouve bien la proportionnalité entre la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et la dilatation volumique  $\theta$

$$\sigma_m = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta \quad (4.47)$$

la comparaison de cette relation avec (4.33) fournissant par ailleurs

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.48)$$

4. Des décompositions (3.134) de  $\boldsymbol{\sigma}$  et (2.218) de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en parties sphérique et déviatorique ainsi que de (4.42), on tire

$$\begin{aligned} \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s} &= \lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \lambda\theta \boldsymbol{\delta} + 2\mu[\frac{\theta}{3}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}] \\ &= (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta \boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.49)$$

La décomposition (3.134) de  $\boldsymbol{\sigma}$  étant unique, on en déduit


$$\sigma_m = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta \quad \mathbf{s} = 2\mu\mathbf{e} \quad (4.50)$$

c'est-à-dire la relation (4.47) et la proportionnalité des déviateurs de contrainte et de déformation

$$\mathbf{s} = 2\mu\mathbf{e} \quad (4.51)$$

dont la comparaison avec (4.36) redonne bien (4.45).

### 4.2.3 Synthèse des deux approches

 [tab49.html](#) Les développements des deux sections précédentes nous ont montré que l'élasticité linéaire isotrope implique deux paramètres mécaniques : le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  (expression (4.26) des déformations en fonction des contraintes), ou bien les modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  (expression (4.42) des contraintes en fonction des déformations). Les relations (4.26) et (4.42) étant inverses l'une de l'autre, ces deux jeux de paramètres sont évidemment liés. On peut par exemple exprimer simplement  $\lambda$  et  $\mu$  en fonction de  $E$  et  $\nu$  en rapprochant les expressions (4.32) et (4.48) du module de compressibilité volumétrique  $K$  ainsi que celles du module de cisaillement de Coulomb  $G$  fournies par (4.29) et (4.45). Il vient alors

$$\begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu} \end{cases} \quad (4.52)$$

ce qui donne, après avoir reporté la première de ces équations dans la seconde,

$$\boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (4.53)$$

De (4.52), on tire par ailleurs

$$E = 2\mu(1+\nu) = (3\lambda + 2\mu)(1-2\nu) \quad (4.54)$$

c'est-à-dire

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.55)$$

et l'on a donc finalement, en réinjectant cette dernière égalité dans (4.54),

$$\boxed{E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}} \quad (4.56)$$

Intéressons-nous à présent au signe des paramètres mécaniques  $E$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  en exploitant, sans le démontrer, le résultat suivant issu de considérations thermodynamiques : les conditions thermodynamiques d'équilibre (transformations adiabatique et isotherme) impliquent la positivité (stricte) de l'énergie locale de déformation élastique  $w$  définie par

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.57)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  liés par (4.26) ou (4.42).

Travaillons tout d'abord sur l'expression du produit doublement contracté  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$ . Des décompositions (2.218) de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et (3.134) de  $\boldsymbol{\sigma}$  en parties sphérique et déviatorique, on tire, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\
 &= (\sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}) \left( \frac{\theta}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \right) \\
 &= \sigma_m \frac{\theta}{3} \delta_{ij} \delta_{ij} + s_{ij} e_{ij} + \sigma_m \underbrace{\delta_{ij} e_{ij}}_{=\text{tr } \mathbf{e}=0} + \frac{\theta}{3} \underbrace{\delta_{ij} s_{ij}}_{=\text{tr } \mathbf{s}=0} \\
 &= \sigma_m \theta + s_{ij} e_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

et l'on a donc la relation intrinsèque

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_m \theta + \mathbf{s} : \mathbf{e} \tag{4.59}$$

Considérant (4.33) et (4.36), on obtient alors, pour un matériau élastique linéaire isotrope,

$$w = \frac{1}{2} [K \theta^2 + 2G \mathbf{e} : \mathbf{e}] \tag{4.60}$$

c'est-à-dire

$$w = \frac{1}{2} [K \theta^2 + 2G \|\mathbf{e}\|^2] \tag{4.61}$$

Le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pouvant être purement déviatorique comme purement isotrope (ce qui exclut du raisonnement le cas des milieux incompressibles c'est-à-dire  $\nu = \frac{1}{2}$ ), de la relation de stabilité thermodynamique  $w > 0$ , on déduit les conditions nécessaires et suffisantes

$$G > 0 \quad K > 0 \tag{4.62}$$

et l'on a donc, compte tenu de (4.45) et (4.48),

$$\mu > 0 \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \tag{4.63}$$

Considérant ensuite (4.29) et (4.32), il vient

$$\frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \quad \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \tag{4.64}$$

c'est-à-dire

$$E > 0 \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{4.65}$$

À titre d'exemple, nous avons regroupé, dans le tableau 4.1, les valeurs prises par les paramètres mécaniques  $E$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  pour différents matériaux possédant un domaine d'élasticité linéaire isotrope.

TAB. 4.1 – Constantes mécaniques élastiques de différents matériaux

	$E$ (MPa)	$\nu$	$\lambda$ (MPa)	$\mu$ (MPa)
Acier	210000	0.28	104400	82000
Aluminium	74000	0.34	58700	27600
Verre	65000	0.3	37500	25000
Granite	60000	0.27	27700	23600
Plexiglas	2900	0.3	1700	1100
Béton	40000	0.25	16000	16000

### Remarques

1. Lorsque  $\nu = \frac{1}{4}$ , les modules de Lamé sont égaux :  $\lambda = \mu \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{4}$ .
2. Exprimons les relations (4.28) sous forme matricielle. Il vient

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Il est alors facile de retrouver les conditions de stabilité (4.65) en calculant les valeurs propres de cette matrice symétrique. Notons tout d'abord que le vecteur  $\vec{k} = {}^t[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0]$  de  $\mathbb{R}^6$  est manifestement un vecteur propre associé à la valeur propre  $\frac{1-2\nu}{E}$ . Considérant alors un vecteur quelconque orthogonal à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire de la forme  ${}^t[a, b, c, d, e, f]$  avec  $a + b + c = 0$ , nous déduisons immédiatement que ce dernier est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\frac{1+\nu}{E}$ . Les valeurs propres de la matrice définie par (4.66) sont donc  $\lambda_1 = \frac{1-2\nu}{E}$  (valeur propre simple) et  $\lambda_2 = \frac{1+\nu}{E}$  (valeur propre de multiplicité 5). La condition de stabilité thermodynamique  $w > 0$  équivalant à leur stricte positivité, on retrouve bien (4.64), c'est-à-dire (4.65).

De façon duale, de (4.43), on tire

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on montre alors aisément que cette matrice, inverse de celle définie par (4.66), a pour valeur propre simple  $\lambda_1^{-1} = 3\lambda + 2\mu$  associée au vecteur propre  $\vec{k} = {}^t[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0]$  de  $\mathbb{R}^6$  et pour valeur propre de multiplicité 5  $\lambda_2^{-1} = 2\mu$  liée à l'hyperplan orthogonal à  $\vec{k}$ . Expriment la stricte positivité de ces dernières, on retrouve cette fois (4.63).

3. Lorsque  $\nu = \frac{1}{2}$  (matériau incompressible), le module de Lamé  $\lambda$  n'est plus défini. On a par ailleurs  $\theta = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u} = 0$  (voir la remarque 3 page 223) et le terme  $\lambda \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$  est alors une forme indéterminée égale à la contrainte moyenne  $\sigma_m$ . En d'autres termes, on a

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.68)$$

En effet, de (4.26) et de la décomposition (3.134) de  $\boldsymbol{\sigma}$  en parties isotrope et déviatorique, on tire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{-\nu}{E} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{-\nu}{E} 3\sigma_m \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} (\sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s}) \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.69)$$

c'est-à-dire, puisque  $\nu = \frac{1}{2}$  et compte tenu de (4.53),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{s} = \frac{1}{2\mu} (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}) \quad (4.70)$$

et l'on retrouve bien (4.68). La connaissance du tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de la loi de Hooke ne suffisent alors plus à déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . Seule sa partie déviatorique  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$  reste accessible, la contrainte moyenne  $\sigma_m$  devenant ainsi une inconnue à part entière.

Enfin, notons que l'on a ici, compte tenu de (4.57), (4.59) et (4.36) et du fait que  $\theta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}$ ,

$$w = G \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \quad (4.71)$$

Le module de cisaillement de Coulomb  $G$  étant strictement positif, l'énergie locale de déformation  $w$  l'est donc également.

4. De (4.57), (4.59), (4.33) et (4.36), on tire

$$w = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{K} \sigma_m^2 + \frac{1}{2G} \mathbf{s} : \mathbf{s} \right] \quad (4.72)$$

c'est-à-dire

$$w = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_m^2}{K} + \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2G} \right] \quad (4.73)$$

#### 4.2.4 Thermoélasticité linéaire isotrope

 [tab410.html](#) Introduisons tout d'abord l'

**Hypothèse 5 (Décomposition de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ )** *Le tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  admet une décomposition additive en une partie d'origine mécanique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ , liée à l'histoire des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , et une partie d'origine thermique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(th)}$ , due aux variations de la température absolue  $T$ .*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(th)} \quad (4.74)$$

Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant isotrope, les variations de température n'engendrent que des dilatations  $\varepsilon_{nn}$  indépendantes de la direction  $\vec{n}$  considérée. Autrement dit, le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(th)}$  est isotrope et l'on a, si  $T_0$  désigne la température à l'instant de référence  $T_0$  (température initiale) et  $\beta$  le **coefficient de dilatation thermique linéaire** (unité  $\text{K}^{-1}$ ),

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(th)} = \beta(T - T_0)\boldsymbol{\delta} \quad (4.75)$$


La composante mécanique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  étant régie par la loi de Hooke (4.26), il vient alors, compte tenu de (4.74),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{-\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} + \beta(T - T_0) \right] \boldsymbol{\delta} + \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.76)$$

Enfin, de (4.42) et de (4.74), on tire également

$$\boldsymbol{\sigma} = [\lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\beta(T - T_0)] \boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.77)$$

#### 4.2.5 Exemple de sollicitation thermomécanique

 [tab411.html](#) Considérons ici la poutre de longueur  $l$  et de section droite de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  représentée sur la figure 4.5.

Constituée d'un matériau homogène et non pesant ayant un comportement élastique linéaire isotrope, cette poutre est soumise à une variation de température positive  $\Delta T = T - T_0$ , sa longueur étant par ailleurs maintenue constante. Les parois latérales étant libres et les conditions de l'expérience idéales (i.e. absence de frottement entre les extrémités gauche et droite de la poutre et les embases maintenant sa longueur constante), la transformation est alors homogène et les directions principales de contrainte et de déformation coïncident avec celles du repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Les tenseurs des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont



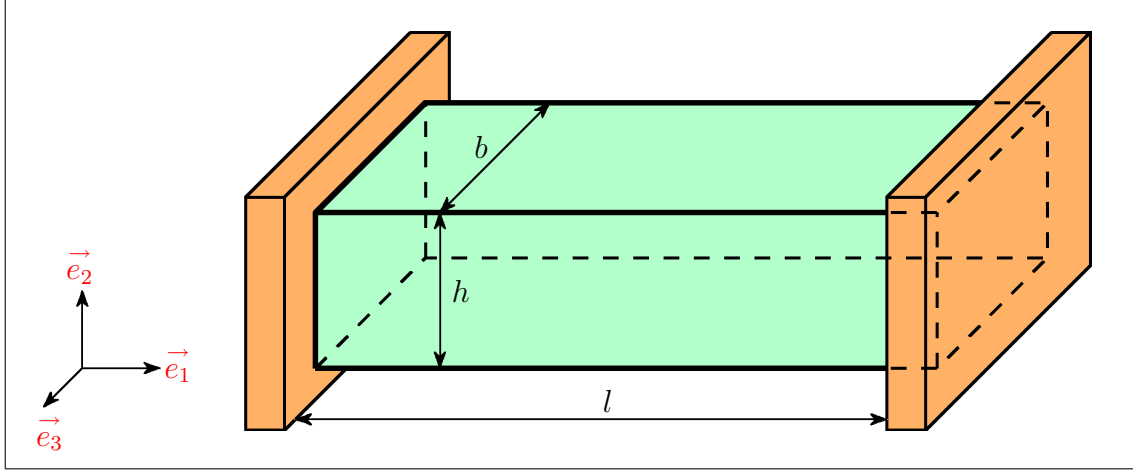


FIG. 4.5 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique

alors indépendants des variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et ont pour matrices représentatives relativement à ce repère

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

avec  $\varepsilon_1 = 0$  (longueur de la poutre constante) et  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (parois latérales libres). On a alors, en exprimant (4.76) relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de  $\varepsilon_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,

$$\begin{cases} 0 &= \frac{-\nu}{E}\sigma_1 + \beta(T - T_0) + \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{-\nu}{E}\sigma_1 + \beta(T - T_0) \\ \varepsilon_3 &= \frac{-\nu}{E}\sigma_1 + \beta(T - T_0) \end{cases} \quad (4.79)$$

ce qui donne tout d'abord


$$\sigma_1 = -E\beta(T - T_0) \quad (4.80)$$

Reportant cette égalité dans les deuxième et troisième équations (4.79), nous obtenons alors

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = (1 + \nu)\beta(T - T_0) \quad (4.81)$$

La dilatation thermique empêchée dans la direction de  $\vec{e}_1$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ) engendre donc la contrainte thermique de compression  $\sigma_1$  donnée par (4.80). Enfin, l'expression (4.81) montre qu'à la dilatation thermique  $\beta(T - T_0)$  dans les directions  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  normales aux bords libres de la poutre se superpose la dilatation mécanique  $\frac{-\nu}{E}\sigma_1 = \nu\beta(T - T_0)$  due à la contrainte normale  $\sigma_1$  (effet Poisson).

### 4.3 Notion de critère de limite élastique

 [pap43.html](#) L'essai de traction simple d'un barreau d'acier doux décrit dans la section 4.1.1.2 nous a permis d'introduire la notion de limite élastique, au-delà de laquelle apparaissent des déformations permanentes (non recouvrables après décharge), ou déformations plastiques. Nous nous proposons ici de généraliser ce concept à un état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  tridimensionnel.

Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant supposé admettre un domaine de sollicitations pour lesquelles son comportement est élastique linéaire isotrope, dans toute cette section nous omettrons les variables d'espace et de temps par souci de simplicité, et nous désignerons simplement par  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $P_t$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  extrémité du vecteur  $\vec{x}$  et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés.

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des paramètres de mémoire du matériau différents de  $\boldsymbol{\sigma}$ , et soit  $\mathcal{D}^e$  son domaine élastique, ensemble des valeurs  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{H})$  pour lesquelles le comportement reste réversible, c'est-à-dire ici élastique linéaire isotrope. On appelle alors **critère de limite élastique** toute fonction réelle  $F$  des variables  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathcal{H}$  telle que l'on ait

$$\mathcal{D}^e = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{H}), F(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{H}) \leq 0\} \quad (4.82)$$

Nous avons par exemple, dans le cas particulier de l'essai de traction simple de la section 4.1.1.2,

$$F(\Sigma_a, \Sigma_e) = \Sigma_a - \Sigma_e \quad (4.83)$$


Soient  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  les contraintes principales. Le milieu continu  $\mathcal{M}$  étant isotrope, le critère de limite élastique ne dépend que de  $\mathcal{H}$  et de ces dernières et est invariant par permutation circulaire de leurs indices 1, 2 et 3, de sorte qu'à  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  nous pouvons substituer les invariants  $I_1, J_2$  et  $J_3$  définis par (3.136) et (3.137). Omettant l'ensemble  $\mathcal{H}$  des paramètres d'histoire dans un souci de simplicité, nous écrirons alors

$$\mathcal{D}^e = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3, F(I_1, J_2, J_3) \leq 0\} \quad (4.84)$$


avec  $I_1, J_2$  et  $J_3$  donnés par (3.136) et (3.137).

L'équation  $F(I_1, J_2, J_3) = 0$  définit alors, dans le système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  d'axes ortho-normés direct d'origine  $o$  de  $\mathbb{R}^3$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  (voir la figure 3.10 page 186), une **surface limite**, frontière du domaine élastique  $\mathcal{D}^e$  défini par (4.84). La fonction  $F$  étant d'autre part invariante par permutation circulaire des indices des contraintes principales, cette surface est elle-même invariante par rotation d'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$  autour de la trisectrice  $\Delta$  (figure 3.10 page 186).

### 4.3.1 Exemples de critères indépendants de la contrainte moyenne

 [pap431.html](#) De tels critères sont donc indépendants du premier invariant des contraintes  $I_1 = \sigma_m$ . Dans le système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  d'axes orthonormés direct d'origine  $o$  de  $\mathbb{R}^3$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , la surface limite définie ici par  $F(J_2, J_3) = 0$  est alors invariante par translation dans la direction de la trisectrice  $\Delta$ , ainsi que l'on peut aisément s'en convaincre en considérant les relations (3.148) ou (3.149) établies dans la section 3.4.4. En d'autres termes, cette surface est un cylindre ayant pour axe la trisectrice.

#### 4.3.1.1 Critère de Tresca

 [pap4311.html](#) Ce critère, encore appelé critère du cisaillement maximum et adapté aux métaux ainsi qu'aux argiles saturées, a la signification physique suivante : l'état de limite élastique est atteint lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  définie par (3.19) (voir aussi la figure 3.4 page 160) atteint une valeur critique  $\tau_0$ , où  $\tau_0 > 0$  est une constante caractéristique du matériau. Le domaine élastique est alors défini par

$$\tau_n \leq \tau_0 \quad \forall \vec{n} \quad (4.85)$$

Dans le système d'axes orthonormés direct du plan (plan de Mohr) ayant pour abscisse la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  définie par (3.17) et pour ordonnée la contrainte tangentielle  $\tau_n$ , système d'axes introduit dans la section 3.4.6.2 et illustré par la figure 3.14 page 198, ce domaine élastique est donc compris entre les droites d'équations respectives  $\tau_n = 0$  et  $\tau_n = \tau_0$  (figure 4.6). Le cisaillement maximal  $\tau_n$  étant égal à la demi-différence des contraintes extrémales (voir la remarque de la fin de la section 3.4.6.2, page 199), on en déduit aisément l'équation de la surface limite en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = 2\tau_0 \quad (4.86)$$

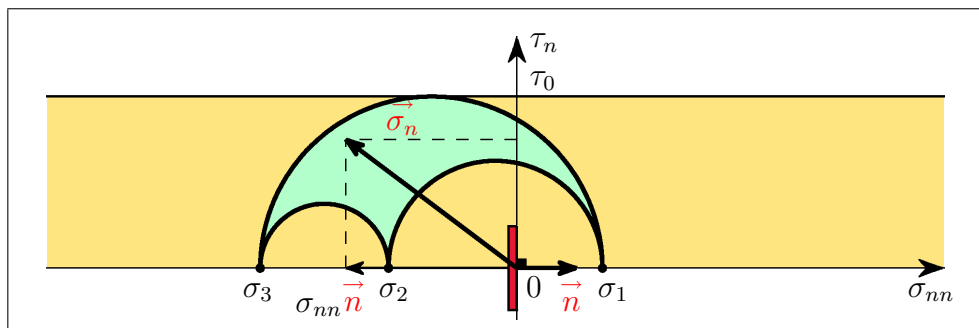


FIG. 4.6 – Représentation du critère de Tresca dans le plan de Mohr

Considérons alors un essai homogène de traction simple pour lequel  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  et  $\sigma_1 \geq 0$ , et désignons par  $\sigma_0$  la valeur de  $\sigma_1$  à la limite élastique, ou limite élastique en traction simple. De l'équation (4.86), on tire immédiatement

$$\sigma_0 = 2\tau_0 \quad (4.87)$$

Cette même équation étant invariante par changement simultané de signe des contraintes principales, on en déduit que la limite élastique en compression simple ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 \leq 0$ ) n'est autre que  $-\sigma_0$ .

Intéressons-nous à présent à la forme de la surface limite (4.86) dans le système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  d'axes orthonormés direct d'origine  $o$  de  $\mathbb{R}^3$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Si  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  désignent les valeurs principales du déviateur des contraintes  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$ , cette surface a également pour expression, compte tenu de (3.140) ainsi que de (4.87),

$$\max \{|s_1 - s_2|, |s_1 - s_3|, |s_2 - s_3|\} = \sigma_0 \quad (4.88)$$

La surface limite étant un cylindre ayant pour axe la trisectrice  $\Delta$ , il nous suffit de déterminer sa trace dans un quelconque plan  $(\Pi)$  orthogonal à  $\Delta$ , ou plan déviatorique. Nous savons par ailleurs que cette surface est invariante par rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\pm \frac{2\Pi}{3}$  (isotropie), ainsi que par changement simultané de signe des contraintes principales (voir ci-dessus). Elle est donc invariante par rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\pm k\frac{\Pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de sorte que nous n'avons plus qu'à exhiber sa trace dans le secteur  $(S)$  du plan  $(\Pi)$  défini par  $\phi \in [0, \frac{\Pi}{3}]$ , où  $\phi$  est l'angle de Lode introduit dans la section 3.4.4 (voir la figure 3.10 page 186).

Notons que les états de contrainte  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  situés dans ce secteur satisfont la relation  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , c'est-à-dire, avec (3.140),  $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ . Désignant alors par  $H$  le point d'intersection du plan déviatorique  $(\Pi)$  et de la trisectrice  $\Delta$  (figure 4.7), de cette double inégalité, de  $\text{tr } \mathbf{s} = 0$  ainsi que de (4.88), on déduit, en tirant parti de (3.151), que la trace de la surface limite dans le secteur  $(S)$  de  $(\Pi)$  caractérisé par  $\phi \in [0, \frac{\Pi}{3}]$  n'est autre que l'ensemble des points  $M$  définis, relativement au système d'axes  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$ , par

$$\overrightarrow{HM} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

avec,

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \\ s_1 - s_3 &= \sigma_0 \\ s_1 \geq s_2 \geq s_3 \end{aligned} \quad (4.90)$$

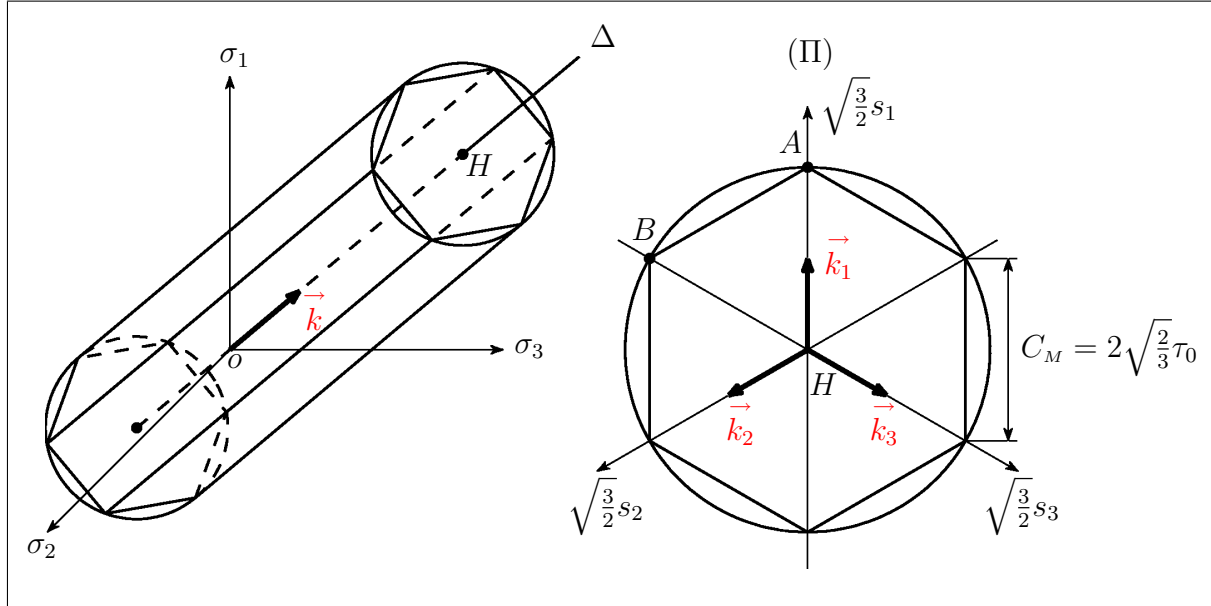


FIG. 4.7 – Critères de Tresca et de Von-Mises

Soient tout d'abord  $A$  et  $B$  les points représentés sur la figure 4.7, intersections respectives de la surface limite avec les projections sur (II) des axes  $o\sigma_1$  et  $-o\sigma_3$ . Identifiant  $s_2$  et  $s_3$  (resp<sup>t</sup>  $s_1$  et  $s_2$ ) dans (4.90), nous obtenons

$$\vec{HA} = \frac{\sigma_0}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{HB} = \frac{\sigma_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Montrons alors que l'ensemble des points  $M$  caractérisés (relativement à  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$ ) par (4.89) et (4.90) n'est autre que le segment d'extrémités  $A$  et  $B$ . Les points  $M'$  de ce segment étant définis relativement à  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  par

$$\vec{HM'} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \alpha \vec{HA} + (1 - \alpha) \vec{HB} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.92)$$

il vient


$$\begin{cases} z_1 = \frac{\sigma_0}{3}(1 + \alpha) \\ z_2 = \frac{\sigma_0}{3}(1 - 2\alpha) \\ z_3 = \frac{\sigma_0}{3}(\alpha - 2) \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.93)$$

et l'on a donc

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \frac{\sigma_0}{3}(1 + \alpha + 1 - 2\alpha + \alpha - 2) = 0 \\ z_1 - z_3 = \frac{\sigma_0}{3}(1 + \alpha - \alpha + 2) = \sigma_0 \\ z_1 - z_2 = \frac{\sigma_0}{3}(1 + \alpha - 1 + 2\alpha) = \alpha\sigma_0 \geq 0 \\ z_2 - z_3 = \frac{\sigma_0}{3}(1 - 2\alpha - \alpha + 2) = (1 - \alpha)\sigma_0 \geq 0 \end{cases} \quad (4.94)$$

Les coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  de  $\overrightarrow{HM'}$  relativement au système d'axes  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  satisfont donc les relations (4.90), et la trace de la surface limite dans le secteur ( $S$ ) de ( $\Pi$ ) est bien le segment d'extrémités  $A$  et  $B$ . Conséquemment, et compte tenu des différentes symétries soulignées plus haut, la surface limite associée au critère de Tresca n'est autre que le cylindre ayant pour axe la trisectrice  $\Delta$  et dont la section par un quelconque plan déviatorique s'identifie à l'hexagone régulier de côté  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  représenté sur la figure 4.7.

#### 4.3.1.2 Critère de Von-Mises

 [pap4312.html](#) Le critère de Von-Mises, essentiellement utilisé pour les métaux, ne dépend que du seul invariant  $J_2$  défini par (3.137). Le domaine élastique est ainsi donné par

$$\sqrt{J_2} \leq C_M \quad (4.95)$$

La signification physique de ce critère se déduit aisément de (3.139) : l'état de limite élastique est atteint lorsque la norme  $\|\mathbf{s}\|$  du déviateur des contraintes  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$  atteint la valeur critique  $C_M$ , où  $C_M > 0$  est une constante caractéristique du matériau.

L'expression de la surface limite en fonction des valeurs principales  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  de  $\mathbf{s}$  est immédiate. On a en effet, avec (3.141),

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = C_M \quad (4.96)$$

Tirant alors parti de (3.140) et de la définition (3.41) de la contrainte moyenne, nous obtenons

$$\begin{aligned} s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= (\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 3\sigma_m^2 - 2\sigma_m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\sigma_m^2 \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{2}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) \\ &= \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (4.97)$$

La surface limite s'exprime donc en fonction des contraintes principales, comme suit :

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{3}C_M \quad (4.98)$$

et l'on en déduit aussitôt la limite élastique  $\sigma_0$  en traction simple ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 \geq 0$ )

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}C_M \quad (4.99)$$

la limite élastique en compression simple ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 \leq 0$ ) étant quant à elle égale à  $-\sigma_0$ .

Enfin, de (3.152), il découle immédiatement que la surface limite associée au critère de Von-Mises dans le système d'axes orthonormés  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  n'est autre que le cylindre de révolution ayant pour axe la trisectrice  $\Delta$  et pour rayon  $C_M$  (figure 4.7).

### Remarques

1. Faisant coïncider les critères de Tresca et de Von-Mises pour les essais homogènes de traction et de compression simple, on obtient


$$C_M = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\tau_0 \quad (4.100)$$

2. Lorsque les contraintes principales sont deux à deux distinctes, le critère de Tresca est indépendant de la contrainte intermédiaire (i.e. ni maximale ni minimale), alors que le critère de Von-Mises implique cette dernière.

## 4.3.2 Exemples de critères dépendants de la contrainte moyenne

Les critères dépendants de la contrainte moyenne sont évidemment fonction du premier invariant des contraintes  $I_1 = \sigma_m$ , de sorte que la surface limite dans le système d'axes orthonormés direct d'origine  $o$  de  $\mathbb{R}^3$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  n'est à présent plus invariante par translation dans la direction de la trisectrice  $\Delta$ . Le matériau étant isotrope, elle reste néanmoins inchangée par rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\pm\frac{2\Pi}{3}$ .

### 4.3.2.1 Critère de Mohr-Coulomb

 [pap4321.html](#) Ce critère, adapté aux matériaux granulaires, traduit la réalité physique suivante : pour de tels matériaux, la résistance au cisaillement augmente avec le confinement (compression isotrope). L'état de limite élastique est alors atteint lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  définie par (3.19) atteint une valeur critique  $\tau_{\max}(\sigma_{nn})$ , où  $\tau_{\max}$  est une fonction positive décroissante de la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  donnée par (3.17). Autrement dit,  $\tau_{\max}$  augmente avec  $-\sigma_{nn}$ , ce qui traduit bien l'accroissement de la résistance au cisaillement avec les contraintes normales de compression ( $\sigma_{nn} < 0$ ). De façon plus précise, le domaine élastique est défini par

$$\tau_n + \sigma_{nn} \tan \varphi \leq C \quad \forall \vec{n} \quad (4.101)$$

où  $C \geq 0$  et  $\varphi \geq 0$  sont des constantes caractéristiques du matériau. La constante  $C$  représente la résistance au cisaillement sur une facette en l'absence de contrainte normale ( $\sigma_{nn} = 0$ ) et est pour cela appelée cohésion. Le matériau est dit cohérent si  $C > 0$ , et pulvérulent si  $C = 0$ . L'angle  $\varphi$ , qui traduit l'augmentation de la résistance au cisaillement due aux contacts intergranulaires induits par les contraintes normales de compression, est quant à lui appelé angle de frottement interne. Lorsque  $\varphi = 0$  (et donc  $C > 0$ ), le matériau est dit purement cohérent et le critère de Mohr-Coulomb coïncide alors avec celui de Tresca.

Dans le plan de Mohr ayant pour abscisse la contrainte normale  $\sigma_{nn}$  et pour ordonnée la contrainte tangentielle  $\tau_n$ , le domaine élastique défini par (4.101) est situé à gauche du point de coordonnées  $(C \cot \varphi, 0)$  et compris entre les droites d'équations respectives  $\tau_n = 0$  et  $\tau_n = C - \sigma_{nn} \tan \varphi$ , cette dernière étant appelée droite intrinsèque du matériau (figure 4.8).

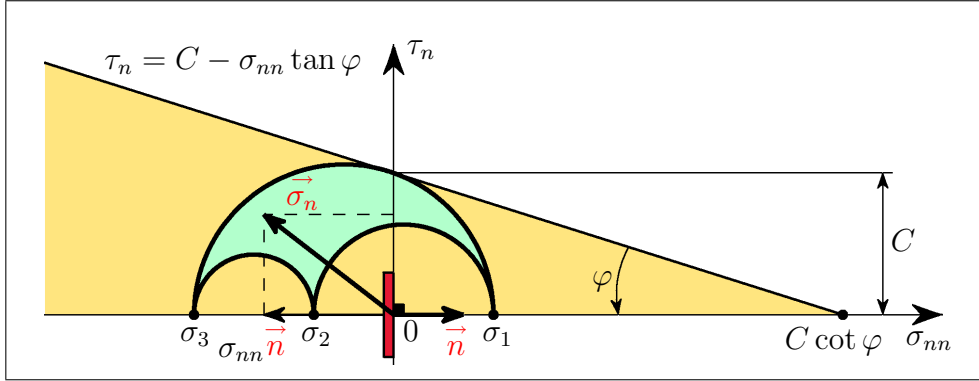


FIG. 4.8 – Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr

De l'examen de la figure 4.8, déduisons alors l'équation de la surface limite en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Soit pour cela  $M = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ,  $m = \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ,  $R = \frac{M-m}{2}$  le rayon du plus grand des trois cercles du tricercele de Mohr, et  $\Omega = \frac{M+m}{2}$  l'abscisse de son centre. Il vient

$$R = C \cos \varphi - \Omega \sin \varphi \quad (4.102)$$

c'est-à-dire

$$\frac{M-m}{2} = C \cos \varphi - \frac{M+m}{2} \sin \varphi \quad (4.103)$$

ce qui donne

$$(1 + \sin \varphi)M - (1 - \sin \varphi)m = 2C \cos \varphi \quad (4.104)$$

et la surface limite a donc pour équation

$$(1 + \sin \varphi) \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} - (1 - \sin \varphi) \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = 2C \cos \varphi \quad (4.105)$$

Soient  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  les valeurs principales du déviateur des contraintes  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$ . La surface limite a alors également comme expression, compte tenu de (3.140),

$$(1 + \sin \varphi) \max\{s_1, s_2, s_3\} - (1 - \sin \varphi) \min\{s_1, s_2, s_3\} = 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \quad (4.106)$$

Considérons à présent un essai homogène de compression à contrainte latérale constante pour lequel  $\sigma_2 = \sigma_3 \leq C \cot \varphi$  et  $\sigma_1 \leq \sigma_3$ , et désignons par  $\sigma_1^c$  la valeur de  $\sigma_1$  à la limite élastique. De (4.105), on tire aisément

$$\sigma_1^c = -2C \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} + \sigma_3 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4.107)$$



De cette même équation, on déduit également la valeur  $\sigma_1^t$  de  $\sigma_1$  à la limite élastique pour l'essai homogène de traction à contrainte latérale constante ( $\sigma_2 = \sigma_3 \leq C \cot \varphi$  et  $\sigma_1 \geq \sigma_3$ )

$$\sigma_1^t = 2C \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} + \sigma_3 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (4.108)$$

Intéressons-nous enfin à la forme de la surface limite donnée par (4.105) ou (4.106) dans le système d'axes orthonormés direct  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  associé aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Soit  $(\Pi)$  un plan déviatorique donné coupant cette surface, et soit  $H$  le point d'intersection de  $(\Pi)$  avec la trisectrice  $\Delta$  (figure 4.9), de coordonnées  $(\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$  relativement à ce système d'axes<sup>2</sup>. La surface limite étant invariante par rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\pm \frac{2\Pi}{3}$ , sa trace dans le plan  $(\Pi)$  est entièrement déterminée par sa restriction aux secteurs  $(S_1)$  et  $(S_2)$  de ce plan respectivement définis par  $\phi \in [0, \frac{\Pi}{3}]$  et  $\phi \in [\frac{\Pi}{3}, \frac{2\Pi}{3}]$ , où  $\phi$  est l'angle de Lode introduit dans la section 3.4.4.

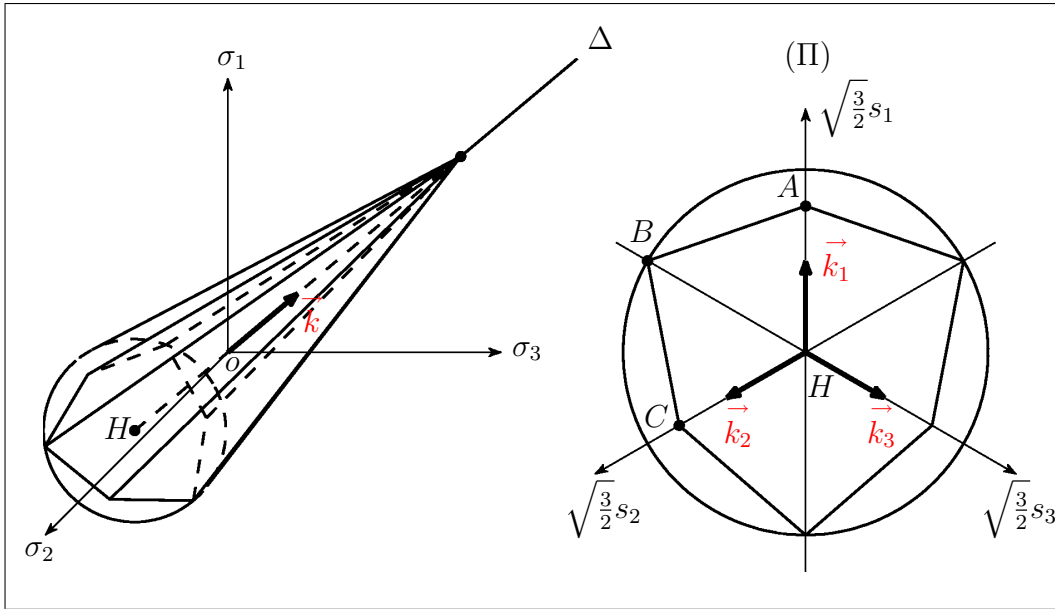


FIG. 4.9 – Critères de Drucker-Prager et de Mohr-Coulomb

Intéressons-nous tout d'abord au secteur  $(S_1)$ . Les états de contrainte situés dans ce dernier satisfont  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , c'est-à-dire  $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ . De cette double inégalité, de  $\text{tr } \mathbf{s} = 0$ , de (3.151) ainsi que de (4.106), on déduit alors que la trace de la surface limite dans ce secteur n'est autre que l'ensemble des points  $M$  définis relativement au système d'axes

<sup>2</sup>Nous supposons donc l'intersection entre  $(\Pi)$  et la surface limite non vide. Ceci est toujours vrai si  $\varphi = 0$ , et nécessite  $\sigma_m \leq C \cot \varphi$  si  $\varphi > 0$ , en vertu de (3.149) et des notations de la figure 4.8

$\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  par

$$\vec{HM} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

avec

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \\ (1 + \sin \varphi)s_1 - (1 - \sin \varphi)s_3 &= 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \\ s_1 \geq s_2 \geq s_3 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Soient  $A$  et  $B$  les points d'intersection de la surface limite avec les projections respectives sur  $(\Pi)$  des axes  $o\sigma_1$  et  $-o\sigma_3$  (figure 4.9). Identifiant  $s_2$  et  $s_3$  (resp<sup>t</sup>  $s_1$  et  $s_2$ ) dans (4.110), nous obtenons

$$\vec{HA} = \frac{2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi]}{3 + \sin \varphi} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{HB} = \frac{2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi]}{3 - \sin \varphi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Considérons alors les points  $M'$  du segment d'extrémités  $A$  et  $B$  définis relativement à  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  par

$$\vec{HM}' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \alpha \vec{HA} + (1 - \alpha) \vec{HB} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.112)$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} z_1 = 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \frac{3 + \sin \varphi + 3\alpha(1 - \sin \varphi)}{9 - \sin^2 \varphi} \\ z_2 = 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \frac{3 + \sin \varphi - 6\alpha}{9 - \sin^2 \varphi} \\ z_3 = 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \frac{-6 - 2\sin \varphi + 3\alpha(1 + \sin \varphi)}{9 - \sin^2 \varphi} \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.113)$$

Posant alors

$$K = \frac{2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi]}{9 - \sin^2 \varphi} \quad (4.114)$$

on en déduit

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= K [(3 + \sin \varphi)(1 + 1 - 2) + 3\alpha(1 - \sin \varphi - 2 + 1 + \sin \varphi)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.115)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 (1 + \sin \varphi)z_1 - (1 - \sin \varphi)z_3 &= z_1 - z_3 + \sin \varphi(z_1 + z_3) \\
 &= K [9 + 3 \sin \varphi - 6\alpha \sin \varphi \\
 &\quad + \sin \varphi(-3 - \sin \varphi + 6\alpha)] \\
 &= K [9 + 3 \sin \varphi - 6\alpha \sin \varphi \\
 &\quad - 3 \sin \varphi - \sin^2 \varphi + 6\alpha \sin \varphi] \\
 &= K [9 - \sin^2 \varphi]
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (4.114),

$$(1 + \sin \varphi)z_1 - (1 - \sin \varphi)z_3 = 2[C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi] \tag{4.117}$$

Notons par ailleurs que l'on a  $C \cos \varphi - \sigma_m \sin \varphi \geq 0$ . Le résultat est en effet immédiat si  $\varphi = 0$ , et découle de  $\sigma_m \leq C \cot \varphi$  si  $\varphi > 0$  (figure 4.8). On a alors  $K \geq 0$  et il vient

$$z_1 - z_2 = K [3\alpha(3 - \sin \varphi)] \geq 0 \tag{4.118}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 z_2 - z_3 &= K [9 + 3 \sin \varphi - 9\alpha - 3\alpha \sin \varphi] \\
 &= 3K(1 - \alpha)(3 + \sin \varphi) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.119}$$


Les composantes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  de  $\vec{HM}$  relativement au système d'axes  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  satisfont donc les relations (4.110), ce qui montre que la trace de la surface limite dans le secteur ( $S_1$ ) du plan déviatorique (II) n'est autre que le segment d'extrémités  $A$  et  $B$ .

Considérons à présent le secteur ( $S_2$ ) de ce plan, caractérisé par  $\phi \in [\frac{\Pi}{3}, \frac{2\Pi}{3}]$ . L'équation (4.105) de la surface limite étant invariante par permutation deux à deux des contraintes principales, cette dernière est donc symétrique par rapport à chacun des axes du système  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$ , et sa trace dans le plan déviatorique (II) est donc symétrique par rapport à leurs projections dans ce plan. Conséquemment, la surface limite a pour trace dans le secteur ( $S_2$ ) du plan (II) le segment  $BC$  représenté sur la figure 4.9, symétrique du segment  $BA$  par rapport à la projection dans ce plan de l'axe  $o\sigma_3$ .

Lorsque  $\varphi > 0$ , les normes des vecteurs  $\vec{HA}$  et  $\vec{HB}$  donnés par (4.111) sont des fonctions affines de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ , de sorte que la surface limite n'est autre, compte tenu des différentes symétries mentionnées plus haut, que le cône ayant pour sommet le point de  $\Delta$  de coordonnées  $(\sigma_c, \sigma_c, \sigma_c)$  avec  $\sigma_c = C \cot \varphi$ , et dont les sections par les plans déviatoriques l'intersectant sont semblables à l'hexagone irrégulier représenté sur la figure 4.9.

Enfin, si  $\varphi = 0$ , la surface limite est celle associée au critère de Tresca et donnée par la figure 4.7.

### 4.3.2.2 Critère de Drücker-Prager

 [pap4322.html](#) Le critère de Drücker-Prager, également adapté aux matériaux granulaires, implique les premier et second invariants  $I_1 = \sigma_m$  et  $J_2$  défini par (3.137). Le domaine élastique est alors caractérisé par

$$\sqrt{J_2} \leq C_D - \sqrt{3} \tan \psi \sigma_m \quad (4.120)$$

où  $\psi \geq 0$  et  $C_D \geq 0$  sont des constantes caractéristiques du matériau.

La signification physique de ce critère est identique à celle du critère de Mohr-Coulomb. En particulier, l'angle  $\psi$  joue un rôle analogue à l'angle de frottement interne  $\varphi$ , et la constante  $C_D$  est comparable à la cohésion  $C$ .

L'expression de la surface limite en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  découle immédiatement de (3.41) (3.141) et (4.97)

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{3} C_D - \tan \psi (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.121)$$

La limite élastique  $\sigma_1^t$  lors d'un essai homogène de traction simple à contrainte latérale constante ( $\sigma_2 = \sigma_3 \leq \frac{C_D}{\sqrt{3} \tan \psi}$  et  $\sigma_1 \geq \sigma_3$ ) est alors donnée par

$$\sigma_1^t = \frac{\sqrt{3} C_D}{\sqrt{2} + \tan \psi} + \sigma_3 \frac{\sqrt{2} - 2 \tan \psi}{\sqrt{2} + \tan \psi} \quad (4.122)$$

celle  $\sigma_1^c$  relative à l'essai de compression à contrainte latérale constante ( $\sigma_2 = \sigma_3 \leq \frac{C_D}{\sqrt{3} \tan \psi}$  et  $\sigma_1 \leq \sigma_3$ ) valant quant à elle

$$\sigma_1^c = \frac{-\sqrt{3} C_D}{\sqrt{2} - \tan \psi} + \sigma_3 \frac{\sqrt{2} + 2 \tan \psi}{\sqrt{2} - \tan \psi} \quad (4.123)$$

et l'on remarquera l'analogie entre ces relations et les expressions (4.108) et (4.107)

Si  $\psi > 0$ , on déduit par ailleurs aisément de (3.148) et (3.152) que la surface limite associée au critère de Drücker-Prager dans le système d'axes orthonormés  $\mathcal{S}^\sigma = (o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3)$  n'est autre que le cône de révolution ayant pour axe la trisectrice  $\Delta$ , pour sommet le point de  $\Delta$  de coordonnées  $(\sigma_c, \sigma_c, \sigma_c)$  avec  $\sigma_c = \frac{C_D}{\sqrt{3}} \cot \psi$  et pour demi-angle au sommet  $\psi$  (figure 4.9).

Enfin, si  $\psi = 0$  (et donc  $C_D > 0$ ), le critère de Drücker-Prager s'identifie à celui de Von-Mises.

## Remarques

1. Faisant correspondre les critères de Mohr-Coulomb et de Drücker-Prager pour les seuls essais homogènes de compression<sup>3</sup> à contrainte latérale constante ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_1 \leq \sigma_3$ ), nous avons

$$\begin{cases} \tan \psi = \frac{2\sqrt{2} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \\ C_D = 2\sqrt{6} C \frac{\cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \end{cases} \quad (4.124)$$


Imposant ensuite la correspondance de ces mêmes critères pour les seuls essais homogènes de traction à contrainte latérale constante ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_3$ ), nous obtenons cette fois

$$\begin{cases} \tan \psi = \frac{2\sqrt{2} \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \\ C_D = 2\sqrt{6} C \frac{\cos \varphi}{3 + \sin \varphi} \end{cases} \quad (4.125)$$

2. Lorsque les contraintes principales sont deux à deux distinctes, le critère de Mohr-Coulomb ne dépend pas de la contrainte intermédiaire (i.e. qui n'est ni maximale ni minimale), tandis que le critère de Drücker-Prager implique cette dernière.

## 4.4 Fluide visqueux newtonien

### 4.4.1 Relations de comportement

 [pap441.html](#) Ainsi que nous l'avons vu dans la section 4.1.2.2, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  au point matériel  $P$  d'un fluide visqueux et à l'instant  $t$  quelconques mais fixés est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + \mathcal{F}(\mathbf{D}) \quad (4.126)$$

où  $-p \boldsymbol{\delta}$  représente l'état de contrainte isotrope  $\boldsymbol{\sigma}^f$  du fluide au repos et où  $\mathcal{F}$  est une fonction tensorielle du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  telle que  $\mathcal{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . En d'autres termes, les contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\sigma}^v = \mathcal{F}(\mathbf{D})$  engendrées par les différences relatives de vitesse entre les particules fluides ne sont présentes que lorsque ce fluide est en mouvement.

Pour un fluide visqueux newtonien, il existe une relation linéaire et isotrope entre  $\boldsymbol{\sigma}^v$  et  $\mathbf{D}$ , de sorte que l'on a

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{A} : \mathbf{D} \quad (4.127)$$

<sup>3</sup>Ces deux critères ne peuvent coïncider à la fois pour les essais de compression et de traction à contrainte latérale constante, excepté si  $\varphi = \psi = 0$

où  $\mathbf{A}$  est un tenseur isotrope d'ordre 4. Reprenant alors les développements de la section (4.2.2), nous obtenons, après avoir substitué  $\boldsymbol{\sigma}^v$  à  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{D}$  à  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \xi \operatorname{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D} \quad (4.128)$$

si bien qu'il vient, compte tenu de (4.126) et puisque  $\operatorname{tr} \mathbf{D} = \operatorname{div}_x \mathbf{v}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \xi \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D} \quad (4.129)$$

Les paramètres mécaniques  $\xi$  et  $\eta$  sont respectivement appelés **viscosité dynamique de volume** et **viscosité dynamique de cisaillement**. Dans le système international d'unités, ces grandeurs physiques s'expriment en Pa.s, et l'on utilise également la Poise (symbole Po,  $1 \text{ Po} = 0.1 \text{ Pa.s}$ ).

Enfin, notons que pour un fluide visqueux newtonien incompressible l'on a  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ , de sorte que les équations de comportement (4.129) se réduisent à

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D} \quad (4.130)$$


Lorsqu'on les exprime relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les équations de comportement (4.129) et (4.130) s'écrivent

$$\sigma_{ij} = (-p + \xi \partial_k v_k) \delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.131)$$

ainsi que

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (4.132)$$

#### 4.4.2 Application

 [pap442.html](#) Considérons l'écoulement laminaire et permanent de la tranche de fluide visqueux newtonien incompressible et non pesant représentée sur la figure 4.10 et comprise entre les plans d'équations respectives  $x_2 = 0$  et  $x_2 = H$  (parois étanches et fixes). Nous pouvons alors supposer, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est de la forme

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

et que la pression  $p$  est indépendante de  $x_2$  (fluide non pesant) et de  $x_3$ .

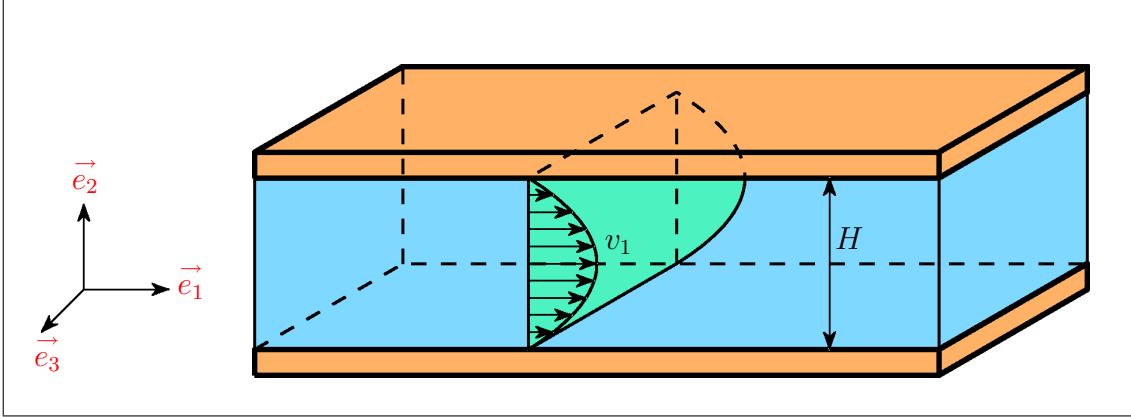


FIG. 4.10 – Écoulement d'un fluide visqueux newtonien entre deux plaques

Il vient alors

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 v_1 & 0 \\ \partial_2 v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

ce qui donne, compte tenu de (4.132),

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & \eta \partial_2 v_1 & 0 \\ \eta \partial_2 v_1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

où  $\eta$  désigne la viscosité dynamique de cisaillement du fluide.

De  $\gamma_i = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , (relations (1.44)), on déduit par ailleurs  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ . Les équations indéfinies eulériennes (3.68) donnent alors, en l'absence d'actions mécaniques extérieures à distance ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ) et compte tenu de (4.135),

$$\begin{cases} -\partial_1 p + \eta \partial_2^2 v_1 = 0 \\ -\partial_2 p + \eta \partial_1^2 v_1 = 0 \\ -\partial_3 p = 0 \end{cases} \quad (4.136)$$

La pression étant indépendante de  $x_2$  et  $x_3$  et la composante  $v_1$  de la vitesse ne dépendant que de  $x_2$ , les deuxième et troisième équations (4.136) sont trivialement vérifiées. La première donne quant à elle

$$\eta \partial_2^2 v_1 = \partial_1 p = -G \quad (4.137)$$

où  $G$  est une constante. On en déduit alors

$$v_1 = -\frac{G}{2\eta} x_2^2 + A x_2 + B \quad (4.138)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  étant ensuite déterminées par les conditions d'adhérence du fluide aux parois  $v_1(0) = v_1(H) = 0$ , on obtient finalement

$$v_1 = \frac{G}{2\eta} x_2(H - x_2) \quad (4.139)$$

Le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\vec{n} = \vec{e}_2$  du plan  $x_2 = 0$  a alors pour expression, compte tenu de (4.135),

$$\vec{\sigma}_n = \frac{GH}{2} \vec{e}_1 - p \vec{e}_2 \quad (4.140)$$

La force de frottement  $F$  par unité de surface exercée par le fluide sur les parois  $x_2 = 0$  et  $x_2 = H$  est donc donnée par

$$F = \frac{GH}{2} \quad (4.141)$$

le débit volumique par unité de largeur dans la direction  $x_3$  entre ces mêmes parois valant quant à lui

$$Q = \frac{GH^3}{12\eta} \quad (4.142)$$

Enfin, la vitesse du fluide étant maximale pour  $x_2 = \frac{H}{2}$  et donnée par

$$V_0 = \frac{GH^2}{8\eta} \quad (4.143)$$

on a aussi

$$Q = \frac{2}{3} V_0 H \quad (4.144)$$

## 4.5 Un exemple de couplage rhéoptique : l'effet photoélastique


Certains matériaux hookiens (verre, plexiglas,...), optiquement isotropes au repos, deviennent anisotropes lorsqu'on les sollicite mécaniquement. Ce couplage rhéoptique se traduit alors localement par une dépendance directionnelle de l'indice de réfraction. La biréfringence accidentelle induite par le champ des contraintes régnant au sein du solide permet ainsi leur analyse expérimentale par photoélasticimétrie.

Après un exposé de quelques notions de base relatives aux matériaux photoélastiques ainsi qu'au phénomène de biréfringence accidentelle, nous décrivons, dans cette section, le principe de fonctionnement du polariscope, dispositif expérimental permettant d'analyser les états de contrainte plane auxquels ces matériaux se trouvent soumis.



### 4.5.1 Matériaux photoélastiques

#### 4.5.1.1 Polarisation rectiligne d'une onde lumineuse plane

 [pap4511.html](#) Une onde lumineuse plane se propageant dans le vide est caractérisée par des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  orthogonaux et vibrant de façon sinusoïdale dans le plan perpendiculaire à la direction  $Oz$  de propagation (figure 4.11). La vibration lumineuse est polarisée rectilignement si  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  gardent dans ce plan une direction fixe au cours du temps.

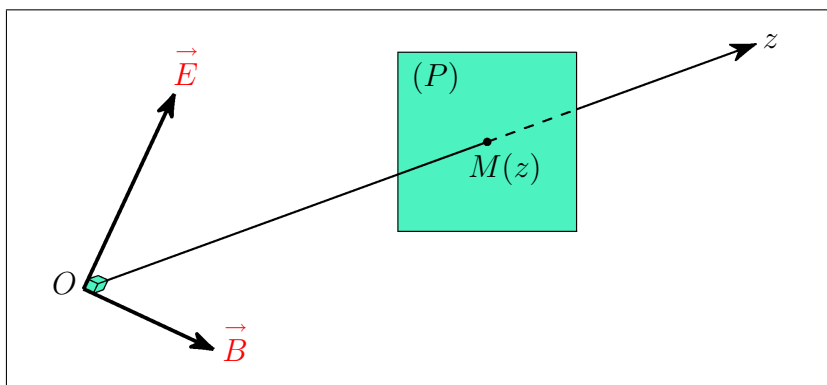


FIG. 4.11 – Onde lumineuse plane polarisée rectilignement


Soient alors  $\omega$  la pulsation de l'onde,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide et  $\vec{V}$  l'une quelconque des composantes du champ électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ), d'amplitude  $V_0$  et de direction unitaire  $\vec{d}$  fixe et contenue dans le plan orthogonal à  $Oz$ . Si  $\vec{V}(0) = V_0 \vec{d} \cos \omega t$  représente les variations de  $\vec{V}$  en fonction du temps au point  $O$  l'on a, aux points du plan  $(P)$  perpendiculaire à  $Oz$  et situé à la distance  $z$  de l'origine,  $\vec{V}(z) = V_0 \vec{d} \cos \omega(t - \frac{z}{c})$ .

Rappelons par ailleurs les relations utiles suivantes

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{1}{T} \quad \lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f} \tag{4.145}$$

où  $T$  désigne la période de la vibration,  $f$  sa fréquence et  $\lambda$  sa longueur d'onde.

#### 4.5.1.2 Matériaux parfaitement photoélastiques

 [pap4512a.html](#) Certains matériaux hookiens (verre, plexiglas,...), optiquement isotropes au repos, deviennent anisotropes lorsqu'on les sollicite mécaniquement. Désignons par  $c_0$  la vitesse de propagation des ondes lumineuses au sein d'un tel milieu en l'absence de contraintes et par  $n_0 = \frac{c}{c_0}$  l'indice de réfraction associé. Dans le cas d'une onde plane polarisée rectilignement, ces deux grandeurs sont indépendantes de la direction de polarisation puisque le matériau au repos est optiquement isotrope.

Le milieu étant à présent soumis à une sollicitation mécanique, soient, en un point matériel  $M$  quelconque mais fixé,  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  les directions principales de contrainte et  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  les contraintes principales associées. Le matériau contraint devient alors optiquement anisotrope, cette anisotropie se traduisant notamment par la dépendance de la vitesse de propagation des ondes planes polarisées rectilignement vis-à-vis de leur direction de polarisation. De façon plus précise, désignons par  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  les vitesses de propagation d'ondes planes d'axes de propagation passant par  $M$  et de directions de polarisation respectives  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  et par  $n_1 = \frac{c}{c_1}$ ,  $n_2 = \frac{c}{c_2}$  et  $n_3 = \frac{c}{c_3}$  les indices de réfraction correspondants. Pour un milieu parfaitement photoélastique, les variations  $n_i - n_0$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , de ces indices au point  $M$  se déduisent des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  en ce même point par les relations linéaires suivantes, semblables à la loi de Hooke,


$$\begin{cases} n_1 - n_0 = C_1\sigma_1 - C_2(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 - n_0 = C_1\sigma_2 - C_2(\sigma_1 + \sigma_3) \\ n_3 - n_0 = C_1\sigma_3 - C_2(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (4.146)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes photoélastiques du matériau au point  $M$ .

Par soustraction deux à deux de ces égalités l'on obtient aisément, après avoir posé  $C = C_1 + C_2$ , les équations de Maxwell-Neumann fournissant l'expression des biréfringences  $n_1 - n_2$ ,  $n_1 - n_3$  et  $n_2 - n_3$

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_1 - n_3 = C(\sigma_1 - \sigma_3) \\ n_2 - n_3 = C(\sigma_2 - \sigma_3) \end{cases} \quad (4.147)$$

Les constantes photoélastiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C = C_1 + C_2$ , homogènes à l'inverse d'une contrainte, s'expriment en  $\text{Pa}^{-1}$ .

 [pap4512b.html](#) Nous concluons cette section en considérant un solide parfaitement photoélastique d'épaisseur  $e$  dans la direction  $Oz$  (figure 4.12) et soumis à un état de contrainte plane dans le plan perpendiculaire à  $Oz$ .

Soient alors  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  les directions principales de contrainte dans ce plan au point  $O$  et  $(Oy_1, Oy_2)$  le système d'axes orthonormés associé. Soient par ailleurs  $c_1$  et  $c_2$  les vitesses des ondes planes d'axe de propagation  $Oz$  et de directions de polarisation respectives  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ . Désignons alors par  $n_1 = \frac{c}{c_1}$  et  $n_2 = \frac{c}{c_2}$  les indices de réfraction associés et considérons une onde plane se propageant selon l'axe  $Oz$  et polarisée dans une direction unitaire  $\vec{d}$  quelconque mais fixée du plan de contrainte  $(Oy_1, Oy_2)$ . Les variations temporelles des vibrations  $\vec{V}$  au

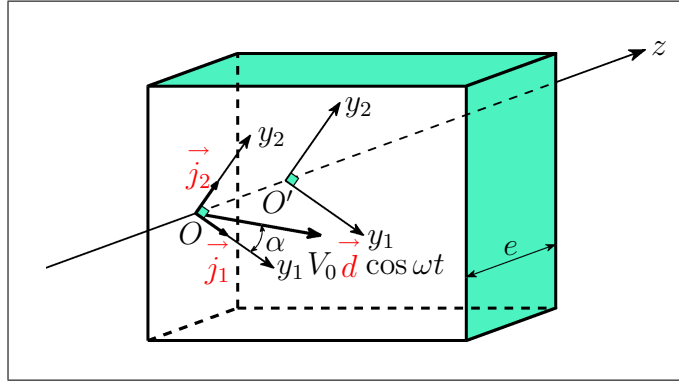


FIG. 4.12 – Biréfringence accidentelle

point  $O$  situé à l'entrée du milieu biréfringent étant données par  $\vec{V}(0) = V_0 \vec{d} \cos \omega t$ , il vient, en projection sur les axes  $Oy_1$  et  $Oy_2$  et avec les notations de la figure 4.12,

$$\begin{cases} y_1^{(e)} &= V_0 \cos \alpha \cos \omega t \\ y_2^{(e)} &= V_0 \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \quad (4.148)$$

On a alors, au point  $O'$  de l'axe  $Oz$  situé sur la face de sortie du solide,

$$\begin{cases} y_1^{(s)} &= V_0 \cos \alpha \cos \omega \left( t - \frac{e}{c_1} \right) \\ y_2^{(s)} &= V_0 \sin \alpha \cos \omega \left( t - \frac{e}{c_2} \right) \end{cases} \quad (4.149)$$

Le déphasage  $\phi$  entre les deux ondes émergentes est donc

$$\phi = \omega e \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) = \frac{\omega e}{c} (n_1 - n_2) \quad (4.150)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (4.145)

$$\phi = \frac{2\Pi e}{\lambda} (n_1 - n_2) \quad (4.151)$$

ce qui donne finalement, avec (4.147),


$$\phi = \frac{2\Pi e C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4.152)$$

et les relations (4.149) deviennent, après avoir effectué un changement de l'origine des temps,

$$\begin{cases} y_1^{(s)} &= V_0 \cos \alpha \cos(\omega t - \phi) \\ y_2^{(s)} &= V_0 \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \quad (4.153)$$

## 4.5.2 Photoélasticimétrie plane

### 4.5.2.1 Analyse rectiligne

 [pap4521.html](#) Considérons le dispositif expérimental dénommé polariscope plan et représenté sur la figure 4.13.

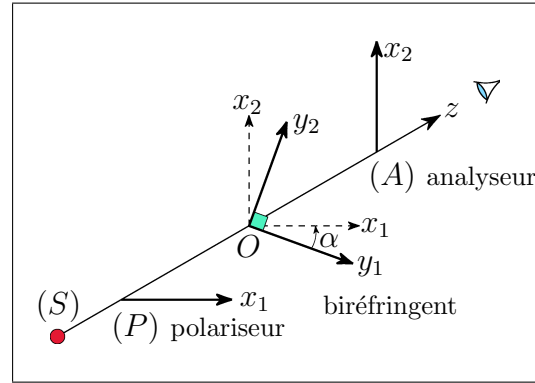


FIG. 4.13 – Polariscope plan

Il se compose d'une source de lumière monochromatique ( $S$ ) de longueur d'onde  $\lambda$  se propageant dans la direction  $Oz$  et d'un couple de polariseurs ( $P$ ) et ( $A$ ) de directions respectives  $Ox_1$  et  $Ox_2$  orthogonales entre lesquels est placé le solide photoélastique d'épaisseur  $e$  que l'on se propose d'étudier.

À la sortie du polariseur ( $P$ ), la vibration lumineuse  $\vec{V}$  est polarisée dans la direction  $Ox_1$ . En l'absence de sollicitation mécanique, le milieu biréfringent reste optiquement isotrope et n'induit donc aucune modification de cette vibration qui traverse ensuite le polariseur ( $A$ ) d'axe  $Ox_2$  appelé analyseur. Ce dernier ne laissant passer que la projection de  $\vec{V}$  sur  $Ox_2$ , la vibration émergente est nulle puisque  $Ox_1$  et  $Ox_2$  sont orthogonaux : polariseur et analyseur sont alors dits "croisés".

Soumettons à présent le solide photoélastique à une sollicitation mécanique induisant un état de contrainte plane par rapport au plan perpendiculaire à  $Oz$  et désignons par  $Oy_1$  et  $Oy_2$  les axes orthonormés associés aux directions principales de contrainte dans ce plan au point  $O$ . La vibration sortant du polariseur étant caractérisée par

$$x_1 = V_0 \cos \omega t \quad (4.154)$$

on a, à l'entrée du biréfringent et en projection sur les axes  $Oy_1$  et  $Oy_2$ ,

$$\begin{cases} y_1^{(e)} &= V_0 \cos \alpha \cos \omega t \\ y_2^{(e)} &= V_0 \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \quad (4.155)$$

La vibration lumineuse à la sortie du solide est alors caractérisée, compte tenu des développements de la section 4.5.1.2, par

$$\begin{cases} y_1^{(s)} &= V_0 \cos \alpha \cos(\omega t - \phi) \\ y_2^{(s)} &= V_0 \sin \alpha \cos \omega t \end{cases} \quad (4.156)$$

où  $\phi$  est donné par la relation (4.152). L'analyseur ne laissant passer que la composante de  $\vec{V}$  selon  $Ox_2$ , la vibration lumineuse émergente vaut donc

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2^{(s)} \cos \alpha - y_1^{(s)} \sin \alpha \\ &= V_0 \sin \alpha \cos \alpha [\cos \omega t - \cos(\omega t - \phi)] \\ &= -V_0 \sin 2\alpha \sin \frac{\phi}{2} \sin(\omega t - \frac{\phi}{2}) \end{aligned} \quad (4.157)$$

Il y a donc extinction de cette vibration ( $x_2 = 0, \forall t$ ) et apparition de franges noires dans les deux cas suivants

1.  $\sin 2\alpha = 0$ , c'est-à-dire

$$\alpha = k \frac{\Pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.158)$$


En tout point des franges correspondantes, appelées isoclines, les directions principales de contrainte ont leur orientation constante et identique à celle du couple polariseur-analyseur. Les isoclines sont donc sensibles à cette orientation. Elles sont par contre insensibles à la longueur d'onde de la lumière utilisée et toujours noires, y compris en lumière blanche. Notons qu'elles sont souvent pâteuses, en particulier dans les zones où l'orientation des directions principales de contrainte varie peu.

2.  $\sin \frac{\phi}{2} = 0 \Leftrightarrow \phi = 2k\Pi, k \in \mathbb{Z}$ , ce qui donne, compte tenu de (4.152),

$$\frac{2\Pi eC}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = 2k\Pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{k\lambda}{eC} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.159)$$

Le long d'une telle frange, la différence  $\sigma_1 - \sigma_2$  des contraintes principales est constante et égale à  $\frac{k\lambda}{eC}$ , où l'entier  $k$  est dénommé ordre de frange. À l'inverse des isoclines, ce second réseau de franges est insensible à l'orientation du couple polariseur-analyseur mais sensible à la longueur d'onde de la lumière utilisée. En lumière blanche notamment, la relation (4.159) ne peut être satisfaite simultanément pour toutes les valeurs  $\lambda$  du spectre, sauf si  $k = 0$ . Ce cas excepté, il n'y a donc pas extinction totale de la vibration lumineuse émergente mais apparition de franges colorées appelées pour cela isochromes. En d'autres termes, en lumière blanche seule l'isochrome d'ordre zéro est noire, les autres se manifestant par des changements francs de couleur correspondant à l'absence de la teinte sensible à l'œil humain ( $\lambda = 0.565 \mu\text{m}$ ).

#### 4.5.2.2 Analyse circulaire

 [pap4522a.html](#) L'étude des isochromes et notamment de l'isochrome d'ordre zéro, toujours noire y compris en lumière blanche, peut être facilitée en supprimant complètement le réseau d'isoclines. C'est l'objet du montage expérimental représenté sur la figure 4.14 et dénommé polariscope circulaire.

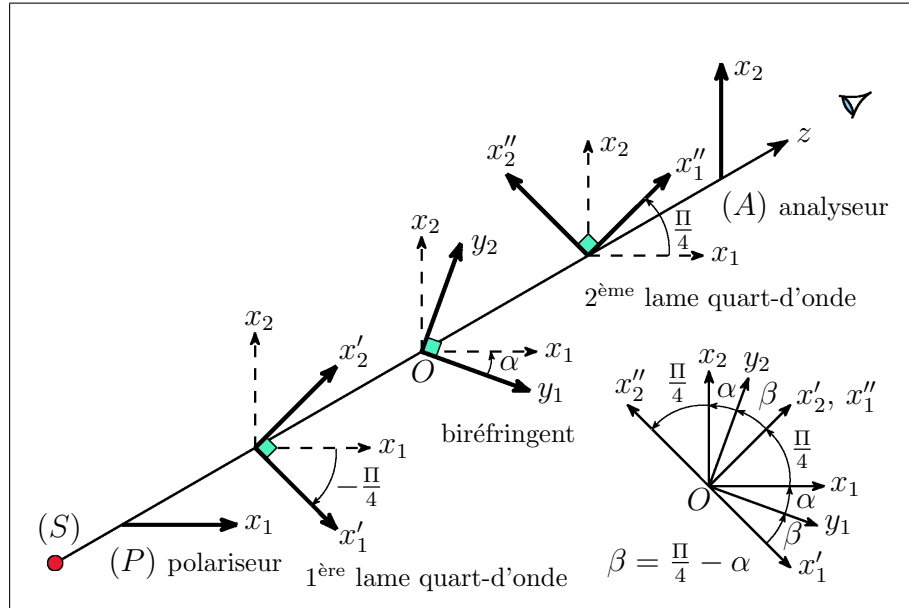


FIG. 4.14 – Polariscope circulaire

Le polariscope circulaire diffère du polariscope plan décrit dans la section 4.5.2.1 par l'ajout, de part et d'autre du biréfringent que l'on sollicite, de deux biréfringents supplémentaires appelés lames quart-d'onde. Le déphasage entre les ondes émergentes des deux axes orthogonaux d'une telle lame correspond alors à un retard égal au quart de la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière monochromatique utilisée<sup>4</sup>. Ce déphasage est donc égal à  $\omega \frac{\lambda/4}{c}$  c'est-à-dire, compte tenu de (4.145), à  $\frac{\pi}{2}$ . Les deux lames quart-d'onde sont croisées et disposées de telle sorte que leurs axes soient situés à  $\pm \frac{\pi}{4}$  par rapport à ceux du polariseur et de l'analyseur (figure 4.14).

 [pap4522b.html](#) La vibration sortant du polariseur étant caractérisée par

$$x_1 = V_0 \cos \omega t \quad (4.160)$$

on a, en entrée de la première lame quart-d'onde et en projection sur ses axes (voir la figure 4.14),

$$\begin{cases} x_1^{(e)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \\ x_2^{(e)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.161)$$

et la vibration émergente de cette première lame vaut donc

$$\begin{cases} x_1^{(s)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ x_2^{(s)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.162)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1^{(s)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sin \omega t \\ x_2^{(s)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.163)$$

<sup>4</sup>En lumière blanche, les lames quart-d'onde sont calculées pour la longueur d'onde  $\lambda = 0.565 \mu\text{m}$  correspondant à la teinte sensible à l'œil humain.

Cette vibration, qualifiée de circulaire, se décompose alors, sur les axes  $Oy_1$  et  $Oy_2$  à l'entrée du milieu biréfringent sollicité (voir la figure 4.14), en

$$\begin{cases} y_1^{(e)} &= x_1'^{(s)} \cos \beta + x_2'^{(s)} \sin \beta \\ y_2^{(e)} &= x_2'^{(s)} \cos \beta - x_1'^{(s)} \sin \beta \end{cases} \quad (4.164)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} (\sin \omega t \cos \beta + \cos \omega t \sin \beta) \\ y_2^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} (\cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta) \end{cases} \quad (4.165)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} y_1^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \beta) \\ y_2^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (4.166)$$

de sorte que la vibration émergeant de ce biréfringent est caractérisée par

$$\begin{cases} y_1^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \beta - \phi) \\ y_2^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (4.167)$$

où  $\phi$  est fourni par la relation (4.152).

On a alors, à l'entrée de la seconde lame quart-d'onde et en projection sur ses axes (voir la figure 4.14),

$$\begin{cases} x_1''^{(e)} &= y_2^{(s)} \cos \beta + y_1^{(s)} \sin \beta \\ x_2''^{(e)} &= y_2^{(s)} \sin \beta - y_1^{(s)} \cos \beta \end{cases} \quad (4.168)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1''^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\cos \beta \cos(\omega t + \beta) + \sin \beta \sin(\omega t + \beta - \phi)] \\ x_2''^{(e)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\sin \beta \cos(\omega t + \beta) - \cos \beta \sin(\omega t + \beta - \phi)] \end{cases} \quad (4.169)$$

si bien que la vibration émergeant de cette seconde lame vaut

$$\begin{cases} x_1''^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\cos \beta \cos(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}) + \sin \beta \sin(\omega t + \beta - \phi - \frac{\pi}{2})] \\ x_2''^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\sin \beta \cos(\omega t + \beta) - \cos \beta \sin(\omega t + \beta - \phi)] \end{cases} \quad (4.170)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x_1''^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\cos \beta \sin(\omega t + \beta) - \sin \beta \cos(\omega t + \beta - \phi)] \\ x_2''^{(s)} &= \frac{V_0}{\sqrt{2}} [\sin \beta \cos(\omega t + \beta) - \cos \beta \sin(\omega t + \beta - \phi)] \end{cases} \quad (4.171)$$

L'analyseur ne laissant subsister que la composante de  $\vec{V}$  selon  $Ox_2$ , la vibration émergeant du polariscope circulaire est alors donnée par

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1''^{(s)} + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2''^{(s)} \\ &= \frac{V_0}{2} [\cos \beta \sin(\omega t + \beta) - \sin \beta \cos(\omega t + \beta - \phi) \\ &\quad + \sin \beta \cos(\omega t + \beta) - \cos \beta \sin(\omega t + \beta - \phi)] \\ &= \frac{V_0}{2} [\sin(\omega t + 2\beta) - \sin(\omega t + 2\beta - \phi)] \\ &= V_0 \sin \frac{\phi}{2} \cos(\omega t + 2\beta - \frac{\phi}{2}) \end{aligned} \quad (4.172)$$

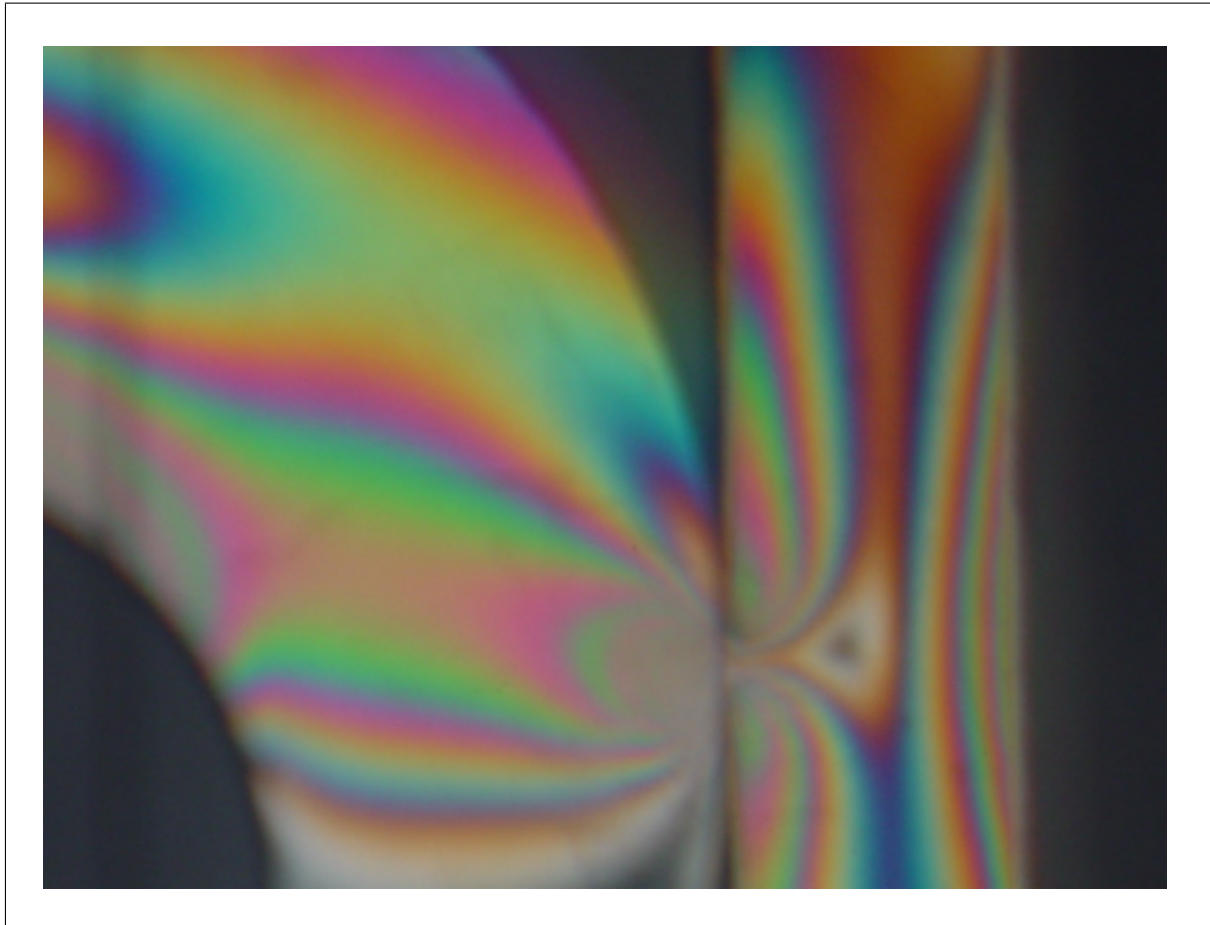


FIG. 4.15 – Analyse des contraintes par photoélasticimétrie plane

Il n'y a donc extinction de cette vibration que dans le cas où  $\sin \frac{\phi}{2} = 0$ , c'est-à-dire, compte tenu des développements de la section 4.5.2.1, que lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{k\lambda}{eC} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.173)$$

En d'autres termes, les isoclines ont disparu et seules subsistent les franges isochromes, noires en lumière monochromatique et colorées en lumière blanche, à l'exception de l'isochrome d'ordre zéro. La figure 4.15, issue d'une expérience d'analyse des contraintes par photoélasticimétrie plane, illustre cette disparition des isoclines.



## 4.6 Récapitulatif des formules essentielles

### 4.6.1 Élasticité linéaire isotrope

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{-\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) & \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) & \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) & \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\theta = \frac{\sigma_m}{K}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \mathbf{s}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) & \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{cases}$$

$$\mu = G$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

$$\sigma_m = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta$$

$$\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{e}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\sigma_m \theta + \mathbf{s} : \mathbf{e})$$

$$w = \frac{1}{2} [K\theta^2 + 2G\|\mathbf{e}\|^2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_m^2}{K} + \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2G} \right]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{-\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \beta(T - T_0) \right] \boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\beta(T - T_0)] \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

### 4.6.2 Notion de critère de limite élastique

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = 2\tau_0 \quad (\text{Tresca})$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{3}C_M \quad (\text{Von-Mises})$$

$$(1 + \sin \varphi) \max \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} - (1 - \sin \varphi) \min \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} = 2C \cos \varphi \quad (\text{Mohr-Coulomb})$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{3}C_D - \tan \psi (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (\text{Drucker-Prager})$$

### 4.6.3 Fluide visqueux newtonien

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \xi \operatorname{div}_x \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D} \quad (\text{fluide incompressible})$$

## 4.7 Exercices et problèmes

### 4.7.1 Énoncés des exercices

#### E4.1 Massif de sol pesant uniformément chargé

Un massif de sol homogène et pesant, de masse volumique  $\rho$ , occupe le demi-espace  $x_2 \leq 0$  (figure 4.16). Il est soumis à l'action des forces de pesanteur ainsi qu'à une densité de forces  $-q\vec{e}_2$  uniformément répartie à sa surface  $x_2 = 0$ , où  $\vec{e}_2$  désigne le vecteur directeur de l'axe vertical ascendant  $Ox_2$ . Le comportement du sol est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Enfin l'on admettra, compte tenu des symétries du problème et de la nature du chargement, que le tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a pour seule composante non nulle  $\varepsilon_{22}$  et que cette dernière ainsi que celles du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  ne dépendent que de la variable d'espace  $x_2$ .

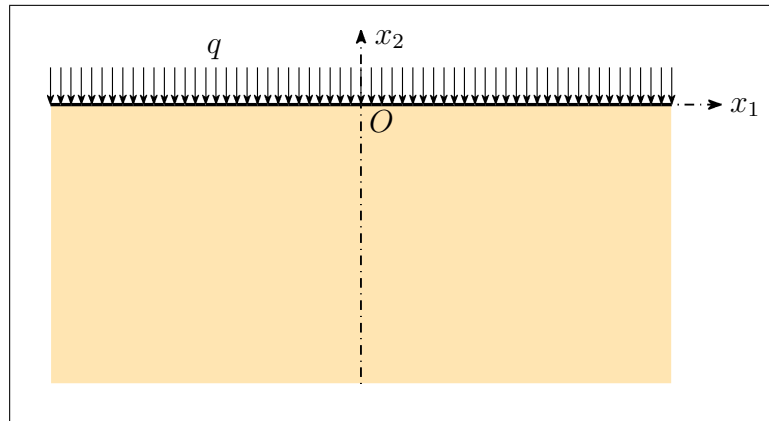


FIG. 4.16 – Massif de sol pesant uniformément chargé

1. Des équations indéfinies de l'équilibre jointes aux conditions aux limites en contrainte à la surface du sol, déduire les expressions de  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{23}$ .
2. Achever la détermination de  $\boldsymbol{\sigma}$  en tirant parti des équations de comportement.

#### E4.2 Coin élastique

Le coin solide de demi-angle au sommet  $\alpha$  représenté sur la figure 4.17 est encastré à son extrémité droite ( $r = R$ ) et sollicité à son extrémité gauche (point  $O$ ) par une force  $P$  de direction contenue dans le plan  $(Ox_1, Ox_2)$  et inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe horizontal  $Ox_1$ . On suppose alors qu'en tout point  $M$  du solide le champ tensoriel des contraintes de Cauchy résultant de ce chargement et exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (voir la figure 4.17) adopte la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\sigma_{rr}$  est une fonction de  $r$  et  $\theta$  que l'on se propose de déterminer.

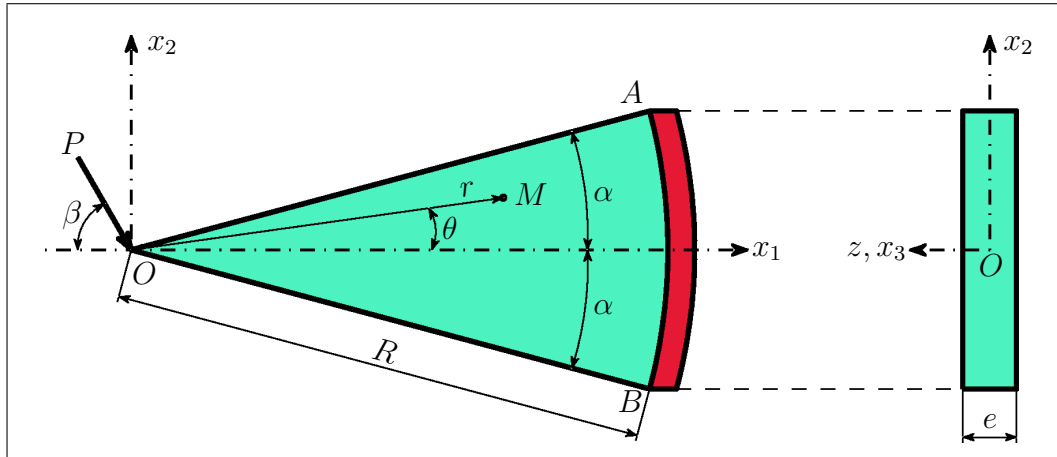


FIG. 4.17 – Coin élastique

1. Vérifier qu'un tel champ satisfait aux conditions aux limites en contrainte sur les tronçons  $OA$  et  $OB$  (figure 4.17) de la frontière du solide.
2. Dédire des équations indéfinies de l'équilibre exprimées en coordonnées cylindriques que  $\sigma_{rr} = \frac{f(\theta)}{r}$  où  $f$  est une fonction de  $\theta$  à déterminer.
3. Le solide est à présent supposé élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . Donner l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\epsilon$  relativement aux axes fixes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  et  $Ox_3$  (système de coordonnées cartésiennes) puis montrer, en tirant parti des équations de compatibilité des petites déformations (2.240), que l'on a alors nécessairement  $f(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta$ .
4. Achever la détermination des constantes  $C_1$  et  $C_2$  en écrivant l'équilibre d'une portion du solide convenablement choisie.

### E4.3 Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène

Une poutre de longueur  $l$  et de sections droites rectangulaires et identiques (figure 4.18) est constituée de deux matériaux élastiques linéaires et isotropes de modules d'Young respectifs  $E_1$  (matériau 1 :  $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$ ) et  $E_2$  (matériau 2 :  $\frac{l}{2} \leq x_1 \leq l$ ). On soumet cette poutre à un essai de traction monoaxiale comme l'illustre la figure 4.18 et l'on suppose qu'en tout point des sections droites  $x_1 = \text{cste}$  de celle-ci cette sollicitation induit un déplacement horizontal  $u_1(x_1)$ .

Donner l'expression de  $u_1(x_1)$ ,  $x_1 \in [0, l]$ . Que vaut en particulier le déplacement horizontal de l'extrémité droite  $x_1 = l$  de la poutre ?

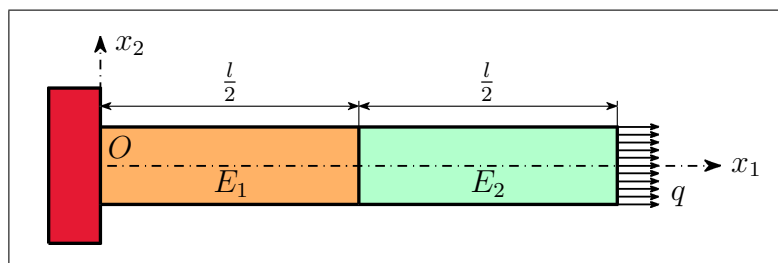


FIG. 4.18 – Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène

#### E4.4 Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène

Une poutre de longueur  $l$  et de sections droites rectangulaires et identiques (figure 4.19) est composée de deux matériaux thermoélastiques linéaires et isotropes de modules d'Young respectifs  $E_1$  (matériau 1 :  $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$ ) et  $E_2$  (matériau 2 :  $\frac{l}{2} \leq x_1 \leq l$ ). On soumet cette poutre à une variation de température  $\Delta T = T - T_0$  tout en maintenant sa longueur constante et l'on désigne par  $u_1(x_1)$  le déplacement horizontal de ses sections droites induit par cette sollicitation thermomécanique.

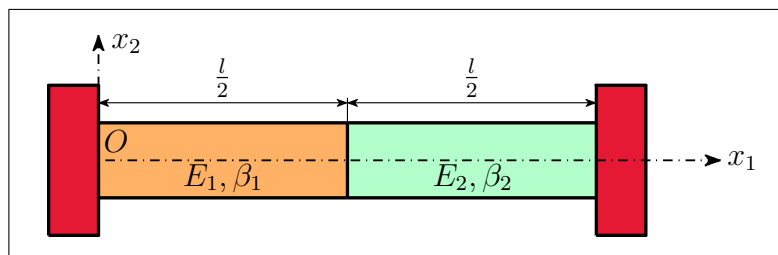


FIG. 4.19 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre hétérogène

1. On suppose dans un premier temps que les matériaux 1 et 2 constituant la poutre ont même coefficient de dilatation thermique linéaire :  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Que vaut alors le déplacement horizontal  $u_1(x_1)$  des sections droites de la poutre ? Dans quelle section son amplitude est-elle extrême ? À quelle condition est-il identiquement nul ?
2. Reprendre la question 1 dans le cas où les coefficients de dilatation thermique linéaire  $\beta_1$  et  $\beta_2$  des deux matériaux constituant la poutre sont distincts.

#### E4.5 Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible

On s'intéresse ici à l'écoulement laminaire et permanent d'une tranche de fluide visqueux newtonien incompressible et non pesant (figure 4.20) comprise entre les plans d'équations respectives  $x_2=0$  (paroi étanche et fixe) et  $x_2=H$  (surface libre). On admettra alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème et ainsi que l'illustre la figure 4.20, que la vitesse des particules fluides est colinéaire à l'axe horizontal  $Ox_1$  et ne dépend que de  $x_2$  :  $\mathbf{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1$ .

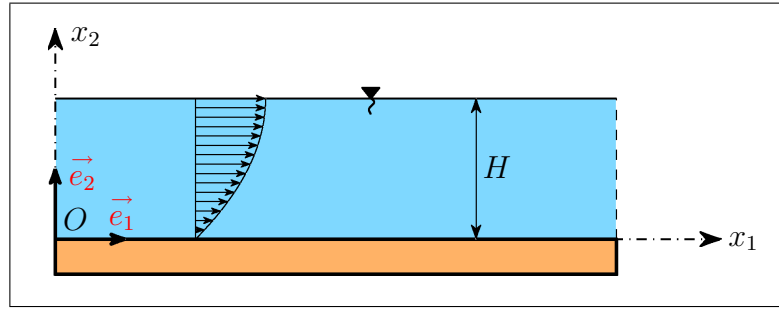


FIG. 4.20 – Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible

1. Dédire des équations indéfinies du mouvement en variables d'Euler que la pression  $p$  ne dépend que de  $x_1$  puis donner l'équation différentielle ordinaire dont  $v_1$  est solution.
2. Intégrer l'équation différentielle précédente en tirant parti des conditions aux limites en  $x_2 = 0$  et  $x_2 = H$  (on posera pour cela  $G = -\partial_1 p$ ).
3. Donner l'expression du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\vec{n} = \vec{e}_2$  du plan  $x_2 = 0$ . En déduire la force de frottement  $F$  par unité de surface exercée par le fluide sur la paroi  $x_2 = 0$ .
4. Évaluer le débit volumique  $Q$  de la tranche de fluide par unité de largeur dans la direction  $Ox_3$  orthogonale au plan de l'écoulement puis exprimer ce dernier en fonction du maximum  $V_0$  de  $v_1$ .

#### E4.6 Vernis craquelant

Le cylindre métallique creux et mince ( $e \ll R$ ) représenté sur la figure 4.21 est enduit sur sa paroi extérieure d'un vernis craquelant, ainsi nommé pour sa faculté à se fissurer dans le plan des facettes soumises à une contrainte normale de traction excédant une valeur  $\sigma_0$  caractéristique du vernis utilisé. On peut ainsi, en choisissant un vernis craquelant de contrainte de rupture  $\sigma_0$  inférieure aux contraintes normales de traction que lui imprime la surface du matériau sur laquelle on l'enduit, visualiser sur celle-ci une partie des courbes enveloppes des directions principales de contrainte (isostatiques) au sein du vernis.

Le cylindre creux métallique enduit de vernis est alors disposé entre les deux embases d'une presse et soumis à un essai de compression simple ainsi que l'illustre la figure 4.21. Les conditions de l'expérience sont par ailleurs supposées idéales (embases de la presse non déformables, absence totale de frottement entre ces dernières et l'éprouvette cylindrique creuse, répartition surfacique uniforme de la force  $F$  en tête de celle-ci) et l'adhérence entre le cylindre et le film de vernis parfaite. Enfin l'on admet que pour la sollicitation considérée le comportement du métal (resp<sup>t</sup> du vernis non fissuré) est élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E^{(m)} = 200000$  MPa (resp<sup>t</sup>  $E^{(v)} = 4000$  MPa) et de coefficient de Poisson  $\nu^{(m)} = 0.28$  (resp<sup>t</sup>  $\nu^{(v)} = 0.45$ ).

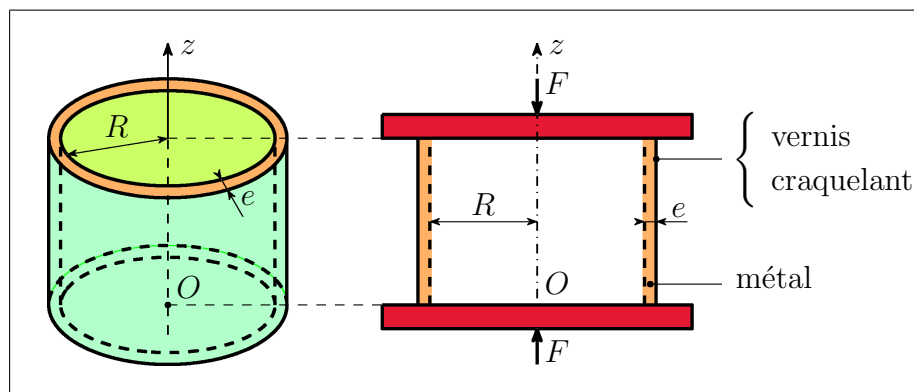


FIG. 4.21 – Vernis craquelant

1. Déterminer l'état de déformation  $\varepsilon^{(m)}$  dans le métal. À quelles craquelures du vernis est-on a priori tenté de s'attendre ?
2. Observe-t-on réellement les craquelures attendues, et sinon pourquoi ?

#### E4.7 Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes

Un solide élastique linéaire isotrope de limite élastique en traction simple  $\sigma_0 > 0$  est soumis à un état de contrainte plane de composantes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3 = 0$ .

1. Donner, en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et de la limite élastique en traction simple  $\sigma_0$ , l'expression des critères de limite élastique de Tresca et de Von-Mises, puis représenter les courbes limites correspondantes dans le système d'axes orthonormés associé aux contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .
2. En Résistance des Matériaux et plus précisément en théorie des poutres, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  adopte la forme

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & \tau' & \tau'' \\ \tau' & 0 & 0 \\ \tau'' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que les critères de Tresca et de Von-Mises s'expriment alors simplement en fonction de  $\sigma$  et de  $\tau = \sqrt{\tau'^2 + \tau''^2}$ .

3. La poutre de hauteur  $h$ , de largeur  $b = h$  et de longueur  $l = 10h$  représentée sur la figure 4.22 est encastree à son extrémité gauche  $x_1 = 0$  et sollicitée en flexion par un effort vertical  $P$  appliqué à son extrémité droite  $x_2 = l$ . On montre alors (cours de Résistance des Matériaux, théorie des poutres — voir également le problème P3.3 page 208) que le champ des contraintes qui en résulte revêt la forme introduite à la question 2, avec  $\sigma = \sigma_{11} = \frac{P}{I}x_2(l - x_1)$ ,  $\tau' = \sigma_{12} = \frac{P}{8I}(4x_2^2 - h^2)$  et  $\tau'' = \sigma_{13} = 0$ , où l'indice 3 est relatif à la direction  $Ox_3$  orthogonale au plan de contrainte et où  $I = \frac{bh^3}{12}$  désigne le moment d'inertie des sections droites de la poutre par rapport au plan  $x_2 = 0$ .

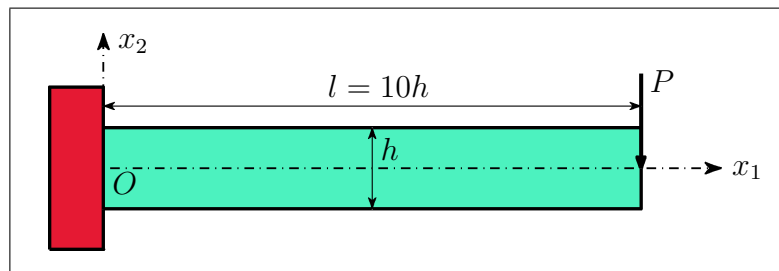


FIG. 4.22 – Poutre console en flexion

Vérifier qu'un tel champ de contrainte satisfait les équations indéfinies de l'équilibre puis donner, pour le critère de Tresca et pour celui de Von-Mises, l'expression de la charge limite  $P_l$  au-delà de laquelle apparaissent les premières déformations plastiques.

#### E4.8 Rhéomètre de Couette

On s'intéresse ici au dispositif expérimental représenté sur la figure 4.23 et dénommé rhéomètre de Couette. Cet appareil, utilisé pour mesurer la viscosité des liquides, se compose de deux cylindres coaxiaux : une partie fixe et creuse (stator) et une partie mobile (rotor). Le fluide visqueux occupant le volume intermédiaire, la partie mobile du rhéomètre est alors mise en rotation et l'on mesure le couple  $C$  nécessaire à entretenir une vitesse angulaire  $\omega$  donnée.

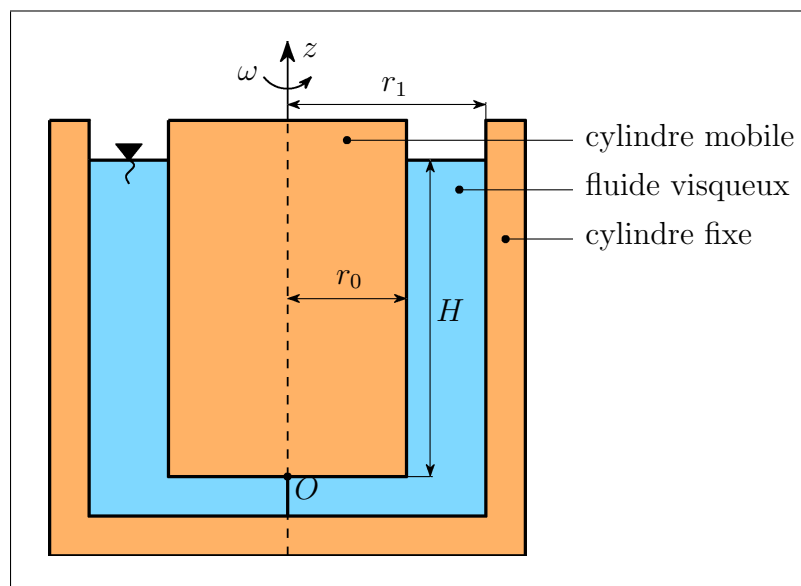


FIG. 4.23 – Rhéomètre de Couette

Le fluide visqueux étant ici incompressible et newtonien, on désigne par  $\eta$  sa viscosité dynamique de cisaillement et l'on admet en première approximation que dans la zone  $(r, z) \in [r_0, r_1] \times [0, H]$  le champ des vitesses exprimé relativement au repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$



associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r)\vec{e}_\theta$  où  $v$  est une fonction de la variable  $r$  à déterminer.

1. Donner l'allure du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
2. Dédire de l'équation indéfinie eulérienne du mouvement en projection sur  $\vec{e}_\theta$  l'équation différentielle ordinaire dont  $v$  est solution puis intégrer cette dernière en tirant parti des conditions aux limites en  $r = r_0$  et  $r = r_1$ .
3. Donner l'expression de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  puis montrer que la mesure du couple  $C$  jointe à la donnée de  $\omega$  et des caractéristiques géométriques  $r_0$ ,  $r_1$  et  $H$  du rhéomètre permet d'accéder à la valeur de la viscosité  $\eta$ .

### E4.9 Distorsion pure

On considère un milieu continu homogène subissant la transformation plane linéaire (distorsion pure)

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 &= X_2 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad t \geq 0$$

où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et où  $t \geq 0$  désigne la variable temps. Le comportement du matériau est régi par la relation  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$  où  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , définie par  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , où  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$  sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes mécaniques données. Enfin, dans tout cet exercice excepté pour la question 3, on ne considérera que les composantes des différents tenseurs relatives aux axes orthonormés et fixes  $Ox_1$  et  $Ox_2$ .

1. Donner, après avoir calculé  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$ , le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ .
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial  $t = 0$ .

**Indication** On montrera tout d'abord que l'on a,  $\forall t \geq 0$ ,  $\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) = 0$  (On rappelle que le système différentiel  $\dot{Y}(t) = A(t) \cdot Y(t)$ ,  $t > 0$ ,  $Y(0) = Y_0$  a pour solution  $Y(t) = [\exp A(t)] \cdot [\exp A(0)]^{-1} \cdot Y_0$ ).

3. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Von-Mises  $\sqrt{J_2} = \|\mathbf{s}\| \leq C_M$ , de constante mécanique  $C_M$  donnée, dire, selon les valeurs de  $\mu$  et  $C_M$ , jusqu'à quel instant la solution précédente reste valable.

### E4.10 Expansion plane

On considère un milieu continu homogène subissant la transformation plane linéaire

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 &= X_2 - \alpha t X_1 \end{cases}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et où  $t \geq 0$  désigne la variable temps. Le comportement du matériau est régi par la relation  $\hat{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$  où  $\hat{\sigma}$  désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , définie par  $\hat{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , où  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$  sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes mécaniques données. Enfin, dans tout cet exercice excepté pour la question 3, on ne considérera que les composantes des différents tenseurs relatives aux axes orthonormés et fixes  $Ox_1$  et  $Ox_2$ . On pourra par ailleurs poser  $\tau = \alpha t$  afin d'alléger l'écriture.

1. Donner, après avoir calculé  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$ , le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ .
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial  $t = 0$ .

**Indication** On montrera tout d'abord que l'on a,  $\forall t \geq 0$ ,  $\sigma_{12}(t) = 0$  et  $\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) = 0$ . (On rappelle que le système différentiel  $\dot{Y}(t) = A(t) \cdot Y(t)$ ,  $t > 0$ ,  $Y(0) = Y_0$  a pour solution  $Y(t) = [\exp A(t)] \cdot [\exp A(0)]^{-1} \cdot Y_0$ )

3. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Tresca et  $\sigma_0$  désignant sa limite élastique en traction simple, donner, en fonction de  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  et  $\mu$ , la valeur de l'instant jusqu'auquel la solution précédente reste valable.

## 4.7.2 Énoncés des problèmes

### P4.1 Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux

Un tube cylindrique creux de hauteur  $H$ , de rayon intérieur  $r_0$  et de rayon extérieur  $r_1$  est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Ce tube est encastré à sa base  $z = 0$  tandis que sa section supérieure  $z = H$  subit une rotation d'angle  $\omega_0 \ll 1$  ainsi que l'illustre la figure 4.24. Sa hauteur est par ailleurs maintenue constante et ses parois latérales sont libres, de sorte qu'une section droite de cote  $z \in ]0, H]$  ne subit qu'une rotation d'angle  $\omega(z)$  dans son plan. Le champ des déplacements exprimé en coordonnées cylindriques est donc uniquement orthoradial :  $\mathbf{u} = u_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$ . Enfin, les actions mécaniques à distance sont supposées négligeables.

1. Montrer, en tirant parti d'arguments de symétrie, que l'on a  $\omega(z) = \omega_0 \frac{z}{H}$ ,  $\forall z \in [0, H]$ . En déduire alors l'expression de  $u_\theta(r, z)$ .

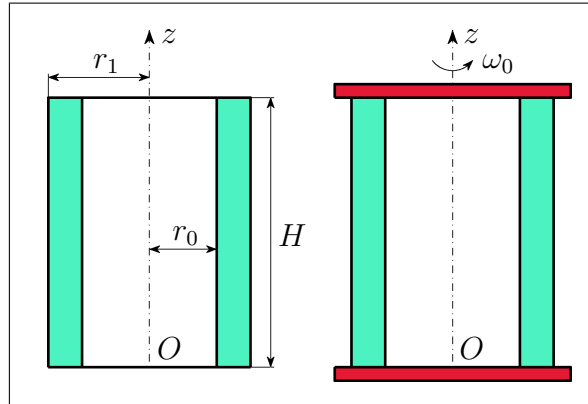


FIG. 4.24 – Torsion d'un cylindre creux

2. Donner l'expression des composantes du tenseur linéarisé des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puis celles du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  et vérifier que les équations indéfinies de l'équilibre sont satisfaites.
3. Quelle est, en fonction de  $E$ ,  $\nu$ ,  $\omega_0$ ,  $H$ ,  $r_0$  et  $r_1$ , l'expression du couple de torsion  $C$  ayant permis d'imposer au tube la rotation  $\omega_0$  ?

La sollicitation précédente étant maintenue, le tube est à présent soumis à une variation  $\Delta T = T - T_0$  de sa température. Les déplacements axiaux restent empêchés tandis que les déplacements radiaux sont libres et supposés indépendants de  $z$ . Nous avons donc ici  $\mathbf{u} = u_\theta(r, z)\vec{e}_\theta + u_r(r)\vec{e}_r$ , où  $u_\theta(r, z)$  est la composante orthoradiale de  $\mathbf{u}$  trouvée plus haut et où  $u_r(r)$  est à déterminer. Enfin, on désigne par  $\beta$  le coefficient de dilatation thermique linéaire.

4. Donner, en fonction de  $\omega_0$ ,  $r$ ,  $H$ , et  $u_r$ , l'expression des composantes de la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puis, en fonction cette fois de  $\omega_0$ ,  $r$ ,  $H$ ,  $u_r$ ,  $\beta$  et  $\Delta T$ , celles de la déformation d'origine mécanique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ . En déduire, en fonction de ces mêmes grandeurs ainsi que des modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , l'expression des composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$ .
5. Montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre, que  $u_r$  est solution de l'équation différentielle ordinaire  $u_r''(r) + \frac{u_r'(r)}{r} - \frac{u_r(r)}{r^2} = 0$ ,  $\forall r \in ]r_0, r_1[$ , puis résoudre cette équation en tirant notamment parti des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales libres du tube. En déduire alors, en fonction de  $\omega_0$ ,  $r$ ,  $H$ ,  $\beta$ ,  $\Delta T$ ,  $\nu$  et  $E$ , l'expression finale des composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### P4.2 Torsion pure d'un cylindre

Un cylindre de révolution d'axe  $Oz$ , de hauteur  $H$  et de rayon  $R$  est constitué d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire isotrope, de module de cisaillement de Coulomb  $G$ . Il est encastré à sa base  $z = 0$  tandis que sa section supérieure  $z = H$  subit dans son plan une rotation d'axe  $Oz$  et d'angle  $\omega \ll 1$ .

1. **Approche en déplacements** On suppose ici que le champ des déplacements exprimé en coordonnées cylindriques est uniquement orthoradial. On a donc  $\mathbf{u} = u(r, z)\vec{e}_\theta$  où  $u$  est une fonction des variables d'espace  $r$  et  $z$  que l'on se propose à présent de déterminer.
- Donner, en fonction de  $u$ , l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En déduire ensuite, en fonction de  $u$  et  $G$ , celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
  - Déduire des équations indéfinies de l'équilibre l'équation aux dérivées partielles dont  $u$  est solution.
  - On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme  $u(r, z) = f(r)g(z)$ . Montrer tout d'abord, en tirant parti des conditions aux limites en  $z = H$ , que  $f$  est une fonction linéaire de  $r$ . Acheter ensuite la détermination de  $u(r, z)$  en tirant cette fois parti du résultat de la question 1b ainsi que des conditions aux limites en  $z = 0$ .
2. **Approche en contraintes** Sans plus émettre d'hypothèse sur l'expression du champ des déplacements, on suppose à présent que  $\boldsymbol{\sigma}$  adopte la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\sigma_{\theta z}$  est une fonction inconnue dépendant, a priori, des variables d'espace  $r$  et  $z$ .

- Déduire des équations indéfinies de l'équilibre que  $\sigma_{\theta z}$  est indépendant de  $z$ . On posera alors, dans tout ce qui suit,  $\sigma_{\theta z} = h(r)$ .
- Donner, en fonction de  $h$  et  $G$ , l'expression des composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En déduire ensuite, par intégration et compte tenu des conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = H$ , celle du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  puis donner, en fonction de  $\omega$ ,  $H$ ,  $G$  et  $r$ , l'expression finale des composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ .
- Soit  $C$  le couple de torsion ayant permis d'imposer la rotation  $\omega$ . Montrer, en tirant parti des résultats de la question 2b, qu'il existe une correspondance linéaire entre ces deux grandeurs (on donnera notamment l'expression de  $C$  en fonction de  $\omega$ ,  $H$ ,  $R$  et  $G$ ). Ce résultat était-il prévisible? En déduire alors l'expression des composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de  $C$ ,  $R$  et  $r$ .
- Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Von-Mises et  $\sigma_0$  désignant sa limite élastique en traction simple, quelle est alors, en fonction de  $\sigma_0$  et  $R$ , la valeur de  $C$  à la limite élastique.
- Le matériau est à présent non homogène, son module de cisaillement de Coulomb  $G$  variant avec  $z$  selon la relation  $G = G_0(1 + \frac{z}{H})$ , où  $G_0$  est une constante mécanique donnée. Reprendre alors les questions 2b à 2d.

### P4.3 Matériau composite

Un tissu industriel est formé de plusieurs nappes superposées de fils identiques et orientés alternativement dans deux directions perpendiculaires  $Ox_1$  (réseau de fils  $A$ ) et  $Ox_2$  (réseau de fils  $B$ ) ainsi que l'illustre la figure 4.25 (a). Ces fils sont noyés dans une résine qui assure la cohésion de l'ensemble et l'on peut donc supposer que les trois constituants (résine, fils  $A$  et fils  $B$ ) subissent les mêmes dilatations, tandis que dans le plan de contrainte ( $Ox_1, Ox_2$ ) l'état de contrainte totale  $\sigma$  est la somme des contraintes planes partielles  $\sigma^{(R)}$ ,  $\sigma^{(A)}$  et  $\sigma^{(B)}$  respectivement transmises par la résine, le réseau de fils  $A$  et le réseau de fils  $B$ .

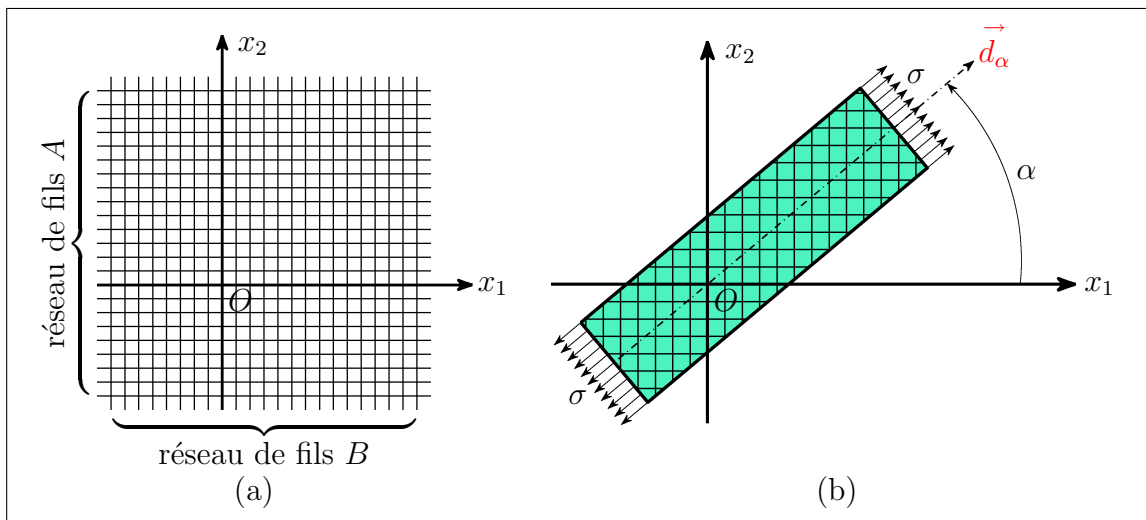


FIG. 4.25 – Matériau composite

On désigne par  $k$  la raideur individuelle de chaque fil (i.e. on a  $F = k\varepsilon$  où  $F$  est la tension dans le fil et  $\varepsilon$  sa dilatation), par  $n$  le nombre de fils par unité de largeur dans chaque nappe et par  $2r$  le nombre total de nappes par unité d'épaisseur du tissu. Enfin l'on suppose que le comportement de la résine est élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = \frac{1}{2}$ .

1. Écrire les équations de comportement de la résine sous les formes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(R)} \\ \sigma_{22}^{(R)} \\ \sigma_{12}^{(R)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(R)} \\ \sigma_{22}^{(R)} \\ \sigma_{12}^{(R)} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

puis donner l'expression de  $\varepsilon_{33}$  en fonction de  $\sigma^{(R)}$  (l'indice 3 est relatif à la direction  $Ox_3$  orthogonale aux axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$ ). Quelle signification physique possède cette composante de  $\varepsilon$  ?

2. Les tenseurs des contraintes partielles respectivement transmises par les réseaux de fils  $A$  et  $B$  adoptent la forme, relativement au système d'axes orthonormés  $Ox_1$  et  $Ox_2$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(A)} = \begin{bmatrix} \beta E \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta E \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

Relier alors le coefficient  $\beta$  aux grandeurs  $E$ ,  $k$ ,  $n$  et  $r$ .

3. Déterminer la réponse élastique du matériau composite (résine + fils  $A$  et  $B$ ) sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

puis inverser cette relation pour  $\beta = \frac{2}{3}$ .

4. On prélève une bande de tissu dans une direction  $\vec{d}_\alpha$  du plan  $(Ox_1, Ox_2)$  inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $Ox_1$  et l'on soumet cet échantillon à un essai de traction simple (contrainte de traction  $\sigma$ ) comme l'illustre la figure 4.25 (b). Soit alors  $\varepsilon(\alpha)$  la dilatation de l'échantillon dans la direction  $\vec{d}_\alpha$ . Donner l'expression de  $\varepsilon(\alpha)$  pour  $\beta = \frac{2}{3}$  puis en déduire celle du module apparent  $E(\alpha)$  défini par  $E(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon(\alpha)}$ . Étudier les variations de ce module avec  $\alpha$ .

#### P4.4 Barrage poids

On se propose d'étudier l'équilibre d'un barrage poids prismatique de section droite triangulaire (figure 4.26) constitué d'un béton dont le comportement est supposé élastique linéaire isotrope. On désigne respectivement par  $E$  et  $\nu$  le module d'Young et le coefficient de Poisson du béton, par  $\rho$  sa masse volumique, par  $\rho_0$  celle de l'eau en contact avec le parement amont  $OA$  du barrage (voir la figure 4.26) et l'on pose  $\omega = \rho g$  ainsi que  $\omega_0 = \rho_0 g$  où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur. Enfin, dans tout le problème on supposera que l'on est en présence d'un état de déformation plane par rapport au plan  $(Ox_1, Ox_2)$  et l'on prendra la pression atmosphérique comme origine des pressions.

##### 1. Détermination du champ des contraintes

- Soit  $Ox_3$  la direction orthogonale au plan de déformation. Montrer que l'on a  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ,  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$  et que  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  ne dépendent que des variables d'espace  $x_1$  et  $x_2$ .
- Donner l'expression des conditions aux limites en contrainte sur le parement amont  $OA$  du barrage, puis sur son parement aval  $OB$ .
- Écrire les équations indéfinies de l'équilibre en tout point du barrage.

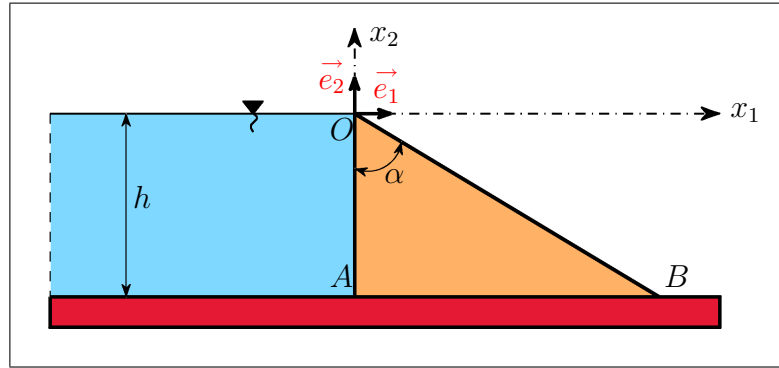


FIG. 4.26 – Barrage poids

(d) On cherche une solution en contrainte de la forme

$$\begin{cases} \sigma_{11} = a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \sigma_{22} = b_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ \sigma_{12} = c_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \end{cases}$$

Déterminer, en tirant parti des résultats des questions 1b et 1c, les valeurs des coefficients  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  ainsi que  $a_{1j}$ ,  $b_{1j}$  et  $c_{1j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ .

## 2. Analyse des contraintes

(a) Une condition de non propagation des fissures horizontales le long du parement amont du barrage (condition de non fissuration de Maurice Lévy) s'écrit  $\sigma_{22} \leq -p$  où  $p$  désigne la pression hydrostatique de l'eau en contact avec ce parement. Justifier brièvement cette relation puis en déduire une condition sur l'angle  $\alpha$  que font entre eux les parements  $OA$  et  $OB$ .

*Application numérique* :  $\omega = 2400 \text{ daN.m}^{-3}$  (béton),  $\omega_0 = 1000 \text{ daN.m}^{-3}$  (eau claire) et  $\omega_0 = 1200 \text{ daN.m}^{-3}$  (eau boueuse).

*Remarque* : dans toute la suite du problème on prendra  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et l'on supposera que  $\nu = \frac{1}{2}$ . Bien que cette valeur du coefficient de Poisson ne corresponde pas à celle d'un matériau comme le béton pour lequel on a généralement  $\nu \approx \frac{1}{4}$ , son choix se justifie ici par la simplification des calculs qui en résulte.

(b) Soient  $x_1$  et  $x_2$  les coordonnées d'un point  $M$  du barrage quelconque mais fixé et soit  $\tau_{\max}(x_1, x_2)$  la valeur maximale en ce point de la contrainte de cisaillement  $\tau_n$ . Donner l'expression de  $\tau_{\max}(x_1, x_2)$  puis dire en quel point du barrage cette grandeur est maximale (on tirera pour cela parti des valeurs numériques introduites à la question 2a). En déduire alors, pour un matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, une relation entre  $\omega_0$ ,  $h$  et sa limite élastique  $\sigma_0$  en traction simple.

- (c) Déterminer la répartition des contraintes qu'exerce le sol sur la base  $AB$  du barrage puis calculer les éléments de réduction en  $A$  du torseur des actions mécaniques qui en résulte.

### 3. Détermination du champ des déplacements

- (a) Donner, en tout point du barrage, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (on rappelle que  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et  $\nu = \frac{1}{2}$ ).
- (b) Dédire des résultats de la question 3a la forme générale (i.e. à un déplacement de corps rigide près) des composantes  $u_1$  et  $u_2$  du champ des déplacements, puis achever leur détermination en supposant  $u_1(A) = u_2(A) = u_2(B) = 0$  (on pourra simplifier les développements en posant  $\omega_1 = \omega - 2\omega_0$ ). Que vaut en particulier le déplacement du sommet du barrage (point  $O$ ) ?

### P4.5 Fluide de Bingham

On se propose d'étudier l'écoulement rectiligne et permanent d'un fluide de Bingham incompressible dans une conduite cylindrique de révolution (figure 4.27). Le comportement de ce fluide visqueux non-newtonien est régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\sigma}^v$  ( $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^v$  où  $\eta$  est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici  $\mathbf{D} = Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^v\| - s_0\right)\frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\boldsymbol{\sigma}^v\|}\right)\boldsymbol{\sigma}^v$  où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside et où  $s_0 > 0$  est une constante mécanique caractéristique du fluide (seuil d'écoulement). Certaines pâtes et boues épaisses présentent un tel comportement.

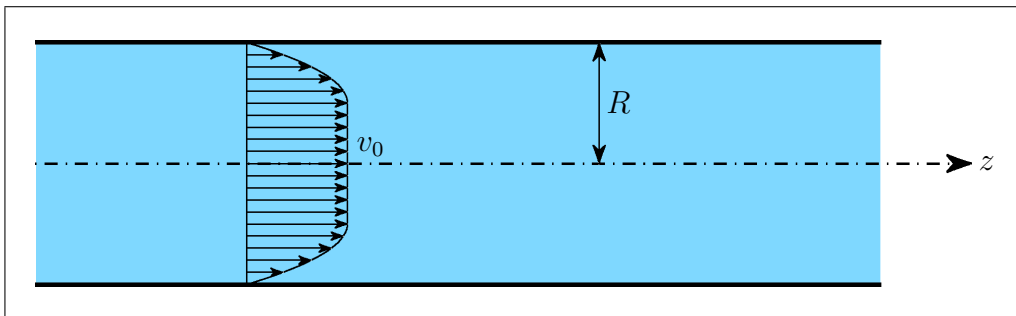


FIG. 4.27 – Écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (figure 4.27) adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_z$  où  $v$  est une fonction inconnue des variables  $r$  et  $z$  que l'on se propose à présent de déterminer.

1. Montrer qu'en fait  $v$  ne dépend que de  $r$ . En déduire alors la forme du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\sigma}^v$  où  $p$



désigne la pression. Préciser le degré de dépendance des composantes non diagonales de  $\sigma$  vis-à-vis des variables  $r$  et  $z$ .

- Des équations indéfinies du mouvement déduire que la pression  $p$  est indépendante de  $r$  et que son gradient est constant. On pose alors, dans tout ce qui suit,  $\frac{dp}{dz} = -G$  et l'on choisit  $G > 0$  de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des  $z$  positifs.
- Déduire des résultats de la question 2 l'expression de  $\sigma_{rz}$ . Quelle est alors la valeur minimale  $G_0$  du gradient de pression déclenchant l'écoulement ?
- On suppose à présent  $G \geq G_0$ . Déterminer avec précision  $v$  (on tirera pour cela parti des équations de comportement ainsi que des conditions aux limites) puis représenter le profil des vitesses dans les sections droites  $z = \text{cste}$  de la conduite.

### 4.7.3 Indications et éléments de réponse

#### E4.1 Massif de sol pesant uniformément chargé

- Soit  $g$  l'accélération de la pesanteur. On a, en tout point du sol,  $\frac{d\sigma_{12}}{dx_2} = 0$ ,  $\frac{d\sigma_{22}}{dx_2} = \rho g$  et  $\frac{d\sigma_{23}}{dx_2} = 0$ . De  $\sigma_{12}(0) = \sigma_{23}(0) = 0$  et de  $\sigma_{22}(0) = -q$  on déduit alors  $\sigma_{12}(x_2) = \sigma_{23}(x_2) = 0$  ainsi que  $\sigma_{22}(x_2) = \rho g x_2 - q$ .
- De  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = 0$  on tire  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22}$  ainsi que  $\sigma_{13} = 0$ .

#### E4.2 Coin élastique

- On vérifie que l'on a bien  $\vec{\sigma}_n = \vec{0}$  sur les tronçons  $OA$  et  $OB$  de la frontière pour lesquels  $\vec{n} = \pm \vec{e}_\theta$ .
- La seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement vérifiée se réduit ici à  $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = 0$ . On a alors, nécessairement,  $\sigma_{rr} = \frac{f(\theta)}{r}$ .
- On trouve  $\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \frac{f(\theta)}{r^3} x_1^2$ ,  $\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \frac{f(\theta)}{r^3} x_2^2$ ,  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{E} \frac{f(\theta)}{r^3} x_1 x_2$  et  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ . La seule équation de compatibilité des déformations non trivialement vérifiée est donc  $\partial_{12}^2 \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial_{22}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{11}^2 \varepsilon_{22})$ . On en déduit alors  $f''(\theta) + f(\theta) = 0$ , ce qui donne bien  $f(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta$ .
- En écrivant l'équilibre de la portion de solide définie par  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ,  $-\frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $0 \leq r \leq r_0$  avec  $r_0 \in ]0, R[$  quelconque mais fixé, on obtient  $C_1 = -\frac{P \cos \beta}{e(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)}$  et  $C_2 = \frac{P \sin \beta}{e(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$ .

#### E4.3 Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène

On est en présence d'un état de contrainte plane par rapport au plan  $(Ox_1, Ox_2)$ . Les directions principales de contrainte sont celles des axes de ce plan et les contraintes principales respectivement associées à ces directions ont pour expression  $\sigma_1 = q$  et  $\sigma_2 = 0$ . La dilatation

principale  $\varepsilon_1$  dans la direction de l'axe  $Ox_1$  a donc pour valeur  $\frac{q}{E_1}$  si  $x_1 \in ]0, \frac{l}{2}[$  et  $\frac{q}{E_2}$  si  $x_1 \in ]\frac{l}{2}, l[$ . On en déduit alors  $u_1(x_1) = \frac{q}{E_1}x_1$  si  $x_1 \in [0, \frac{l}{2}]$  et  $u_1(x_1) = \frac{q}{E_1}\frac{l}{2} + \frac{q}{E_2}(x_1 - \frac{l}{2})$  si  $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$ . Le déplacement horizontal de l'extrémité droite  $x_1 = l$  de la poutre est donc égal à  $\frac{ql}{2} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$ .

#### E4.4 Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène

- Comme dans l'exercice E4.3, on est ici en présence d'un état de contrainte plane par rapport au plan  $(Ox_1, Ox_2)$ , les directions principales de contrainte étant celles des axes de ce plan. Désignons par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 = 0$  les contraintes principales respectivement associées à ces directions. La dilatation principale  $\varepsilon_1$  dans la direction de l'axe  $Ox_1$  vaut alors  $\frac{\sigma_1}{E_1} + \beta\Delta T$  si  $x_1 \in ]0, \frac{l}{2}[$  et  $\frac{\sigma_1}{E_2} + \beta\Delta T$  si  $x_1 \in ]\frac{l}{2}, l[$  et l'on en déduit  $u_1(x_1) = (\frac{\sigma_1}{E_1} + \beta\Delta T)x_1$  si  $x_1 \in [0, \frac{l}{2}]$  et  $u_1(x_1) = (\frac{\sigma_1}{E_1} + \beta\Delta T)\frac{l}{2} + (\frac{\sigma_1}{E_2} + \beta\Delta T)(x_1 - \frac{l}{2})$  si  $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$ . De  $u_1(x_1 = l) = 0$ , on tire ensuite  $\sigma_1 = -2\beta\Delta T \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ , ce qui donne finalement  $u_1(x_1) = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \beta\Delta T x_1$  si  $x_1 \in [0, \frac{l}{2}]$  et  $\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \beta\Delta T (l - x_1)$  si  $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$ . L'amplitude du déplacement horizontal des sections droites de la poutre est donc extrême lorsque  $x_1 = \frac{l}{2}$  et vaut alors  $\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \beta\Delta T \frac{l}{2}$ . Enfin, ce déplacement est identiquement nul si  $E_1 = E_2$ , ce que laissait évidemment prévoir l'intuition.
- En adoptant une démarche analogue à celle de la question 1, on obtient tout d'abord  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \beta_1\Delta T$  si  $x_1 \in ]0, \frac{l}{2}[$  et  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_2} + \beta_2\Delta T$  si  $x_1 \in ]\frac{l}{2}, l[$ , ce qui donne  $u_1(x_1) = (\frac{\sigma_1}{E_1} + \beta_1\Delta T)x_1$  si  $x_1 \in [0, \frac{l}{2}]$  et  $u_1(x_1) = (\frac{\sigma_1}{E_1} + \beta_1\Delta T)\frac{l}{2} + (\frac{\sigma_1}{E_2} + \beta_2\Delta T)(x_1 - \frac{l}{2})$  si  $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$ . De  $u_1(x_1 = l) = 0$ , on déduit alors  $\sigma_1 = -(\beta_1 + \beta_2)\Delta T \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$  et l'on trouve finalement  $u_1(x_1) = \frac{\beta_1 E_1 - \beta_2 E_2}{E_1 + E_2} \Delta T x_1$  si  $x_1 \in [0, \frac{l}{2}]$  et  $\frac{\beta_1 E_1 - \beta_2 E_2}{E_1 + E_2} \Delta T (l - x_1)$  si  $x_1 \in [\frac{l}{2}, l]$ . L'amplitude du déplacement horizontal des sections droites de la poutre est à nouveau extrême lorsque  $x_1 = \frac{l}{2}$  et vaut alors  $\frac{\beta_1 E_1 - \beta_2 E_2}{E_1 + E_2} \Delta T \frac{l}{2}$ , tandis que ce dernier est à présent identiquement nul si  $\beta_1 E_1 = \beta_2 E_2$ .

#### E4.5 Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible

- La seule composante non nulle du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est ici  $D_{12} = \frac{1}{2}\partial_2 v_1$  et l'on a donc, en désignant par  $\eta$  la viscosité dynamique de cisaillement du fluide,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ ,  $\sigma_{12} = \eta\partial_2 v_1$  et  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  où l'indice 3 est relatif à la direction  $Ox_3$  orthogonale au plan de l'écoulement. Les équations indéfinies eulériennes du mouvement en projection sur  $\vec{e}_2$  et sur  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  se réduisent alors, en l'absence d'actions mécaniques à distance et puisque  $\vec{\gamma} = \mathbf{0}$ , à  $\partial_2 p = \partial_3 p = 0$ . L'équation indéfinie du mouvement en projection sur  $\vec{e}_1$  fournit ensuite  $\eta\partial_2^2 v_1 = \partial_1 p = \text{cste}$ .
- De  $v_1(x_2 = 0) = 0$  et de  $\sigma_{12}(x_2 = H) = 0$  on tire, après avoir posé  $G = -\partial_1 p$ ,  $v_1(x_2) = \frac{G}{2\eta}x_2(2H - x_2)$ .
- On trouve  $\vec{\sigma}_n = GH\vec{e}_1 - p\vec{e}_2$  et l'on a donc  $F = GH$ .
- On a  $Q = \frac{GH^3}{3\eta}$ . La vitesse du fluide étant maximale pour  $x_2 = H$  et donnée par  $V_0 = \frac{GH^2}{2\eta}$ , il vient alors  $Q = \frac{2}{3}V_0H$ .

### E4.6 Vernis craquelant

1. Les directions principales du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$  dans le métal sont celles du repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les contraintes principales correspondantes sont respectivement égales à  $\sigma_r^{(m)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(m)} = 0$  et  $\sigma_z^{(m)} = \frac{-F}{2\Pi R e}$ . Les directions principales de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$  sont identiques à celles de  $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$  et les déformations principales associées ont pour valeurs  $\varepsilon_r^{(m)} = \varepsilon_\theta^{(m)} = \frac{\nu^{(m)}}{E^{(m)}} \frac{F}{2\Pi R e}$  et  $\varepsilon_z^{(m)} = \frac{-1}{E^{(m)}} \frac{F}{2\Pi R e}$ . Le vernis subissant, comme la paroi extérieure du cylindre métallique, une dilatation circonférentielle  $\varepsilon_\theta^{(v)} = \varepsilon_\theta^{(m)} > 0$ , on peut a priori s'attendre à l'apparition de craquelures dans la direction verticale  $Oz$ .
2. Soient  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(v)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(v)}$  les tenseurs de déformation et de contrainte dans le vernis. Ces tenseurs ont mêmes directions principales que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$  et l'on a, puisque l'adhérence entre le cylindre métallique et le film de vernis est parfaite,  $\varepsilon_\theta^{(v)} = \varepsilon_\theta^{(m)}$  ainsi que  $\varepsilon_z^{(v)} = \varepsilon_z^{(m)}$ . On a par ailleurs  $\sigma_r^{(v)} = 0$ . Des équations de comportement du vernis on déduit alors  $\sigma_\theta^{(v)} = \frac{\nu^{(m)} - \nu^{(v)}}{1 - \nu^{(v)^2}} \frac{E^{(v)}}{E^{(m)}} \frac{F}{2\Pi R e}$  et  $\sigma_z^{(v)} = \frac{\nu^{(m)}\nu^{(v)} - 1}{1 - \nu^{(v)^2}} \frac{E^{(v)}}{E^{(m)}} \frac{F}{2\Pi R e}$ . Ces deux contraintes principales étant des contraintes normales de compression, il ne peut y avoir apparition de craquelures dans le vernis.

### E4.7 Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes

1. Des relations (4.86) et (4.87) relatives au critère de Tresca jointes à  $\sigma_{33} = 0$  on tire  $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq \sigma_0$ . Les expressions (4.98) et (4.99) associées au critère de Von-Mises fournissent quant à elles  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq 2\sigma_0^2$ , ce qui s'écrit encore  $\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_2)}{\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_0}\right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sqrt{2}\sigma_0}\right]^2 \leq 1$ . Les courbes limites correspondant à ces deux critères sont représentées sur la figure 4.28.

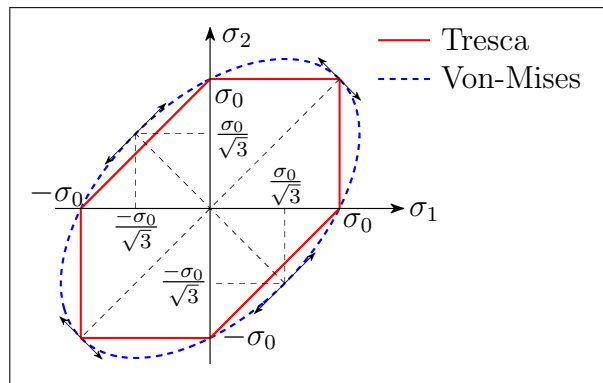


FIG. 4.28 – Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes

2. On trouve  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_0$  pour le critère de Tresca et  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_0$  pour celui de Von-Mises.

3. Les quantités  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$  et  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  sont maximales et égales pour  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \pm \frac{h}{2}$  et l'on a donc, tant pour le critère de Tresca que pour celui de Von-Mises,  $P_l = \frac{2I}{hl}\sigma_0$  ce qui donne, avec  $b = h$  et  $l = 10h$ ,  $P_l = \frac{1}{60}\sigma_0 h^2$ .

#### E4.8 Rhéomètre de Couette

1. La seule composante non nulle du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est ici  $D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)$ . On en déduit alors  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$ ,  $\sigma_{r\theta} = \eta \left( v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)$  et  $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$ .
2. L'équation indéfinie eulérienne du mouvement en projection sur  $\vec{e}_\theta$  se réduit ici à  $\partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0$  ce qui donne  $v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = 0$ . Cette équation différentielle ordinaire a pour solution générale  $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$  et l'on obtient donc, puisque  $v(r_0) = r_0\omega$  et  $v(r_1) = 0$ ,  $v(r) = \omega \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{r_1^2} \right)$ .
3. On a  $\sigma_{r\theta}(r) = -2\eta \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \frac{\omega}{r^2}$ . De  $C + 2\Pi r^2 H \sigma_{r\theta}(r) = 0$  on tire alors  $\eta = \frac{C}{4\Pi H \omega} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 r_1^2}$ .

#### E4.9 Distorsion pure

1. On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \alpha \sigma_{12} & = 0 \\ \dot{\sigma}_{22} + \alpha \sigma_{12} & = 0 \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{\alpha}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) & = \mu \alpha \end{cases}$$

2. On trouve  $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = \mu(1 - \cos \alpha t)$  et  $\sigma_{12} = \mu \sin \alpha t$ .
3. De  $\text{tr} \mathbf{D} = 0$  on déduit tout d'abord  $\sigma_{33} = 0$ . On a donc  $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0$  ce qui donne  $\|\mathbf{s}\| = \|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{2\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2} = 2\sqrt{2}\mu |\sin \frac{\alpha t}{2}|$ . La solution obtenue à la question 2 est donc valable  $\forall t$  si  $2\sqrt{2}\mu < C_M$ . Si  $2\sqrt{2}\mu \geq C_M$  cette même solution ne vaut en revanche que pour  $t \in [0, t_{\text{lim}}]$  où  $t_{\text{lim}} = \frac{2}{\alpha} \arcsin \frac{C_M}{2\sqrt{2}\mu}$ .

#### E4.10 Expansion plane

1. On obtient, en posant  $\tau = \alpha t$ , le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \frac{2\alpha}{1+\tau^2} \sigma_{12} & = (\lambda + \mu) \frac{2\alpha\tau}{1+\tau^2} \\ \dot{\sigma}_{22} + \frac{2\alpha}{1+\tau^2} \sigma_{12} & = (\lambda + \mu) \frac{2\alpha\tau}{1+\tau^2} \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{\alpha}{1+\tau^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) & = 0 \end{cases}$$

2. On trouve  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = (\lambda + \mu) \ln(1 + \alpha^2 t^2)$  et  $\sigma_{12} = 0$ .
3. De  $\text{tr} \mathbf{D} = \frac{2\alpha\tau}{1+\tau^2}$  et de  $\dot{\sigma}_{33} = \lambda \text{tr} \mathbf{D}$  on déduit tout d'abord  $\sigma_{33} = \lambda \ln(1 + \alpha^2 t^2)$ . Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  étant diagonal, le critère de Tresca adopte ici la forme  $\max \{ |\sigma_{11} - \sigma_{22}|, |\sigma_{11} - \sigma_{33}|, |\sigma_{22} - \sigma_{33}| \} = \sigma_0$  et l'on a donc, à la limite élastique,

$\mu \ln(1 + \alpha^2 t^2) = \sigma_0$ . La solution obtenue à la question 2 n'est donc valable que pour  $t \in [0, t_{\text{lim}}]$  avec  $t_{\text{lim}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\exp(\frac{\sigma_0}{\mu}) - 1}$ .

#### P4.1 Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux

1. On a, par symétrie,  $\omega(\frac{H}{2}) = \frac{\omega_0}{2}$ . Le même raisonnement appliqué aux deux demi-cylindres respectivement définis par  $z \in [0, \frac{H}{2}]$  et  $z \in [\frac{H}{2}, H]$  fournit ensuite  $\omega(\frac{H}{4}) = \frac{\omega_0}{4}$  et  $\omega(\frac{3H}{4}) = \frac{3\omega_0}{4}$ . Il suffit ensuite de réitérer le procédé de dichotomie puis de conclure par densité des nombres binaires dans  $\mathbb{R}$ . On a alors,  $\forall z \in [0, H]$ ,  $\omega(z) = \frac{\omega_0 z}{H}$  puis  $u_\theta = \frac{\omega_0 r z}{H}$ .
2. Les seules composantes non nulles des tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont  $\varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega_0 r}{2H}$  et  $\sigma_{\theta z} = \frac{\mu \omega_0 r}{H}$  où  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Les équations indéfinies de l'équilibre sont alors bien vérifiées puisque  $\sigma_{\theta z}$  est indépendant de  $\theta$  et de  $z$ .
3. On trouve  $C = \frac{E}{4(1+\nu)} \frac{\Pi \omega_0}{H} (r_1^4 - r_0^4)$ .
4. On a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \beta \Delta T \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} u'_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & \frac{\omega_0 r}{2H} \\ 0 & \frac{\omega_0 r}{2H} & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on en déduit alors

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{(m)} = u'_r - \beta \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} = \frac{u_r}{r} - \beta \Delta T \\ \varepsilon_{zz}^{(m)} = -\beta \Delta T \\ \varepsilon_{r\theta}^{(m)} = 0 \\ \varepsilon_{rz}^{(m)} = 0 \\ \varepsilon_{\theta z}^{(m)} = \frac{\omega_0 r}{2H} \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda(u'_r + \frac{u_r}{r} - 3\beta \Delta T) + 2\mu(u'_r - \beta \Delta T) \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda(u'_r + \frac{u_r}{r} - 3\beta \Delta T) + 2\mu(\frac{u_r}{r} - \beta \Delta T) \\ \sigma_{zz} = \lambda(u'_r + \frac{u_r}{r} - 3\beta \Delta T) - 2\mu\beta \Delta T \\ \sigma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{rz} = 0 \\ \sigma_{\theta z} = \mu \frac{\omega_0 r}{H} \end{cases}$$

5. Seule l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_r$  est non trivialement satisfaite et se réduit ici à  $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$ , ce qui implique  $u_r''(r) + \frac{u_r'(r)}{r} - \frac{u_r(r)}{r^2} = 0$ ,  $\forall r \in ]r_0, r_1[$ , équation différentielle ordinaire dont la solution générale est de la forme  $u_r = Ar + \frac{B}{r}$ . De  $\sigma_{rr}(r_0) = \sigma_{rr}(r_1) = 0$  on déduit alors  $B = 0$  ainsi que  $A = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \beta \Delta T = (1 + \nu) \beta \Delta T$ . On a donc  $u_r = (1 + \nu) \beta \Delta T r$ , ce qui donne finalement

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = (1 + \nu) \beta \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta} = (1 + \nu) \beta \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \varepsilon_{rz} = 0 \\ \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega_0 r}{2H} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{rr}^{(m)} = \nu \beta \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} = \nu \beta \Delta T \\ \varepsilon_{zz}^{(m)} = -\beta \Delta T \\ \varepsilon_{r\theta}^{(m)} = 0 \\ \varepsilon_{rz}^{(m)} = 0 \\ \varepsilon_{\theta z}^{(m)} = \frac{\omega_0 r}{2H} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = 0 \\ \sigma_{zz} = -E \beta \Delta T \\ \sigma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{rz} = 0 \\ \sigma_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\omega_0 r}{H} \end{cases}$$

## P4.2 Torsion pure d'un cylindre

1. (a) On obtient

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = 0 & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(\partial_r u - \frac{u}{r}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = 0 & \varepsilon_{rz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\partial_z u \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma_{rr} = 0 & \sigma_{r\theta} = G(\partial_r u - \frac{u}{r}) \\ \sigma_{\theta\theta} = 0 & \sigma_{rz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{\theta z} = G\partial_z u \end{cases}$$

- (b) Seule l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_\theta$  est non trivialement satisfaite et donne  $\partial_{rr}^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u - \frac{1}{r^2}u + \partial_{zz}^2 u = 0$ .
- (c) De  $u(r, z) = f(r)g(z)$  et de  $u(r, H) = \omega r$  on tire tout d'abord  $f(r) = \frac{\omega}{g(H)}r$ . On a alors  $\partial_{rr}^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u - \frac{1}{r^2}u = 0$  et l'équation aux dérivées partielles obtenue à la question 1b se réduit donc ici à  $\partial_{zz}^2 u = 0$ , c'est-à-dire à  $g''(z) = 0$ . De  $u(r, 0) = 0$  on tire par ailleurs  $g(0) = 0$  ce qui donne  $g(z) = Az$  et l'on a donc finalement  $u(r, z) = \frac{\omega}{H}rz$ .
2. (a) Seule l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_\theta$  est non trivialement satisfaite et s'écrit ici  $\partial_z \sigma_{\theta z} = 0$ , ce qui donne bien  $\sigma_{\theta z} = h(r)$ .
- (b) La seule composante non nulle de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est  $\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2G}\sigma_{\theta z} = \frac{1}{2G}h(r)$ . De  $\varepsilon_{\theta\theta} = 0$  et de la symétrie de révolution du problème on déduit tout d'abord immédiatement  $u_r = 0$ . La condition  $\varepsilon_{rr} = 0$  étant alors trivialement vérifiée, de  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = 0$ , de  $u_r = 0$  et de  $u_z(r, 0) = 0$  on tire ensuite  $u_z = 0$ . De  $\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2G}h(r)$ , de  $u_z = 0$  ainsi que de  $u_\theta(r, 0) = 0$  on déduit par ailleurs  $u_\theta = \frac{1}{G}h(r)z$ . La nullité de  $\varepsilon_{r\theta}$  et de  $u_r$  imposant  $\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} = 0$ , on a alors  $h'(r) - \frac{1}{r}h(r) = 0$ , c'est-à-dire  $h(r) = Br$  puis  $u_\theta = \frac{B}{G}rz$ . Enfin, de  $u_\theta(r, H) = \omega r$  on tire aisément  $B = \frac{G\omega}{H}$ . L'expression finale des composantes non nulles de  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  est donc

$$u_\theta = \frac{\omega}{H}rz \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega}{2H}r \quad \sigma_{\theta z} = G\frac{\omega}{H}r$$

- (c) De  $C - \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr d\theta = 0$  et de l'expression de  $\sigma_{\theta z}$  obtenue à la question 2b on tire  $C = \Pi G \frac{\omega}{2H} R^4$ . La correspondance entre  $C$  et  $\omega$  est donc linéaire, ce que l'on pouvait évidemment prévoir dans la mesure où la transformation du cylindre est infinitésimale et son comportement élastique linéaire. De  $\sigma_{\theta z} = G\frac{\omega}{H}r$  et de  $\omega = \frac{2HC}{\Pi GR^4}$  on déduit alors  $\sigma_{\theta z} = \frac{2C}{\Pi R^4}r$ .
- (d) On a, à la limite élastique,  $\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$ . On a par ailleurs ici  $\sqrt{J_2} = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{2}|\sigma_{\theta z}|$ . Le maximum de  $|\sigma_{\theta z}|$  étant atteint pour  $r = R$ , la valeur de  $C$  à la limite élastique est donc  $C_{\text{lim}} = \frac{\Pi}{2\sqrt{3}}\sigma_0 R^3$ .
- (e) On trouve tout d'abord, en reprenant la démarche de la question 2b,  $u_r = 0$ ,  $u_z = 0$  et  $u_\theta = \frac{H}{G_0} \ln(1 + \frac{z}{H})h(r)$ . Les relations  $h'(r) - \frac{1}{r}h(r) = 0$  et  $u_\theta(r, H) = \omega r$  restant à satisfaire, on obtient ensuite  $h(r) = Br$  avec cette fois  $B = \frac{G_0\omega}{H \ln 2}$ , si bien que l'expression finale des composantes non nulles de  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  devient

$$u_\theta = \frac{\omega}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{z}{H}\right) r \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega}{2H \ln 2} \frac{r}{1 + \frac{z}{H}} \quad \sigma_{\theta z} = G_0 \frac{\omega}{H \ln 2} r$$

La correspondance entre  $C$  et  $\omega$  est alors remplacée par  $C = \Pi G_0 \frac{\omega}{2H \ln 2} R^4$ , ce qui donne  $\sigma_{\theta z} = \frac{2C}{\Pi R^4} r$ . Cette relation étant identique à celle obtenue à la question 2c, la valeur de  $C$  à la limite élastique est inchangée.

### P4.3 Matériau composite

1. On obtient, en tirant parti du fait que  $\nu = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(R)} \\ \sigma_{22}^{(R)} \\ \sigma_{12}^{(R)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(R)} \\ \sigma_{22}^{(R)} \\ \sigma_{12}^{(R)} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

et l'on en déduit  $\varepsilon_{33} = \frac{-1}{2E}(\sigma_{11}^{(R)} + \sigma_{22}^{(R)})$ , cette composante de  $\varepsilon$  étant évidemment liée aux variations d'épaisseur du tissu.

2. On trouve  $\beta = \frac{nr}{E}$ .
3. On a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \beta & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

ce qui donne, pour  $\beta = \frac{2}{3}$ ,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{3}{16E} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

4. On trouve  $\varepsilon(\alpha) = \frac{3\sigma}{16E}(4 - \cos 4\alpha)$  et l'on en déduit alors  $E(\alpha) = \frac{16E}{3(4 - \cos 4\alpha)}$ . La figure 4.29 représente les variations de  $\frac{E(\alpha)}{E}$  avec  $\alpha$ .

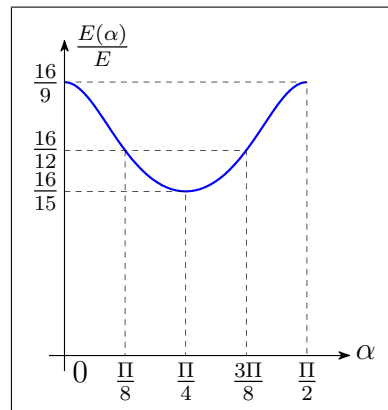


FIG. 4.29 – Variations de  $\frac{E(\alpha)}{E}$  avec  $\alpha$

#### P4.4 Barrage poids

1. (a) C'est une conséquence directe de la loi de Hooke dans le cas d'un état de déformation plane :  $\varepsilon_{13} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = 0$ ,  $\varepsilon_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = 0$  et  $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , les composantes non nulles de  $\boldsymbol{\sigma}$  étant par ailleurs, comme celles de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , indépendantes de  $x_3$ .
- (b) Le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  s'exerçant sur le parement amont  $OA$  du barrage a pour expression  $\vec{\sigma}_n = p\vec{e}_1$  où  $p = -\omega_0 x_2$  est la pression hydrostatique de l'eau en contact avec ce parement. On en déduit alors  $\sigma_{11}(x_1 = 0, x_2) = \omega_0 x_2$  et  $\sigma_{12}(x_1 = 0, x_2) = 0$ ,  $\forall x_2 \in [-h, 0]$ . De la nullité de ce même vecteur contrainte sur le parement aval  $OB$  on tire par ailleurs,  $\forall x_2 \in [-h, 0]$ ,

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1 = -x_2 \tan \alpha, x_2) \cos \alpha + \sigma_{12}(x_1 = -x_2 \tan \alpha, x_2) \sin \alpha = 0 \\ \sigma_{12}(x_1 = -x_2 \tan \alpha, x_2) \cos \alpha + \sigma_{22}(x_1 = -x_2 \tan \alpha, x_2) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

- (c) On a, en tout point du barrage,  $\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0$  ainsi que  $\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = \omega$ . L'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  est quant à elle trivialement vérifiée.
  - (d) Des équations indéfinies de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  on tire tout d'abord  $c_{12} = -a_{11}$  et  $c_{11} = \omega - b_{12}$ . Les conditions aux limites en contrainte sur le parement  $OA$  fournissent ensuite  $a_1 = c_1 = c_{12} = 0$  et  $a_{12} = \omega_0$  tandis que celles relatives au parement  $OB$  imposent  $b_1 = 0$ ,  $\omega - b_{12} = \frac{\omega_0}{\tan^2 \alpha}$  ainsi que  $b_{11} = \frac{\omega}{\tan \alpha} - 2\frac{\omega_0}{\tan^3 \alpha}$ .
2. (a) La condition  $\sigma_{22} \leq -p$  empêche l'ouverture des lèvres des fissures horizontales le long du parement amont  $OA$ . On en déduit alors, puisque  $p = -\omega_0 x_2$  et  $\sigma_{22}(x_1 = 0, x_2) = (\omega - \frac{\omega_0}{\tan^2 \alpha})x_2$ ,  $\tan^2 \alpha \geq \frac{\omega_0}{\omega - \omega_0}$ . On a donc  $\alpha \geq 40^\circ$  pour l'eau claire et  $\alpha \geq 45^\circ$  pour l'eau boueuse.
  - (b) On trouve

$$\tau_{\max}(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\omega - 2\omega_0)^2(x_1 + x_2)^2 + \omega_0^2 x_1^2}$$

Pour  $x_2 \in [-h, 0]$  et pour les valeurs numériques introduites à la question 2a,  $\tau_{\max}(x_1, x_2)$  est maximal en  $x_1 = -x_2$  (parement  $OB$ ) et vaut  $\omega_0 |x_2|$ . Son maximum global est donc atteint au point  $B$  et a pour valeur  $\omega_0 h$ . On en déduit alors, pour un matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca,  $\omega_0 h \leq \frac{\sigma_0}{2}$ .

- (c) Soit  $\mathcal{T}^s$  le torseur des actions mécaniques qu'exerce le sol sur la base  $AB$  du barrage,  $\vec{\mathcal{R}}^s$  sa résultante et  $\vec{\mathcal{M}}^s$  son moment résultant au point  $A$ . Le vecteur contrainte aux points de  $AB$  ayant pour expression  $\vec{\sigma}_n = -\omega_0 x_1 \vec{e}_1 + ((\omega - \omega_0)h - (\omega - 2\omega_0)x_1) \vec{e}_2$ ,  $x_1 \in [0, h]$ , on obtient alors  $\vec{\mathcal{R}}^s = -\omega_0 \frac{h^2}{2} \vec{e}_1 + \omega \frac{h^2}{2} \vec{e}_2$  et  $\vec{\mathcal{M}}^s = (\omega + \omega_0) \frac{h^3}{6} \vec{e}_3$ .



3. (a) On a, en tout point du barrage,  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = \frac{3}{4E}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$  et  $\varepsilon_{12} = \frac{3}{2E}\sigma_{12}$ . On en déduit alors, après avoir posé  $\omega_1 = (\omega - 2\omega_0)$ ,  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = \frac{-3}{4E}\omega_1(x_1 + x_2)$  ainsi que  $\varepsilon_{12} = \frac{3}{2E}\omega_0 x_1$ .

(b) On obtient finalement les relations

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{8E} [-\omega_1[(x_1 + x_2)^2 + hx_2] + 4\omega_0 h(h + x_2)] \\ u_2 = \frac{3}{8E} [\omega_1[(x_1 + x_2)^2 + hx_1 - h^2] + 4\omega_0 x_1(x_1 - h)] \end{cases}$$

Le déplacement du sommet du barrage a donc pour valeur  $\frac{3}{2E}\omega_0 h^2 \vec{e}_1 - \frac{3}{8E}\omega_1 h^2 \vec{e}_2$ .

#### P4.5 Fluide de Bingham

- De  $\text{div}_x \mathbf{v} = 0$  on déduit aisément  $\partial_z v = 0$ . La seule composante non nulle du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est alors  $D_{rz} = \frac{1}{2}v'(r)$  tandis que celles de  $\boldsymbol{\sigma}$  se réduisent à  $\sigma_{rz}$  et  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$ . Des équations de comportement on tire par ailleurs  $D_{rz} = Y(|\sigma_{rz}| - s_0) \frac{1}{2\eta} (\sigma_{rz} - s_0 \frac{\sigma_{rz}}{|\sigma_{rz}|})$  ce qui montre que  $\sigma_{rz}$ , tout comme  $D_{rz}$ , ne dépend que de  $r$ .
- Les équations indéfinies du mouvement en projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$  donnent successivement  $\partial_r p = 0$  puis  $\frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \frac{dp}{dz} = -G$ .
- De  $\frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\sigma_{rz}) = -G$  on tire tout d'abord, puisque  $\sigma_{rz}(0)$  ne peut être infini,  $\sigma_{rz} = -\frac{Gr}{2}$ . L'écoulement ne pouvant ici se déclencher que lorsque  $\sigma_{rz} \leq -s_0$ , on en déduit alors  $G_0 = \frac{2s_0}{R}$ .
- On a  $D_{rz} = 0$  si  $r \in [0, r_0]$  où  $r_0 = \frac{G_0}{G}R$  et  $D_{rz} = \frac{1}{2\eta}(s_0 - \frac{Gr}{2})$  si  $r \in [r_0, R]$ . On obtient alors, par continuité de  $v$  et puisque  $v(R) = 0$ ,  $v(r) = v_0 = \frac{R^2}{4\eta} \frac{(G-G_0)^2}{G}$  si  $r \in [0, r_0]$  et  $v(r) = \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2) + \frac{G_0 R}{2\eta}(r - R)$  si  $r \in [r_0, R]$ . La figure 4.27 illustre le profil des vitesses dans les sections droites de la conduite.




# Chapitre 5

## Principes généraux et leurs applications

Le présent chapitre est consacré à l'énoncé de principes généraux (i.e. indépendants des relations de comportement) ainsi qu'à leur application à quelques comportements simples de type solide ou fluide. Certains des résultats présentés ici sont à la base de nombreuses méthodes numériques de résolution de problèmes aux limites en mécanique des milieux déformables, telle que la méthode des éléments finis, dont une présentation constitue la matière du chapitre 6.

### 5.1 Principes généraux

Après avoir introduit, dans le chapitre 4, les notions de comportement d'un corps matériel continu et d'équations régissant celui-ci, nous revenons, dans la présente section, à l'énoncé d'un certain nombre de principes généraux, ainsi dénommés pour leur indépendance vis-à-vis de ces dernières, avant de les appliquer à quelques comportements simples de milieux fluides (section 5.2) ainsi qu'aux solides élastiques linéaires isotropes soumis à des transformations infinitésimales (section 5.3).

 [pap51.html](#) Soit donc  $\mathcal{M}$  un milieu continu. Dans tout ce chapitre, nous adopterons le plus souvent un point de vue eulérien (rappelons que pour les transformations infinitésimales de solides élastiques les points de vue lagrangien et eulérien coïncident) en considérant la configuration actuelle  $\Omega_t$  de  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé.

Dans un souci de simplicité, nous omettrons par ailleurs les variables d'espace et de temps et désignerons simplement par  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  le champ tensoriel symétrique des contraintes de Cauchy, par  $\mathbf{u} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{v} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$ ) le champ vectoriel des déplacements (resp<sup>t</sup> des vitesses), par  $\boldsymbol{\gamma} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  celui des accélérations, par  $\rho : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}$  le champ scalaire des masses volumiques, par  $\mathbf{b} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  le champ vectoriel des densités massiques de forces lié aux

actions mécaniques extérieures à distance (hypothèse 4 page 158), et par  $\mathbf{g} : \Gamma_{t2} \mapsto \mathbb{R}^3$  celui des densités surfaciques de forces associé aux actions mécaniques extérieures de contact données sur  $\Gamma_{t2} \subseteq \Gamma_t$ , où  $\Gamma_t$  désigne la frontière de  $\Omega_t$  que l'on supposera suffisamment régulière pour qu'y soit défini presque partout le champ  $\mathbf{n} : \Gamma_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des normales sortantes (i.e. dirigées vers l'extérieur de  $\Omega_t$ ).

Enfin, nous désignerons par  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{L}(\Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3; \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9)$  l'opérateur différentiel linéaire qui à tout champ  $\mathbf{w} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  associe la partie symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  de son gradient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} [\mathbf{grad}_x(\mathbf{w}) + {}^t\mathbf{grad}_x(\mathbf{w})] \quad \forall \mathbf{w} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3 \quad (5.1)$$

Autrement dit,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  désignera le champ tensoriel linéarisé des petites déformations engendré par le déplacement  $\mathbf{u}$  dans le cas de transformations infinitésimales du milieu continu  $\mathcal{M}$ , tandis qu'à  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  correspondra, de façon plus générale, celui des taux de déformation  $\mathbf{D}$  induit par la vitesse  $\mathbf{v}$ .

### 5.1.1 Rappels de résultats précédemment énoncés

Nous rappelons ici, sans les redémontrer, deux principes généraux (i.e. indépendants des équations de comportement) établis dans les chapitres précédents du cours.

#### 5.1.1.1 Équation eulérienne de conservation de la masse

Conséquence de l'hypothèse 3 page 54, la conservation de la masse d'un volume matériel  $\mathcal{V}$  quelconque mais fixé du milieu continu  $\mathcal{M}$  se traduit, d'un point de vue eulérien (chapitre 1, section 1.5.1 page 54), par l'équation locale

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

ou par la relation équivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.3)$$

#### 5.1.1.2 Équations indéfinies eulériennes du mouvement

Ces équations locales, conséquences de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un volume matériel  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{M}$  quelconque mais fixé et établies dans le chapitre 3 (section 3.2.3.1 page 172), adoptent la forme intrinsèque


$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (5.4)$$

Exprimées relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , elles s'écrivent

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho b_i = \rho \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.5)$$

## 5.1.2 Théorème d'Euler

### 5.1.2.1 Forme locale

 [pap5121.html](#) La forme locale du théorème d'Euler résulte de la combinaison des équations indéfinies eulériennes du mouvement (5.4) avec l'équation eulérienne locale de conservation de la masse (5.3).

On a tout d'abord, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tout en tirant parti de (1.44),

$$\begin{aligned} \rho \gamma_i &= \rho \frac{dv_i}{dt} \\ &= \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) \\ &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho v_j \partial_j v_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Considérant (5.3), nous avons par ailleurs

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\partial_j (\rho v_j) \quad (5.7)$$

Reportant cette égalité dans (5.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho \gamma_i &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_j) v_i + \rho v_j \partial_j v_i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_j v_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

et il vient finalement, après avoir injecté cette dernière relation dans (5.5),

$$\partial_j (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) + \rho b_i = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.9)$$

c'est-à-dire la relation vectorielle intrinsèque de champs

$$\operatorname{div}_x (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \quad (5.10)$$

Nous avons donc établi le

**Théorème 10 (Euler - forme locale)** Soit  $\Omega_t$  la configuration actuelle du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé. On a alors, presque partout sur  $\Omega_t$ , l'équation locale


$$\mathbf{div}_x(\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) \quad (5.11)$$

### Remarques

1. Si la relation vectorielle de champs (5.11) est intrinsèque, les trois équations scalaires (5.9) ne valent quant à elles que pour un système de coordonnées spatiales cartésiennes.
2. Des expressions (5.8), on déduit par ailleurs la relation vectorielle intrinsèque de champs

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \mathbf{div}_x(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad (5.12)$$

#### 5.1.2.2 Forme globale

 [pap5122.html](#) Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  un volume matériel fini occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  (voir la figure 3.8 page 171), de frontière  $\mathcal{S}_t$  suffisamment régulière pour qu'y puisse être défini presque partout le champ  $\mathbf{n} : \mathcal{S}_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des normales sortantes.

Intégrons alors la relation locale (5.11) sur  $\mathcal{V}_t$ . Il vient, en effectuant les développements relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (5.9),

$$\int_{\mathcal{V}_t} \partial_j(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) dv + \int_{\mathcal{V}_t} \rho b_i dv = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dv \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.13)$$

Appliquant ensuite le théorème d'Ostrogradski à la première intégrale du membre de gauche de cette égalité, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_t} \partial_j(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) dv = \int_{\mathcal{S}_t} (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) n_j ds \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.14)$$

ce qui donne, en reportant cette dernière relation dans (5.13),

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho b_i dv + \int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dv + \int_{\mathcal{S}_t} \rho v_i v_j n_j ds \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.15)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad (5.16)$$

et nous obtenons le

**Théorème 11 (Euler - forme globale)** Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  un volume matériel fini occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\mathcal{S}_t$  "suffisamment régulière". On a alors

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \, dv}_{\text{actions à distance}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\text{actions de contact}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \, dv}_{\text{résultante de } \frac{\partial}{\partial t} \text{ des}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_t} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds}_{\text{débit des quantités}} \quad (5.17)$$

résultante des actions mécaniques extérieures      quantités de mouvement      de mouvement

**Remarque** La forme globale (5.17) du théorème d'Euler peut être obtenue directement (i.e. sans recourir à sa forme locale) en injectant l'expression (5.12) de  $\rho \boldsymbol{\gamma}$  dans la relation (3.64) établie dans la section (3.2.3.1) page 172, puis en appliquant le théorème d'Ostrogradski à chacune des composantes relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de l'intégrale sur  $\mathcal{V}_t$  du terme  $\mathbf{div}_x(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ .

Soit par ailleurs  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  le tenseur des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, et soit  $\mathcal{T}^c(\mathcal{V}_t)$  son tenseur cinétique (i.e. des quantités de mouvement) au même instant. La forme globale (5.17) du théorème d'Euler s'obtient aussi directement en écrivant l'égalité entre la résultante  $\vec{\mathcal{R}}^e(\mathcal{V}_t)$  de  $\mathcal{T}^e(\mathcal{V}_t)$  et la dérivée matérielle  $\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{R}}^c(\mathcal{V}_t)$  de la résultante  $\vec{\mathcal{R}}^c(\mathcal{V}_t)$  de  $\mathcal{T}^c(\mathcal{V}_t)$  (voir la remarque 4 de la section 3.2.3.1, page 173). Il suffit alors d'exploiter (1.68) ainsi que la définition de la dérivée matérielle d'une grandeur physique eulérienne donnée dans le tableau 1.1 pour se ramener à la situation décrite dans le paragraphe précédent et retrouver, après application du théorème d'Ostrogradski, le second membre de l'égalité (5.17).

### 5.1.2.3 Application

Reconsidérons ici l'écoulement laminaire et permanent de la tranche de fluide visqueux newtonien incompressible et non pesant étudié dans la section 4.4.2 et reproduit sur la figure 5.1, et appliquons la forme globale du théorème d'Euler (théorème 11) au domaine fluide  $\mathcal{V}$  représenté sur cette même figure et compris entre les sections de largeur unité  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$ .

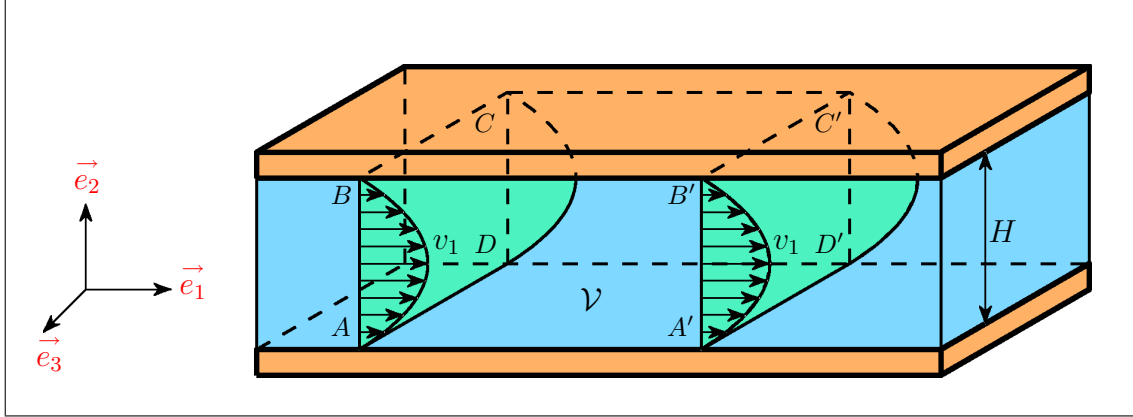


FIG. 5.1 – Écoulement d'un fluide visqueux newtonien entre deux plaques

On a alors, en désignant par  $\mathcal{S}$  la frontière de ce domaine et compte tenu des hypothèses précédentes,

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad (5.18)$$

Intéressons-nous tout d'abord au membre de droite de cette égalité. Le champ des vitesses étant de la forme  $\mathbf{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1$  (voir la section 4.4.2), on a  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur les faces  $AA'D'D$ ,  $BB'C'C$ ,  $AA'B'B$  ainsi que  $DD'C'C$ . Ce champ ne dépendant pas de  $x_1$ , on a par ailleurs, en raison des sens opposés des normales sortantes aux points des sections  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$ ,

$$\int_{ABCD} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds + \int_{A'B'C'D'} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

de sorte qu'il reste simplement

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (5.18),

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

La matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  adoptant par ailleurs la forme (voir à nouveau la section 4.4.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & \eta \partial_2 v_1 & 0 \\ \eta \partial_2 v_1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique de cisaillement et  $p$  la pression indépendante de  $x_2$  et  $x_3$ , on a, puisque les normales sortantes aux points des sections  $AA'B'B$  et  $DD'C'C$  sont de sens opposés,



$$\int_{AA'B'B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{DD'C'C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Les normales sortantes aux points des sections  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  étant également de sens opposés, il vient, puisque la pression  $p$  n'est fonction que de  $x_1$  et que  $v_1$  en est indépendant,

$$\int_{ABCD} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{A'B'C'D'} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = H(p_A - p_{A'}) \vec{e}_1 \quad (5.24)$$

où  $H$  est la hauteur de la tranche de fluide (figure 5.1) et où  $p_A$  (resp<sup>t</sup>  $p_{A'}$ ) désigne la pression aux points de la section  $ABCD$  (resp<sup>t</sup>  $A'B'C'D'$ ).

Les forces exercées par le volume fluide  $\mathcal{V}$  sur chacune des parois étanches et fixes dans la direction  $\vec{e}_1$  de l'écoulement et par unité de largeur étant égales en vertu de la symétrie de ce dernier par rapport au plan  $x_2 = \frac{H}{2}$ , désignant celles-ci par  $F_{AA'} \vec{e}_1$ , nous obtenons, puisque les normales sortantes aux points des sections  $AA'D'D$  et  $BB'C'C$  sont là encore de sens opposés et que  $p$  ne dépend pas de  $x_2$ ,

$$\int_{AA'D'D} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{BB'C'C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = -2F_{AA'} \vec{e}_1 \quad (5.25)$$


Regroupant enfin (5.23), (5.24) et (5.25), nous avons alors, compte tenu de (5.21),

$$F_{AA'} = \frac{1}{2}(p_A - p_{A'})H \quad (5.26)$$

et le lecteur ne manquera pas de comparer ce résultat à (4.141). Notons en effet que le théorème d'Euler nous a ici permis de déterminer la force de frottement par unité de largeur exercée par le volume fluide  $\mathcal{V}$  sur les parois  $x_2 = 0$  et  $x_2 = H$  sans avoir eu à exhiber l'expression du champ des vitesses en tout point de ce domaine.

### 5.1.3 Puissances virtuelles et énergie cinétique

#### 5.1.3.1 Théorème des puissances virtuelles

 [pap5131.html](#) Reconsidérons à présent le volume matériel fini  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  introduit dans la section 5.1.2.2 et occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  (figure 3.8 page 171), de frontière  $\mathcal{S}_t$  "suffisamment régulière".

Soit par ailleurs

$$H^1(\mathcal{V}_t) = \left\{ w : \overline{\mathcal{V}_t} \mapsto \mathbb{R}, \int_{\mathcal{V}_t} w^2 dv < +\infty, \int_{\mathcal{V}_t} (\partial_i w)^2 dv < +\infty, \forall i \in \{1, 2, 3\} \right\} \quad (5.27)$$

et soit  $\tilde{\mathbf{v}} \in (H^1(\mathcal{V}_t))^3$ . Un tel champ, de même nature que le champ des vitesses  $\mathbf{v}$  du volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  mais non nécessairement identique à celui-ci, est appelé **champ de vitesse virtuel**.

Intéressons-nous alors à la **puissance virtuelle**  $\tilde{\mathcal{P}}^e(\mathcal{V}_t)$  (i.e. dans le champ de vitesse virtuel  $\tilde{\mathbf{v}}$ ) des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$ . Ces actions mécaniques étant décrites par la restriction à  $\mathcal{V}_t$  du champ  $\mathbf{b} : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des actions à distance ainsi que par le champ  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} : \mathcal{S}_t \mapsto \mathbb{R}^3$  des vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_n$  sur la frontière  $\mathcal{S}_t$  de  $\mathcal{V}_t$ , il vient

$$\tilde{\mathcal{P}}^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dv + \int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} ds \quad (5.28)$$

Travaillons alors sur la seconde intégrale du membre de droite de cette égalité. Nous avons, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tout en tirant parti du théorème d'Ostrogradski,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} ds &= \int_{\mathcal{S}_t} \sigma_{ij} n_j \tilde{v}_i ds \\ &= \int_{\mathcal{S}_t} (\sigma_{ij} \tilde{v}_i) n_j ds \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} \partial_j (\sigma_{ij} \tilde{v}_i) dv \end{aligned} \quad (5.29)$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} ds = \int_{\mathcal{V}_t} \partial_j \sigma_{ij} \tilde{v}_i dv + \int_{\mathcal{V}_t} \sigma_{ij} \partial_j \tilde{v}_i dv \quad (5.30)$$

Remarquons par ailleurs que l'on a, de par la nature muette des indices  $i$  et  $j$  apparaissant dans l'intégrande de la seconde intégrale du membre de droite de cette égalité,

$$\sigma_{ij} \partial_j \tilde{v}_i = \sigma_{ji} \partial_i \tilde{v}_j \quad (5.31)$$

ce qui donne, en vertu de la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\sigma_{ij} \partial_j \tilde{v}_i = \sigma_{ij} \partial_i \tilde{v}_j \quad (5.32)$$

Combinons les deux membres de cette égalité. Il vient alors

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\partial_j\tilde{v}_i &= \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}(\partial_j\tilde{v}_i + \partial_i\tilde{v}_j)\right] \\ &= \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})\end{aligned}\quad (5.33)$$

et l'on a donc

$$\int_{\mathcal{S}_t}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\cdot\tilde{\mathbf{v}}\,ds = \int_{\mathcal{V}_t}\partial_j\sigma_{ij}\tilde{v}_i\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})\,dv\quad (5.34)$$

Reportant enfin cette dernière relation dans (5.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}^e(\mathcal{V}_t) &= \int_{\mathcal{V}_t}\rho b_i\tilde{v}_i\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\partial_j\sigma_{ij}\tilde{v}_i\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})\,dv \\ &= \int_{\mathcal{V}_t}\underbrace{(\partial_j\sigma_{ij} + \rho b_i)}_{=\rho\gamma_i}\tilde{v}_i\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})\,dv\end{aligned}\quad (5.35)$$

ce qui donne, compte tenu de (5.5),

$$\tilde{\mathcal{P}}^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t}\rho\gamma_i\tilde{v}_i\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{v}})\,dv\quad (5.36)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\tilde{\mathcal{P}}^e(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t}\rho\boldsymbol{\gamma}\cdot\tilde{\mathbf{v}}\,dv + \int_{\mathcal{V}_t}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}})\,dv\quad (5.37)$$

Reconsidérant alors (5.28), nous obtenons finalement le

**Théorème 12 (Puissances virtuelles)** *Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  un volume matériel fini occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\mathcal{S}_t$  "suffisamment régulière". Soit par ailleurs  $\tilde{\mathbf{v}} \in (H^1(\mathcal{V}_t))^3$  quelconque mais fixé, et soit  $\tilde{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}})$ . Alors,*

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t}\rho\mathbf{b}\cdot\tilde{\mathbf{v}}\,dv + \int_{\mathcal{S}_t}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\cdot\tilde{\mathbf{v}}\,ds}_{\substack{\text{puissance virtuelle} \\ \text{des actions mécaniques extérieures}}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t}\rho\boldsymbol{\gamma}\cdot\tilde{\mathbf{v}}\,dv}_{\substack{\text{puissance virtuelle} \\ \text{dynamique} \\ \text{( i.e. des quantités} \\ \text{d'accélération )}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t}\boldsymbol{\sigma}:\tilde{\mathbf{D}}\,dv}_{\text{puissance virtuelle des efforts intérieurs}}\quad (5.38)$$

### 5.1.3.2 Théorème de l'énergie cinétique

 [pap5132.html](#) Identifiant, dans le théorème 12, le champ de vitesse virtuel  $\tilde{\mathbf{v}}$  au champ réel  $\mathbf{v}$ , nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv \tag{5.39}$$

où  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathcal{V}_t \mapsto \mathbb{R}^3$  est le champ tensoriel (réel) des taux de déformation du volume matériel  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$ .

Reconsidérons à présent la relation (1.97) établie dans la section 1.5.1 du chapitre 1 (voir la remarque de la page 55) et exprimant l'identité entre la dérivée matérielle de l'énergie cinétique  $\mathcal{E}^c(\mathcal{V}_t)$  de  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$  et sa puissance dynamique  $\mathcal{P}^d(\mathcal{V}_t)$  (i.e. de ses quantités d'accélération) à cet instant

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \, dv = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} \, dv \tag{5.40}$$


et reportons cette relation dans (5.39). Nous établissons alors le

**Théorème 13 (Énergie cinétique)** *Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  un volume matériel fini occupant, dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  quelconque mais fixé, le domaine ouvert simplement connexe  $\mathcal{V}_t \subset \Omega_t$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\mathcal{S}_t$  "suffisamment régulière". Alors,*

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv}_{\text{actions à distance}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds}_{\text{actions de contact}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \, dv}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv}_{\text{puissance des efforts intérieurs}} \tag{5.41}$$

puissance des actions mécaniques extérieures
puissance dynamique

### 5.1.4 Théorème des travaux virtuels

 [pap514a.html](#) Nous nous limitons, dans cette section, aux transformations infinitésimales du milieu continu  $\mathcal{M}$  ainsi qu'aux problèmes d'équilibre, ou d'évolution monotone et quasistatique vers un état d'équilibre stable, de ce corps matériel. Conséquemment, le champ des accélérations  $\boldsymbol{\gamma}$  sera identiquement nul (équilibre), ou supposé négligeable (évolution quasistatique), et l'on aura donc  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ . Nous désignerons alors simplement par  $\Omega$  la configuration déformée de  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, par  $\Gamma$  sa frontière que l'on supposera suffisamment régulière pour qu'y soit défini presque partout le champ  $\mathbf{n} : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^3$  des normales sortantes, et par  $\Gamma_2$  la partie de  $\Gamma$  soumise à la densité surfacique de forces donnée  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  (actions mécaniques extérieures de contact), le complémentaire  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_2$  de  $\Gamma_2$  correspondant quant à lui à l'ensemble des points de la frontière en lesquels le déplacement  $\mathbf{u}$  est imposé (liaisons

cinématiques) et égal à  $\bar{\mathbf{u}} : \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ . Nous supposons enfin que  $\Gamma_1$  contient au moins trois points non alignés. Cette dernière hypothèse, dont l'objectif est d'empêcher tout mouvement arbitraire de corps rigide (translation-rotation), est en effet nécessaire à l'obtention d'un état d'équilibre stable du milieu continu  $\mathcal{M}$ , et l'on peut par ailleurs démontrer son caractère suffisant.

Soit à présent

$$L^2(\Omega) = \left\{ w : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}, \int_{\Omega} w^2 \, d\Omega < +\infty, \right\}, \quad M = (L^2(\Omega))_{\text{sym}}^9 \quad (5.42)$$

et soit

$$M_1 = \left\{ \check{\boldsymbol{\sigma}} \in M = (L^2(\Omega))_{\text{sym}}^9, \operatorname{div}_x \check{\boldsymbol{\sigma}} = -\rho \mathbf{b} \text{ dans } \Omega, \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g} \right\} \quad (5.43)$$


Les éléments  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  de l'espace fonctionnel  $M_1$  ont donc même nature que le champ des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  développé au sein du corps matériel  $\mathcal{M}$  en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures à distance  $\mathbf{b}$ , des actions mécaniques extérieures de contact données  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}$ , ainsi que des liaisons cinématiques  $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ . Ils satisfont notamment les équations indéfinies de l'équilibre  $\operatorname{div}_x \check{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$  ( $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ ) ainsi que les conditions aux limites en contraintes  $\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}$ , et sont pour cela dénommés **champs de contraintes statiquement admissibles (SA)**. Notons qu'enfin l'espace  $M_1$  des champs de contraintes statiquement admissibles est de dimension infinie. Autrement dit, il existe une infinité non dénombrable de champs de contraintes  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  vérifiant les équations indéfinies de l'équilibre ainsi que les conditions aux limites en contraintes (i.e. de champs compatibles avec les actions mécaniques extérieures données  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{g}$ ), infinité dont fait bien entendu partie le champ réel  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Soient par ailleurs

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega), \partial_i w \in L^2(\Omega) \forall i \in \{1, 2, 3\} \right\}, \quad V = (H^1(\Omega))^3 \quad (5.44)$$

et soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ . Un tel champ, de nature semblable au champ des déplacements  $\mathbf{u}$  du milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, mais non nécessairement identique à ce dernier, est appelé **champ de déplacement virtuel**.

Intéressons-nous enfin aux actions mécaniques extérieures s'exerçant sur  $\Omega$  à l'état d'équilibre final. Notons que ces dernières se décomposent en actions à distance  $\mathbf{b} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , en actions de contact données  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ , mais également en actions de contact  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} : \Gamma_1 \mapsto \mathbb{R}^3$  associées aux vecteurs contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur les facettes de normales sortantes  $\mathbf{n}$  aux points de  $\Gamma_1$ . Le déplacement en ces points étant imposé et connu ( $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ ), la densité surfacique de forces  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_1$  ne fait donc pas partie, contrairement à  $\mathbf{g}$ , des données du problème (chargement). On se propose alors ici d'établir le

**Théorème 14 (Travaux virtuels)**  [pap514b.html](#) Soit  $M_1$  l'espace fonctionnel des champs de contraintes statiquement admissibles défini par


$$M_1 = \{ \check{\boldsymbol{\sigma}} \in (L^2(\Omega))_{\text{sym}}^9, \operatorname{div}_x \check{\boldsymbol{\sigma}} = -\rho \mathbf{b} \text{ dans } \Omega, \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g} \} \quad (5.45)$$

Soient par ailleurs  $\check{\boldsymbol{\sigma}} \in M_1$  un champ de contraintes statiquement admissible et  $\tilde{\mathbf{u}} \in V = (H^1(\Omega))^3$  un champ de déplacement virtuel, tous deux quelconques mais fixés. Soit enfin  $\boldsymbol{\sigma} \in M_1$  le champ (réel) des contraintes de Cauchy développé au sein du corps matériel  $\mathcal{M}$  en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures à distance  $\mathbf{b}$ , des actions mécaniques extérieures de contact données  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}$  ainsi que des liaisons cinématiques  $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ , avec  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  la frontière de  $\Omega$  supposée "suffisamment régulière". Si l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite,

- 1)  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$
- 2)  $\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1}$

on a alors

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma}_{\text{travail virtuel des actions mécaniques extérieures}} = \underbrace{\int_{\Omega} \check{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega}_{\text{travail virtuel des efforts intérieurs SA } \check{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (5.46)$$

**Preuve**  [pap514c.html](#) Soit  $\tilde{\mathcal{T}}^e(\Omega)$  le **travail virtuel** (i.e. dans le champ de déplacement virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}$ ) des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le milieu continu  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final. Il vient alors, compte tenu des considérations précédentes,

$$\tilde{\mathcal{T}}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (5.47)$$

Si  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$ , on a

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = 0 \quad (5.48)$$

et si  $\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1}$ , il vient

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (5.49)$$

de sorte que l'on obtient, dans les deux cas,

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (5.50)$$

Le champ des contraintes  $\check{\sigma}$  étant statiquement admissible, nous avons également

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (5.51)$$

Reportant alors (5.50) et (5.51) dans (5.47), nous obtenons, puisque  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,

$$\tilde{\mathcal{T}}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (5.52)$$

Intéressons-nous à présent à la seconde intégrale du membre de droite de cette égalité. Comme dans la section 5.1.3.1, il vient, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  tout en tirant parti du théorème d'Ostrogradski,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \check{\sigma}_{ij} n_j \tilde{u}_i \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} (\check{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) n_j \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \partial_j (\check{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.53)$$

ce qui donne

$$\int_{\Gamma} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \partial_j \check{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{u}_i \, d\Omega \quad (5.54)$$

De la nature muette des indices  $i$  et  $j$  apparaissant dans l'intégrande de la seconde intégrale du membre de droite de cette égalité, on tire

$$\check{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{u}_i = \check{\sigma}_{ji} \partial_i \tilde{u}_j \quad (5.55)$$

ce qui donne, compte tenu de la symétrie de  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ ,

$$\check{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{u}_i = \check{\sigma}_{ij} \partial_i \tilde{u}_j \quad (5.56)$$

c'est-à-dire, après combinaison des deux membres de cette égalité,

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{u}_i &= \check{\sigma}_{ij} \left[ \frac{1}{2} (\partial_j \tilde{u}_i + \partial_i \tilde{u}_j) \right] \\ &= \check{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

et l'on a donc finalement

$$\int_{\Gamma} (\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \partial_j \check{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (5.58)$$

Reportant cette égalité dans (5.52), nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\tilde{T}^e(\Omega) &= \int_{\Omega} \rho b_i \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \partial_j \check{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{(\partial_j \check{\sigma}_{ij} + \rho b_i)}_{=0} \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega\end{aligned}\quad (5.59)$$

Le champ  $\check{\sigma}$  étant statiquement admissible, il reste simplement

$$\tilde{T}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (5.60)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\tilde{T}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \check{\sigma} : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (5.61)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 14.  $\square$

Du théorème 14, on déduit aisément le

**Corollaire 4** Soit  $V_0 = \{\tilde{\mathbf{u}} \in V = (H^1(\Omega))^3, \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}\}$  et soient  $\tilde{\mathbf{u}} \in V_0$  et  $\check{\sigma} \in M_1$ , avec  $M_1$  défini par (5.45), quelconques mais fixés. Alors,

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma}_{\text{travail virtuel des actions mécaniques extérieures}} = \int_{\Omega} \check{\sigma} : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (5.62)$$

travail virtuel des efforts intérieurs SA  $\check{\sigma}$

Choisissant d'autre part comme champ de contraintes statiquement admissible le champ réel  $\sigma$ , de ce même théorème, on tire le

**Corollaire 5** Soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in V = (H^1(\Omega))^3$  quelconque mais fixé. On a

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma}_{\text{travail virtuel des actions mécaniques extérieures}} = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (5.63)$$

travail virtuel des efforts intérieurs



Enfin, combinant les corollaires 4 et 5, nous obtenons le

**Corollaire 6** Soit  $V_0 = \{\tilde{\mathbf{u}} \in V = (H^1(\Omega))^3, \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}\}$  et soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in V_0$  quelconque mais fixé. Alors,


$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega}_{\text{actions à distance}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma}_{\text{actions de contact données}} = \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega}_{\text{travail virtuel des efforts intérieurs}} \quad (5.64)$$

travail virtuel des actions mécaniques extérieures

**Remarque** Le théorème 14 ainsi que les corollaires (4), (5) et (6), établis relativement à la configuration déformée  $\Omega$  de  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, restent applicables aux configurations successives (ou configurations intermédiaires) de ce corps matériel dans le cas d'un processus d'évolution monotone et quasistatique ( $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ ) depuis l'état initial non déformé jusqu'à cet équilibre. Il suffit pour cela de substituer à  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  les valeurs prises par ces champs à un instant quelconque mais fixé du processus d'évolution, tout en exprimant les différentes intégrales relativement à la configuration intermédiaire choisie. Signalons par ailleurs que sont loin d'être rares les situations réelles (ouvrages en conditions normales de service par exemple) où les configurations successives de  $\mathcal{M}$  peuvent être identifiées, c'est-à-dire où l'on peut assimiler la configuration déformée  $\Omega$  à l'état d'équilibre final à la configuration initiale (i.e. non déformée)  $\Omega_0$  : la transformation infinitésimale du milieu continu  $\mathcal{M}$  n'engendre alors que de petits déplacements.

## 5.2 Application aux fluides

### 5.2.1 Hydrostatique

 [pap521.html](#) Au sein d'un fluide au repos, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  au point matériel  $P$  est isotrope et l'on a donc

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} \quad (5.65)$$

où  $p$  désigne la pression hydrostatique en ce point. On a alors, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} &= \partial_j (-p \delta_{ij}) \\ &= -\partial_j p \delta_{ij} \\ &= -\partial_i p \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Reportant ensuite ce résultat dans les équations indéfinies eulériennes de l'équilibre ( $\gamma = 0$ ) données par

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho b_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.67)$$

nous obtenons finalement

$$\partial_i p = \rho b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.68)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{grad}_x p = \rho \mathbf{b} \quad (5.69)$$

Si les actions mécaniques extérieures à distance se réduisent au champ de forces gravifiques  $\mathbf{b} = -g\vec{e}_2$ , où  $\vec{e}_2$  est dirigé suivant la verticale ascendante et  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur, il vient


$$\mathbf{grad}_x p = -\rho g \vec{e}_2 \quad (5.70)$$

et l'on en déduit alors

$$p = p_0 - \rho g x_2 \quad (5.71)$$

où  $p_0$  représente la pression à l'altitude  $x_2 = 0$ .

## 5.2.2 Fluide parfait en mouvement — Théorème de Bernoulli

 [pap522.html](#) Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  au point matériel  $P$  d'un fluide parfait (i.e. non visqueux) est toujours isotrope. En mouvement comme à l'équilibre, on a donc

$$\sigma = -p \delta \quad (5.72)$$

où  $p$  est la pression au point matériel et à l'instant considérés. Comme dans la section 5.2.1, on a alors, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\partial_j \sigma_{ij} = -\partial_i p \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.73)$$


Reportant ces relations dans l'expression (5.5) des équations indéfinies eulériennes du mouvement, nous obtenons ensuite

$$\partial_i p = \rho(b_i - \gamma_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.74)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{grad}_x p = \rho(\mathbf{b} - \gamma) \quad (5.75)$$

Établissons alors le

**Théorème 15 (Bernoulli)**  [theo15p.html](#) Soit l'écoulement permanent ( $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ) d'un fluide parfait au comportement régi par le modèle barotrope ( $\rho = h(p)$ ) et soumis aux actions mécaniques extérieures à distance  $\mathbf{b}$  dérivant du potentiel  $U$  ( $\mathbf{b} = -\mathbf{grad}_x U$ ). Soit par ailleurs (LC) une ligne de courant quelconque mais fixée. Alors,

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U = K_{(\text{LC})} \quad \forall \vec{x} \in (\text{LC}) \quad (5.76)$$

où  $K_{(\text{LC})}$  est une constante dépendant uniquement de (LC).

Si l'écoulement est de plus irrotationnel ( $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), les différentes constantes  $K_{(\text{LC})}$  s'identifient à une unique valeur  $K$ , de sorte que l'on a

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U = K \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t \quad (5.77)$$

**Preuve**  [demth15p.html](#) Le fluide étant parfait, de (5.75), on tire tout d'abord

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}_x p - \mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (5.78)$$

ce qui donne, puisque  $\mathbf{b} = -\mathbf{grad}_x U$  et en tirant parti de l'expression (1.49) de l'accélération en variables d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}_x p + \mathbf{grad}_x U + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (5.79)$$

L'écoulement étant permanent, il reste alors

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}_x p + \mathbf{grad}_x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U \right] + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (5.80)$$

Le comportement du fluide obéissant par ailleurs au modèle barotrope, on a  $\rho = h(p)$ , de sorte qu'il vient, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \int \frac{dp}{h(p)} \right] \\ &= \frac{d}{dp} \left[ \int \frac{dp}{h(p)} \right] \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{h(p)} \partial_i p \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_i p \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.81)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$\mathbf{grad}_x \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}_x p \quad (5.82)$$

Reportant ce résultat dans (5.80), nous obtenons donc

$$\mathbf{grad}_x \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U \right] + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t \quad (5.83)$$

Soit alors (LC) une ligne de courant quelconque mais fixée, et soit  $\vec{dx}$  un vecteur matériel élémentaire de (LC). Multiplions scalairement (5.83) par  $\vec{dx}$ . Il vient, puisque  $\vec{dx} = \mathbf{v} dt$  (dans un écoulement permanent, trajectoires et lignes de courant sont confondues),

$$d \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U \right] + (\mathbf{v} dt | \mathbf{rot}_x \mathbf{v} | \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in (\text{LC}) \quad (5.84)$$

Le produit mixte  $(\mathbf{v} dt | \mathbf{rot}_x \mathbf{v} | \mathbf{v})$  étant nul, il reste finalement

$$d \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U \right] = 0 \quad \forall \vec{x} \in (\text{LC}) \quad (5.85)$$

ce qui donne bien

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U = K_{(\text{LC})} \quad \forall \vec{x} \in (\text{LC}) \quad (5.86)$$

où  $K_{(\text{LC})}$  est une constante dépendant uniquement de (LC).

Enfin, si l'écoulement est irrotationnel ( $\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), de (5.83), on tire


$$\mathbf{grad}_x \left[ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U \right] = \mathbf{0} \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t \quad (5.87)$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U = K \quad \forall \vec{x} \in \Omega_t \quad (5.88)$$

où  $K$  est une constante. □

### 5.2.3 Fluide visqueux newtonien - Équations de Navier-Stokes

 [pap523.html](#) Effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , nous rappelons tout d'abord les équations de comportement (4.131) du fluide visqueux newtonien établies dans le chapitre 4, section 4.4.1.

$$\sigma_{ij} = (-p + \xi \partial_k v_k) \delta_{ij} + 2\eta D_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (5.89)$$

On a alors, compte tenu de l'expression (2.120) des composantes du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation relativement à ce repère,

$$\sigma_{ij} = (-p + \xi \partial_k v_k) \delta_{ij} + \eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (5.90)$$

Dans toute cette section, nous ne considérerons que des fluides visqueux newtoniens homogènes. Les viscosités dynamiques de volume  $\xi$  et de cisaillement  $\eta$  sont alors deux constantes indépendantes du point matériel, c'est-à-dire des variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , si bien que l'on a, compte tenu de (5.90),

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} &= \partial_j [(-p + \xi \partial_k v_k) \delta_{ij} + \eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j)] \\ &= \partial_j (-p + \xi \partial_k v_k) \delta_{ij} + \eta \partial_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \\ &= \partial_i (-p + \xi \partial_k v_k) + \eta (\partial_{jj}^2 v_i + \partial_{ji}^2 v_j) \\ &= -\partial_i p + \xi \partial_i (\partial_k v_k) + \eta \partial_{jj}^2 v_i + \eta \partial_{ij}^2 v_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.91)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} &= -\partial_i p + \xi \partial_i (\partial_k v_k) + \eta \partial_{jj}^2 v_i + \eta \partial_i (\partial_j v_j) \\ &= -\partial_i p + (\xi + \eta) \partial_i (\partial_k v_k) + \eta \partial_{jj}^2 v_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Reportons cette dernière relation dans l'expression (5.5) des équations indéfinies eulériennes du mouvement. Il vient

$$-\partial_i p + (\xi + \eta) \partial_i (\partial_k v_k) + \eta \partial_{jj}^2 v_i + \rho b_i = \rho \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.93)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$-\mathbf{grad}_x p + (\xi + \eta) \mathbf{grad}_x (\operatorname{div}_x \mathbf{v}) + \eta \Delta_x \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (5.94)$$

Tirant enfin parti de l'expression (1.49) de l'accélération en variables d'Euler, nous obtenons les **équations de Navier-Stokes**

$$\begin{aligned} &-\mathbf{grad}_x p + (\xi + \eta) \mathbf{grad}_x (\operatorname{div}_x \mathbf{v}) + \eta \Delta_x \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \\ &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (5.95)$$

que l'on peut encore écrire, puisque  $\Delta_x = \mathbf{grad}_x \operatorname{div}_x - \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x$  (voir l'annexe B, section B.2.2 page 402),

$$\begin{aligned} &-\mathbf{grad}_x p + (\xi + 2\eta) \mathbf{grad}_x (\operatorname{div}_x \mathbf{v}) - \eta \mathbf{rot}_x (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} \\ &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (5.96)$$

## Remarques

1. Le lecteur saura garder présent à l'esprit que les équations de Navier-Stokes (5.95) ou (5.96) ne valent que pour un fluide visqueux newtonien **homogène**.
2. Lorsqu'un fluide visqueux newtonien homogène est de plus incompressible, on a alors  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ , de sorte que les équations (5.95) et (5.96) s'écrivent

$$-\mathbf{grad}_x p + \eta \Delta_x \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \quad (5.97)$$


ainsi que

$$-\mathbf{grad}_x p - \eta \mathbf{rot}_x (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \quad (5.98)$$

## 5.3 Application aux solides élastiques linéaires isotropes

Dans toute cette section, nous nous limitons aux transformations infinitésimales de solides continus  $\mathcal{M}$  ayant un comportement élastique linéaire isotrope (loi de Hooke).

### 5.3.1 Équations de Lamé-Navier

 [pap531a.html](#) Ainsi que le lecteur s'en rendra aisément compte, les considérations développées dans cette section se fondent sur une démarche analogue à celle de la section 5.2.3 relative aux équations de Navier-Stokes des fluides visqueux newtoniens et homogènes.

Reconsidérons tout d'abord les relations de comportement (4.41) du solide élastique linéaire isotrope exhibées dans le chapitre 4, section 4.2.2. On a, relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (5.99)$$

c'est-à-dire, en tirant parti de l'expression (2.166) des composantes du tenseur linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$  des petites déformations relativement à ce repère,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad (5.100)$$

Le solide continu  $\mathcal{M}$  étant ici supposé homogène, les modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont indépendants des variables d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , de sorte qu'il vient

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} &= \partial_j [\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)] \\ &= \lambda \partial_j (\varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + \mu \partial_{jj}^2 u_i + \mu \partial_{ji}^2 u_j \\ &= \lambda \partial_i (\varepsilon_{kk}) + \mu \partial_{jj}^2 u_i + \mu \partial_i (\partial_j u_j) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (5.101)$$

ce qui donne, puisque  $\varepsilon_{kk} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_x \mathbf{u} = \partial_j u_j$ ,

$$\partial_j \sigma_{ij} = (\lambda + \mu) \partial_i (\partial_k u_k) + \mu \partial_{jj}^2 u_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.102)$$

Reportant cette relation dans l'expression (5.5) des équations indéfinies eulériennes du mouvement, nous avons

$$(\lambda + \mu) \partial_i (\partial_k u_k) + \mu \partial_{jj}^2 u_i + \rho b_i = \rho \gamma_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.103)$$

c'est-à-dire la relation intrinsèque

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad}_x (\text{div}_x \mathbf{u}) + \mu \Delta_x \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (5.104)$$


Tirant alors parti de l'expression lagrangienne (1.41) de l'accélération (dans le cas de transformations infinitésimales, points de vue lagrangien et eulérien coïncident), nous obtenons finalement les **équations de Lamé-Navier**

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad}_x (\text{div}_x \mathbf{u}) + \mu \Delta_x \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.105)$$

que l'on peut aussi écrire, en vertu de  $\Delta_x = \mathbf{grad}_x \text{div}_x - \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x$ ,

$$(\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}_x (\text{div}_x \mathbf{u}) - \mu \mathbf{rot}_x (\mathbf{rot}_x \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.106)$$

## Remarques


1. De même que les équations de Navier-Stokes, les équations de Lamé-Navier (5.105) ou (5.106) ne valent que pour un solide élastique linéaire isotrope et **homogène**.
2.  [pap531b.html](#) Lorsque le solide élastique linéaire isotrope et homogène est de plus incompressible ( $\nu = \frac{1}{2}$ ), on a  $\text{div}_x \mathbf{u} = 0$  tandis que le module de Lamé  $\lambda$  n'est plus défini. Le terme  $\lambda \text{div}_x \mathbf{u}$  est dans ce cas une forme indéterminée égale à la contrainte moyenne  $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$  qui devient alors une inconnue à part entière (voir la remarque 3 de la section 4.2.3 page 229), si bien que les équations (5.105) et (5.106) se trouvent remplacées par

$$\mathbf{grad}_x \sigma_m + \mu \Delta_x \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.107)$$

ainsi que

$$\mathbf{grad}_x \sigma_m - \mu \mathbf{rot}_x (\mathbf{rot}_x \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.108)$$

### 5.3.2 Énergie de déformation d'un solide élastique

 [pap532.html](#) Les transformations du solide élastique linéaire isotrope  $\mathcal{M}$  étant infinitésimales, nous nous limitons par ailleurs, dans cette section ainsi que dans la suivante, aux problèmes d'évolution monotone et quasistatique de ce corps matériel vers un état d'équilibre stable. Nous supposons de plus ici que les configurations successives de  $\mathcal{M}$  durant ce processus d'évolution peuvent être identifiées, c'est-à-dire qu'il est possible d'assimiler la configuration déformée  $\Omega$  de ce corps matériel dans l'état d'équilibre final à sa configuration initiale (i.e. non déformée)  $\Omega_0$ . Autrement dit, nous admettrons que les transformations infinitésimales de  $\mathcal{M}$  n'engendrent que de petits déplacements.

Comme dans la section 5.1.4, nous désignerons par  $\Gamma_1$  la partie de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  où le déplacement  $\mathbf{u}$  est imposé (liaisons cinématiques) et égal à  $\bar{\mathbf{u}}$ , et par  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$  celle où le vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est connu et égal à  $\mathbf{g}$  (actions de contact données). Considérons alors un instant  $t$  quelconque mais fixé du processus d'évolution monotone et quasistatique du milieu continu  $\mathcal{M}$  vers son état d'équilibre final, et intéressons nous à l'accroissement  $d\mathcal{T}^e(\Omega)$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , du travail (réel)  $\mathcal{T}^e(\Omega)$  des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ce corps matériel et à cet instant. Ces dernières se décomposent en actions à distance  $\mathbf{b} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , en actions de contact données  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  ainsi qu'en actions de contact  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} : \Gamma_1 \mapsto \mathbb{R}^3$  non prescrites et associées aux vecteurs contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur les facettes de normales sortantes  $\mathbf{n}$  aux points de  $\Gamma_1$ , il vient

$$\boxed{d\mathcal{T}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot d\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{u} \, d\Gamma} \quad (5.109)$$

où les valeurs des champs  $\rho$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont celles relatives à l'instant  $t$  considéré, et où  $d\mathbf{u}$  représente l'accroissement du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  entre  $t$  et  $t + dt$ . Appliquons alors le théorème des travaux virtuels 14, et plus précisément le corollaire 5, en prenant comme champ de contraintes statiquement admissible  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  le champ des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'instant actuel  $t$ , et pour champ de déplacement virtuel  $\tilde{\mathbf{u}}$  l'accroissement  $d\mathbf{u}$  du déplacement à cet instant. Nous obtenons, compte tenu de (5.109),

$$d\mathcal{T}^e(\Omega) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(d\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (5.110)$$

L'opérateur différentiel  $\boldsymbol{\varepsilon}$  étant linéaire, on a par ailleurs

$$\boldsymbol{\varepsilon}(d\mathbf{u}) = d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (5.111)$$



Pour un matériau élastique linéaire isotrope,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont liés par la loi de Hooke (4.26) ou (4.42), de sorte qu'il vient, en effectuant les développements relativement au repère ortho-normé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (5.99) et (5.111),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(d\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ &= (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij} \\ &= \lambda \varepsilon_{kk} d\varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (5.112)$$

ce qui donne, en amenant la dilatation volumique  $\theta = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(d\mathbf{u}) &= \lambda \theta d\theta + 2\mu \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ &= d \left[ \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) \right] \\ &= d \left[ \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \end{aligned} \quad (5.113)$$

Reconsidérons alors l'énergie locale de déformation élastique  $w$  introduite dans la section 4.2.3 et définie par

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.114)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  liés par (4.26) ou (4.42). Il vient, en effectuant les développements relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (5.99),

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{kk} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) \end{aligned} \quad (5.115)$$

c'est-à-dire

$$w = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}] \quad (5.116)$$

et nous avons donc, après comparaison de (5.113) et (5.116),

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(d\mathbf{u}) = dw \quad (5.117)$$

avec  $w$  défini par (5.116). Reportant ce résultat dans (5.110), nous obtenons,

$$d\mathcal{T}^e(\Omega) = \int_{\Omega} dw \, d\Omega = d \int_{\Omega} w \, d\Omega \quad (5.118)$$

Introduisons alors l'énergie de déformation  $\mathcal{E}^d(\Omega)$  du solide élastique  $\mathcal{M}$  définie par

$$\mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} w \, d\Omega \quad (5.119)$$

avec  $w$  défini par (5.116). De (5.118) et (5.119), on déduit, à un quelconque instant du processus d'évolution du milieu continu élastique  $\mathcal{M}$  et notamment à l'état d'équilibre final,

$$d\mathcal{T}^e(\Omega) = d\mathcal{E}^d(\Omega) \quad (5.120)$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) \quad (5.121)$$

et l'on a donc, compte tenu de (5.116) et (5.119),

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}] \, d\Omega \quad (5.122)$$

### Remarques

1. On a, en effectuant les développements relativement au repère  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (4.27) et (5.114),

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{-\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\nu}{E} \sigma_{kk} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.123)$$

ce qui donne, en introduisant la contrainte moyenne  $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ ,

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\nu}{E} \sigma_{kk} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\nu}{E} (3\sigma_m)^2 + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right] \end{aligned} \quad (5.124)$$

c'est-à-dire

$$w = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\nu}{E} (3\sigma_m)^2 + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (5.125)$$

et l'on a alors, compte tenu de (5.119) et (5.121),

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \frac{-\nu}{E} (3\sigma_m)^2 + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \right] \, d\Omega \quad (5.126)$$


2. On a également, compte tenu des expressions (4.61) et (4.73) de l'énergie locale de déformation élastique  $w$  ainsi que de (5.119) et (5.121),

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [K\theta^2 + 2G\|\mathbf{e}\|^2] \, d\Omega \quad (5.127)$$

ainsi que

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_m^2}{K} + \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2G} \right] \, d\Omega \quad (5.128)$$

### 5.3.3 Théorème de l'énergie potentielle

 [pap533a.html](#) Considérons ici, comme dans la section 5.3.2, un solide élastique linéaire isotrope  $\mathcal{M}$  subissant une transformation infinitésimale et évoluant de façon monotone et quasi-statique vers un état d'équilibre stable sous l'action des actions mécaniques extérieures à distance  $\mathbf{b} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , des actions extérieures de contact données  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  ainsi que des liaisons cinématiques  $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ , où  $\Omega$  désigne la configuration déformée de  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, de frontière  $\Gamma$  “suffisamment régulière”, et où  $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  est une partition de  $\Gamma$  telle que  $\Gamma_1$  possède au moins trois points non alignés (conditions aux limites essentielles).

Soit  $V = (H^1(\Omega))^3$  avec  $H^1(\Omega)$  donné par (5.44), et soient  $V_0$  et  $V_1$  les espaces fonctionnels définis par

$$\begin{cases} V_0 &= \{ \mathbf{w} \in V = (H^1(\Omega))^3, \mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \} \\ V_1 &= \{ \mathbf{w} \in V = (H^1(\Omega))^3, \mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}} \} \end{cases} \quad (5.129)$$

Le lecteur aura noté au passage que si  $V_0$  est bien un sous-espace vectoriel de  $V$ , il n'en est pas de même pour  $V_1$  dès lors que  $\bar{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ . Les éléments  $\mathbf{w}$  de cet espace affine parallèle à  $V_0$ , de même nature que le champ  $\mathbf{u}$  des déplacements du milieu continu  $\mathcal{M}$  et satisfaisant par ailleurs aux conditions aux limites en déplacements  $\mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ , sont appelés pour cela **champs de déplacement cinématiquement admissibles (CA)**.

Soit à présent  $\mathbf{w}$  un élément de  $V = (H^1(\Omega))^3$  quelconque mais fixé, et soit  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})$  le champ de contraintes associé à  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$  par la loi de Hooke (4.42). Autrement dit, on a

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \quad (5.130)$$

Soit par ailleurs  $\mathcal{J}$  la forme quadratique définie sur  $V$  par

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.131)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  les vecteurs contraintes (réels) sur les facettes de normales sortantes  $\mathbf{n}$  aux points de  $\Gamma_1$  et à l'état d'équilibre final.

Soit enfin  $\mathbf{u} \in V_1$  le champ des déplacements du solide élastique  $\mathcal{M}$  à ce même état d'équilibre final. Nous nous proposons ici de montrer que ce champ  $\mathbf{u}$  rend minimale, sur l'espace fonctionnel  $V_1$ , la forme quadratique  $\mathcal{J}$  définie par (5.131). C'est le

**Théorème 16 (Énergie potentielle)** *Soit  $V_1 = \{\mathbf{w} \in V = (H^1(\Omega))^3, \mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}\}$  l'espace fonctionnel des champs de déplacement cinématiquement admissibles, avec  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  et possédant au moins trois points non alignés. Soient par ailleurs  $\mathbf{u} \in V_1$  le champ des déplacements du solide élastique  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, et  $\mathcal{J}$  la forme quadratique définie sur  $V = (H^1(\Omega))^3$  par*


$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.132)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})$  donné par (5.130) et  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  les vecteurs contraintes (réels) sur les facettes de normales sortantes  $\mathbf{n}$  aux points de  $\Gamma_1$  et à ce même état d'équilibre final. Le champ  $\mathbf{u}$  est alors, sur l'espace fonctionnel  $V_1$  des champs de déplacement cinématiquement admissibles, un minimum global strict de  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) < \mathcal{J}(\mathbf{u}') \quad \forall \mathbf{u}' \in V_1, \mathbf{u}' \neq \mathbf{u} \quad (5.133)$$

En particulier, si  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  et si les actions mécaniques extérieures données  $\mathbf{b} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$  sont indépendantes de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  n'est alors autre que l'énergie potentielle  $\mathcal{E}^p(\Omega)$  du corps matériel déformé  $\mathcal{M}$  en équilibre

$$\mathcal{E}^p(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (5.134)$$

**Preuve**  [pap533b.html](#) Soit tout d'abord  $V = (H^1(\Omega))^3$  et soit  $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$  la forme définie par

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad \forall (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in V \times V \quad (5.135)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})$  donné par (5.130). L'opérateur différentiel  $\boldsymbol{\varepsilon}$  défini par (5.1) étant linéaire et la relation entre ce dernier et l'opérateur  $\boldsymbol{\sigma}$  défini par (5.130) l'étant également,  $a$  est bilinéaire. Cette forme bilinéaire est de plus symétrique puisque l'on a, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé fixe  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et compte tenu de (5.130),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) &= \sigma_{ij}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= [\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{w})] \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5.136)$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (5.137)$$

ce qui donne bien

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \quad \forall (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in V \times V \quad (5.138)$$

et donc, compte tenu de (5.135),

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in V \times V \quad (5.139)$$

Enfin, l'énergie locale de déformation élastique  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$  étant strictement positive dès que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$  (chapitre 4 section 4.2.3),  $a$  est aussi positive, sa restriction à  $V_0 \times V_0$  avec  $V_0$  donné par (5.129) étant par ailleurs définie positive puisque  $\Gamma_1$  possède au moins trois points non alignés. En effet,  $a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$  implique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$  presque partout sur  $\Omega$  en vertu de la stricte positivité de l'énergie locale de déformation élastique, et le champ  $\mathbf{w}$  est alors un déplacement de corps rigide (translation-rotation). Ce champ appartenant à  $V_0$ , il vérifie par ailleurs  $\mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$  et ne peut donc qu'être nul dès lors que  $\Gamma_1$  contient au moins trois points non alignés.

Soit d'autre part  $l : V \mapsto \mathbb{R}$  la forme linéaire définie sur  $V$  par

$$l(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.140)$$

Il vient alors, compte tenu de (5.132) et (5.135),

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.141)$$

Soit à présent  $\mathbf{u} \in V_1$  le champ des déplacements du solide élastique  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final, et soit  $\mathbf{u}' \in V_1$ ,  $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}$ , quelconque mais fixé. Posant  $\mathbf{w} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$ , nous avons donc  $\mathbf{w} \in V_0 - \{\mathbf{0}\}$  et il vient, en tirant parti du caractère bilinéaire et symétrique de  $a$  ainsi que de la linéarité de  $l$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}') &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u}', \mathbf{u}') - l(\mathbf{u}') \\ &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) - l(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{u}) - l(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (5.142)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (5.141),

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}') = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{w}) \quad (5.143)$$

Utilisons enfin le théorème des travaux virtuels 14 après avoir posé  $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  et  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ , c'est-à-dire mettons en fait en œuvre le corollaire 6 avec  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ . Il vient, puisque  $\mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$ ,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad (5.144)$$

ce qui donne, compte tenu de (5.135) et (5.140) et en exploitant à nouveau le fait que  $\mathbf{w} \in V_0$ ,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad (5.145)$$

Reportant ce résultat dans (5.143), nous obtenons alors

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}') = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \quad (5.146)$$

La restriction de  $a$  à  $V_0 \times V_0$  étant par ailleurs définie positive, nous avons

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}') > \mathcal{J}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}' \in V_1, \mathbf{u}' \neq \mathbf{u} \quad (5.147)$$

et  $\mathbf{u}$  est bien, sur l'espace fonctionnel  $V_1$  des champs de déplacement cinématiquement admissibles, un minimum global strict de la forme quadratique  $\mathcal{J}$  définie par (5.132).  $\square$

### Remarques

1. On a, puisque  $\mathbf{w} \in V_1 \Rightarrow \mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}$ ,

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V_1 \quad (5.148)$$

ce qui montre que le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  du solide élastique  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final est également, sur l'espace fonctionnel  $V_1$  des champs de déplacement cinématiquement admissibles, un minimum global strict de la forme quadratique  $\mathcal{J}'$  définie par

$$\mathcal{J}'(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.149)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})$  donné par (5.130)

2. La relation (5.145) étant vraie  $\forall \mathbf{w} \in V_0$ , le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  du solide élastique  $\mathcal{M}$  à l'état d'équilibre final est aussi solution, compte tenu de (5.135), (5.137) et (5.140) et puisque  $\mathbf{w} \in V_0 \Rightarrow \mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$ , du problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_1 \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in V_0 \text{ l'on ait :} \\ \int_{\Omega} [\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})] \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \end{array} \right. \quad (5.150)$$

### 5.3.4 Application

Intéressons-nous ici à l'essai de compression oedométrique, représenté sur la figure 5.2, d'un matériau élastique linéaire isotrope pesant et homogène, de masse volumique  $\rho$  et de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Cherchons tout d'abord à exhiber la solution de ce problème (déplacements, déformations, contraintes) relativement au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $Oz$  (figure 5.2). Les conditions de l'expérience étant supposées idéales (absence de frottements entre le matériau et les parois de l'oedomètre) et la densité surfacique de forces  $-q\vec{e}_z$  appliquée en tête de l'échantillon étant uniforme, le champ des déplacements est de la forme

$$\mathbf{u} = u(z)\vec{e}_z \quad (5.151)$$

La matrice représentative du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  relativement au repère orthonormé direct local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  a donc pour expression

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u'(z) \end{bmatrix} \quad (5.152)$$

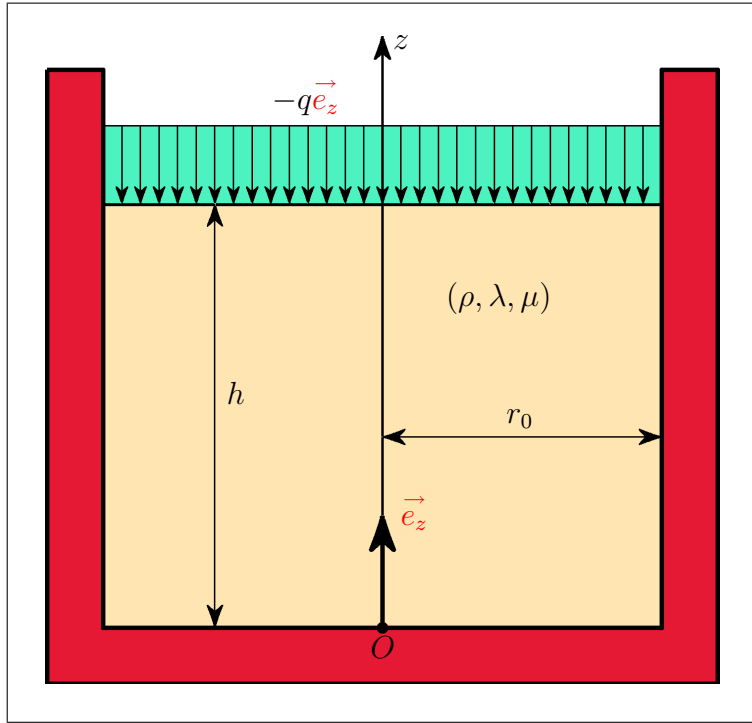


FIG. 5.2 – Essai de compression œdométrique

et celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  s'écrit

$$\sigma = u'(z) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \quad (5.153)$$

Les équations indéfinies eulériennes de l'équilibre ( $\gamma = \mathbf{0}$ ) associées aux directions de  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont alors trivialement vérifiées, tandis que celle relative à  $\vec{e}_z$  donne

$$(\lambda + 2\mu)u''(z) - \rho g = 0 \quad (5.154)$$

où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur. Il vient alors

$$u(z) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} z^2 + Az + B \quad (5.155)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  étant ensuite déterminées par les conditions aux limites en déplacements

$$u(0) = 0 \quad (5.156)$$

ainsi qu'en contraintes

$$\sigma_{zz}(z = h) = (\lambda + 2\mu)u'(h) = -q \quad (5.157)$$



on obtient finalement

$$u(z) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{1}{2} \rho g z^2 - (q + \rho g h) z \right] \quad \forall z \in [0, h] \quad (5.158)$$

et l'on a alors, compte tenu de (5.152) et (5.153),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{-1}{\lambda + 2\mu} [q + \rho g(h - z)] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall z \in [0, h] \quad (5.159)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\sigma} = -[q + \rho g(h - z)] \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall z \in [0, h] \quad (5.160)$$

Tentons à présent d'exhiber, ou tout au moins d'approcher, la solution de ce même problème grâce au théorème de l'énergie potentielle 16. Les champs de déplacement cinématiquement admissibles  $\mathbf{w}$  adoptant ici la forme  $\mathbf{w} = w(z)\vec{e}_z$  avec  $w(0) = 0$ , le déplacement  $\mathbf{u}$  solution de notre problème est donc, compte tenu de la remarque 1 page 309, de (5.152) et (5.153) ainsi que des notations de la figure 5.2, un minimum global strict de la forme quadratique

$$\mathcal{J}'(\mathbf{w}) = \Pi r_0^2 \int_0^h \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) w'(z) w'(z) dz - \Pi r_0^2 \int_0^h -\rho g w(z) dz - \Pi r_0^2 [-q w(h)] \quad (5.161)$$

c'est-à-dire, en tirant parti de l'homogénéité du matériau, de la fonction  $f$  définie par

$$f(w) = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \int_0^h w'^2(z) dz + \rho g \int_0^h w(z) dz + q w(h) \quad (5.162)$$

$$\forall w : [0, h] \mapsto \mathbb{R}, w(0) = 0$$

Choisissons tout d'abord  $w(z) = az$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Il vient, en posant  $g(a) = f(w)$ ,

$$g(a) = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) a^2 h + \rho g a \frac{h^2}{2} + q a h \quad (5.163)$$

Le minimum global strict de  $g$  étant atteint pour la valeur  $a_0$  de  $a$  annulant sa dérivée première, c'est-à-dire pour

$$a_0 = -\frac{\frac{1}{2} \rho g h + q}{\lambda + 2\mu} \quad (5.164)$$

nous obtenons la solution approchée

$$u^{(1)}(z) = -\frac{q + \frac{1}{2} \rho g h}{\lambda + 2\mu} z \quad \forall z \in [0, h] \quad (5.165)$$

Cette approximation linéaire ne peut bien entendu coïncider avec la solution exacte (5.158), puisque cette dernière est un polynôme de degré deux en  $z$ . On a toutefois  $u^{(1)}(0) = u(0)$ , ce qui ne peut surprendre dans la mesure où  $u^{(1)}$  est la composante sur  $\vec{e}_z$  d'un champ de déplacement cinématiquement admissible, mais on a également  $u^{(1)}(h) = u(h)$ , ce que ne pouvait par ailleurs que difficilement laisser prédire l'intuition.

Prenons à présent  $w(z) = az + bz^2$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . La solution exacte (5.158) appartenant cette fois à l'espace d'approximation choisi, nous ne pouvons que logiquement la retrouver en minimisant la fonction  $f$  définie par (5.162). Posant  $g(a, b) = f(w)$ , nous obtenons

$$g(a, b) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \left( a^2 h + 2ab h^2 + \frac{4}{3} b^2 h^3 \right) + \rho g \left( a \frac{h^2}{2} + b \frac{h^3}{3} \right) + q (ah + bh^2) \quad (5.166)$$

Le minimum global strict de  $g$  étant atteint pour les valeurs  $a_0$  et  $b_0$  de  $a$  et  $b$  telles que

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial g}{\partial b}(a_0, b_0) = 0 \quad (5.167)$$

il vient

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)(a_0 h + b_0 h^2) &= -qh - \frac{1}{2}\rho g h^2 \\ (\lambda + 2\mu)(a_0 h^2 + \frac{4}{3}b_0 h^3) &= -qh^2 - \frac{1}{3}\rho g h^3 \end{cases} \quad (5.168)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_0 + b_0 h &= -\frac{q + \frac{1}{2}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ a_0 + \frac{4}{3}b_0 h &= -\frac{q + \frac{1}{3}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (5.169)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a_0 &= -\frac{q + \rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ b_0 &= \frac{\frac{1}{2}\rho g}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (5.170)$$

et nous obtenons donc cette fois

$$u^{(2)}(z) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{1}{2}\rho g z^2 - (q + \rho g h)z \right] \quad \forall z \in [0, h] \quad (5.171)$$

c'est-à-dire, et ainsi que nous nous y attendions,  $u^{(2)}(z) = u(z)$ ,  $\forall z \in [0, h]$ .

Amusons-nous alors enfin, pour conclure cette section, à chercher une approximation de la solution exacte  $\mathbf{u}$  de notre problème dans un espace de champs de déplacements cinématiquement admissibles de la forme  $w(z) = az + bz^2 + cz^n$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , plus vaste que le précédent. Posant cette fois  $g(a, b, c) = f(w)$  avec  $f(w)$  donné par (5.162), nous obtenons

$$g(a, b, c) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \left( a^2 h + \frac{4}{3} b^2 h^3 + \frac{n^2}{2n-1} c^2 h^{2n-1} + 2ab h^2 + 2ach^n + \frac{4n}{n+1} bch^{n+1} \right) + \rho g \left( \frac{1}{2} ah^2 + \frac{1}{3} bh^3 + \frac{1}{n+1} ch^{n+1} \right) + q (ah + bh^2 + ch^n) \quad (5.172)$$

L'entier  $n \geq 3$  étant quelconque mais fixé, le minimum global strict de  $g$  est obtenu pour les valeurs  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$  de  $a$ ,  $b$  et  $c$  satisfaisant

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a_0, b_0, c_0) = \frac{\partial g}{\partial b}(a_0, b_0, c_0) = \frac{\partial g}{\partial c}(a_0, b_0, c_0) = 0 \quad (5.173)$$

de sorte qu'il vient

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)(a_0 h + b_0 h^2 + c_0 h^n) = -qh - \frac{1}{2}\rho g h^2 \\ (\lambda + 2\mu)(a_0 h^2 + \frac{4}{3}b_0 h^3 + \frac{2n}{n+1}c_0 h^{n+1}) = -qh^2 - \frac{1}{3}\rho g h^3 \\ (\lambda + 2\mu)(a_0 h^n + \frac{2n}{n+1}b_0 h^{n+1} + \frac{n^2}{2n-1}c_0 h^{2n-1}) = -qh^n - \frac{1}{n+1}\rho g h^{n+1} \end{cases} \quad (5.174)$$

ou encore

$$\begin{cases} a_0 + b_0 h + c_0 h^{n-1} = -\frac{q + \frac{1}{2}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ a_0 + \frac{4}{3}b_0 h + \frac{2n}{n+1}c_0 h^{n-1} = -\frac{q + \frac{1}{3}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ a_0 + \frac{2n}{n+1}b_0 h + \frac{n^2}{2n-1}c_0 h^{n-1} = -\frac{q + \frac{1}{n+1}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (5.175)$$

Soustrayons alors la première de ces trois équations de la deuxième ainsi que de la troisième. Nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{3}b_0 h + \frac{n-1}{n+1}c_0 h^{n-1} = \frac{\frac{1}{6}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ \frac{n-1}{n+1}b_0 h + \frac{(n-1)^2}{2n-1}c_0 h^{n-1} = \frac{\frac{n-1}{2(n+1)}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (5.176)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} b_0 h + 3\frac{n-1}{n+1}c_0 h^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \\ b_0 h + \frac{n^2-1}{2n-1}c_0 h^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}\rho g h}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (5.177)$$

et l'on a donc, puisque  $n \geq 3$ ,  $c_0 = 0$ , ce qui montre, compte tenu de (5.169) et (5.175), que les valeurs  $a_0$  et  $b_0$  ne sont autres que celles précédemment trouvées et données par (5.170). Là encore, la solution exacte (5.158) appartenant à l'espace d'approximation choisi, nous ne pouvons que la retrouver en minimisant la fonction  $g(a, b, c)$  définie par (5.172).

## 5.4 Récapitulatif des formules essentielles

### 5.4.1 Principes généraux

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma}$$

$$\operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v})$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\text{résultante des actions mécaniques extérieures}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) \, dv}_{\text{résultante de } \frac{\partial}{\partial t} \text{ des quantités de mouvement}} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}_t} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds}_{\text{débit des quantités de mouvement}}$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, ds}_{\text{puissance virtuelle des actions mécaniques extérieures}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, dv}_{\text{puissance virtuelle dynamique (i.e. des quantités d'accélération)}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{D}} \, dv}_{\text{puissance virtuelle des efforts intérieurs}}$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds}_{\text{puissance des actions mécaniques extérieures}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \, dv}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv}_{\text{puissance des efforts intérieurs}}$$

puissance dynamique

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma}_{\text{travail virtuel des actions mécaniques extérieures}} = \underbrace{\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega}_{\text{travail virtuel des efforts intérieurs SA } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$$

### 5.4.2 Application aux fluides

$$\operatorname{grad}_x p = \rho \mathbf{b} \quad (\text{fluide au repos})$$

$$\operatorname{grad}_x p = \rho(\mathbf{b} - \boldsymbol{\gamma}) \quad (\text{fluide parfait})$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + U = K_{(\text{LC})} \quad \forall \vec{x} \in (\text{LC})$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{grad}_x p + (\xi + \eta)\mathbf{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{v}) + \eta\Delta_x \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \\ & = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{grad}_x p + (\xi + 2\eta)\mathbf{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{v}) - \eta \mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} \\ & = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^2 + (\mathbf{rot}_x \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

### 5.4.3 Application aux solides élastiques linéaires isotropes

$$(\lambda + \mu)\mathbf{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{u}) + \mu\Delta_x \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{u}) - \mu \mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}] \, d\Omega$$

$$\mathcal{T}^e(\Omega) = \mathcal{E}^d(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \frac{-\nu}{E} (3\sigma_m)^2 + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \right] \, d\Omega$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma$$

## 5.5 Exercices et problèmes

### 5.5.1 Énoncés des exercices

#### E5.1 Équations indéfinies du mouvement

Retrouver l'expression (3.68) des équations indéfinies eulériennes du mouvement en coordonnées cartésiennes (chapitre 3 page 172) en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un volume matériel élémentaire  $dv = dx_1 dx_2 dx_3$  quelconque mais fixé. Reprendre ensuite cette question en considérant cette fois un volume matériel élémentaire  $dv = dr r d\theta dz$  de façon à obtenir l'expression de ces mêmes équations relativement au système de coordonnées cylindriques  $r, \theta$  et  $z$  (annexe B page 408).

#### E5.2 Théorème d'Archimède

Un solide continu  $\mathcal{M}$  est immergé dans un fluide au repos comme l'illustre la figure 5.3. Soit  $\mathcal{V}$  le volume occupé par ce solide et  $\mathcal{S}$  sa frontière. On désigne par  $g$  l'accélération de la pesanteur, par  $\rho$  la masse volumique du fluide, par  $M = \int_{\mathcal{V}} \rho dv$  la masse du volume matériel  $\mathcal{V}$  qu'occupait ce fluide avant immersion du solide et par  $G$  son centre de gravité (figure 5.3).

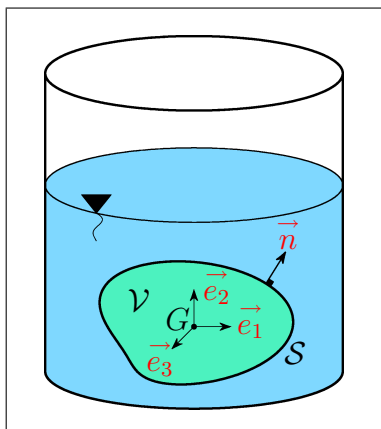


FIG. 5.3 – Solide immergé

Montrer alors (c'est le théorème d'Archimède) que la résultante  $\vec{\mathcal{R}}_c^e$  des actions de contact (pression) s'exerçant sur la frontière  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}$  est égale à l'opposé  $Mg\vec{e}_2$  du poids de ce volume matériel fluide et que son point d'application n'est autre que  $G$ .

#### E5.3 Réservoir cylindrique en rotation

Un réservoir cylindrique de rayon  $R$ , contenant au repos une hauteur  $h$  d'un liquide incompressible et homogène de masse volumique  $\rho$  (figure 5.4), est animé d'un mouvement de rotation

uniforme autour de son axe vertical  $Oz$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$  suffisamment faible pour que le fond du vase reste entièrement recouvert de fluide.

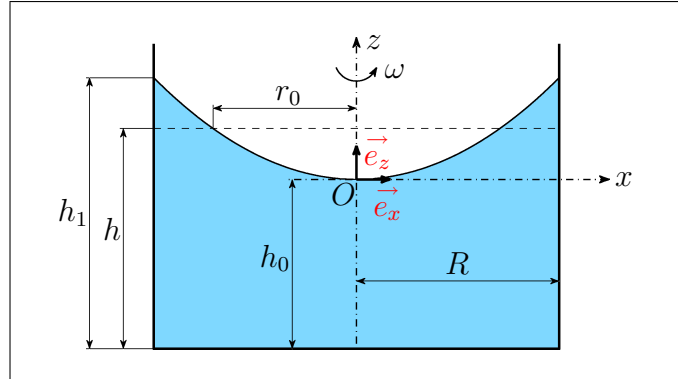


FIG. 5.4 – Réservoir cylindrique en rotation

1. Déterminer la forme prise par la surface libre du fluide. On écrira pour cela l'équilibre de ce dernier dans un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  lié au récipient en mouvement (voir la figure 5.4), l'origine  $O$  des axes de ce repère étant choisie au point d'altitude minimale de la surface libre.
2. Établir l'équation des surfaces isobares ainsi que celle des surfaces d'égale pression étoilée  $p^* = p + \rho g z$ , où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur.
3. Montrer que la surface libre du fluide en mouvement et celle de ce même fluide au repos se coupent selon un cercle de rayon  $r_0$  indépendant de  $\omega$ .
4. Quelle est, en fonction de  $R$ ,  $h$  et  $g$ , la valeur  $\omega_l$  de  $\omega$  au-delà de laquelle le fond du vase n'est plus que partiellement recouvert de fluide ?

#### E5.4 Principe du venturi

On considère l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  dans la conduite représentée sur la figure 5.5 et dénommée venturi. Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligeables, on désigne respectivement par  $S_1$  et  $S_2$  les aires des sections (1) et (2) de la conduite (voir la figure 5.5) et l'on suppose que dans chacune d'elles la vitesse et la pression sont uniformes.

Montrer alors que l'on peut déterminer le débit du fluide dans la conduite par une simple mesure de la différence de pression entre ces deux sections.

#### E5.5 Tube de Pitot

On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  dans la portion de conduite représentée sur les figures 5.6 (a) et (b) et comprise

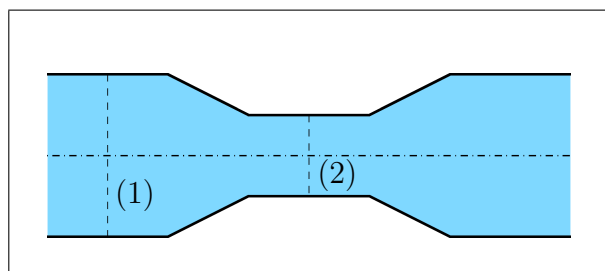


FIG. 5.5 – Venturi

entre les sections droites  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . On suppose que les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) sont négligeables et que les caractéristiques de l'écoulement (vitesse  $v$  et pression  $p$ ) sont homogènes dans la zone d'étude comprise entre ces deux sections.

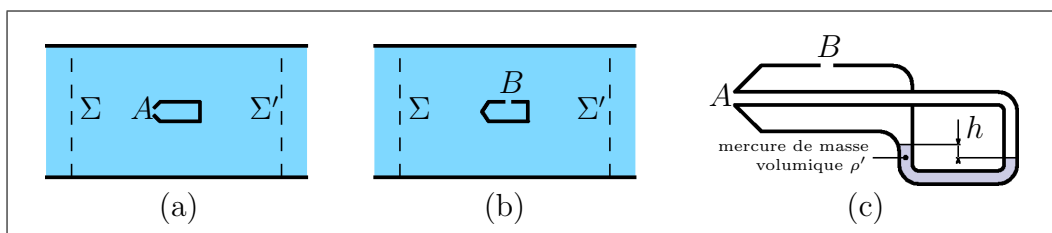


FIG. 5.6 – Tube de Pitot

1. L'écoulement du fluide s'effectuant de  $\Sigma$  vers  $\Sigma'$ , on y introduit alors un tube de faibles dimensions muni d'un orifice situé à son extrémité  $A$  comme l'illustre la figure 5.6 (a). Déterminer la vitesse et la pression du fluide en ce point.
2. On renouvelle l'expérience de la question 1 en utilisant un tube de mêmes dimensions mais muni cette fois d'un orifice situé au point  $B$  de sa paroi latérale (figure 5.6 (b)). Que valent à présent la vitesse et la pression du fluide en ce point ?
3. On réunit en un seul les dispositifs expérimentaux des questions 1 et 2. Montrer alors que l'appareil qui en résulte, dénommé tube de Pitot et représenté sur la figure 5.6 (c), permet de mesurer la vitesse  $v$  de l'écoulement.

### E5.6 Ajustage de Borda

Un réservoir contenant une hauteur  $H$  d'un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  se vide par un ajustage rentrant comme l'illustre la figure 5.7.

Les dimensions de l'ajutage étant très petites devant celles du réservoir, on désigne par  $S$  son aire, par  $h$  la hauteur du fluide le surmontant, par  $s$  l'aire d'une section droite du filet fluide à sa sortie et par  $\Sigma$  celle de la base du réservoir (voir la figure 5.7).

1. Déterminer la vitesse  $\vec{v}$  du fluide à la sortie de l'ajutage.



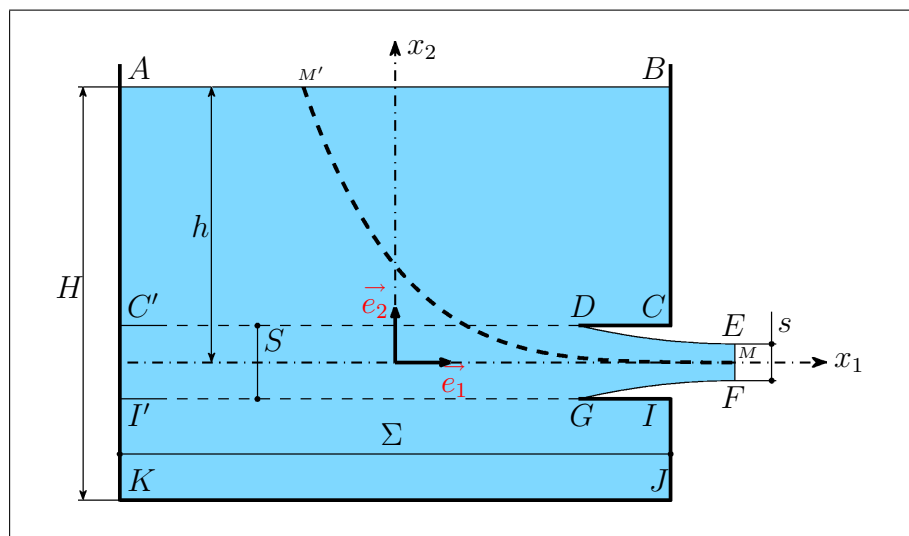


FIG. 5.7 – Ajustage de Borda

2. Évaluer le rapport de contraction  $c = \frac{s}{h}$  de l'ajutage en appliquant le théorème d'Euler au volume fluide  $ABCDEFGHIJKA$  (voir la figure 5.7). En déduire alors, en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $h$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ , l'expression de son débit massique  $Q$ .

### E5.7 Auget Pelton

On considère l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  contre l'auget représentée sur la figure 5.8.

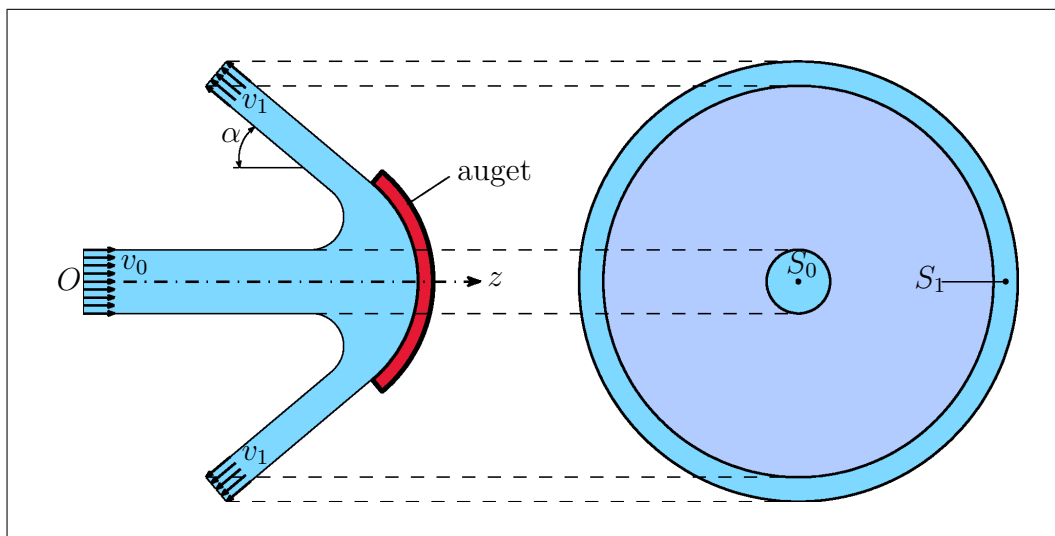


FIG. 5.8 – Auget Pelton

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant supposées négligeables, déterminer, en fonction de  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $S_0$  et  $v_0$  (voir la figure 5.8), la force  $F$  exercée par le fluide sur

l'auget.

### E5.8 Tube de Poiseuille

On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible et non pesant dans la conduite cylindrique de rayon  $R$  représentée sur la figure 5.9. On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_z$  où  $v$  est une fonction inconnue dépendant a priori des variables  $r$  et  $z$ .

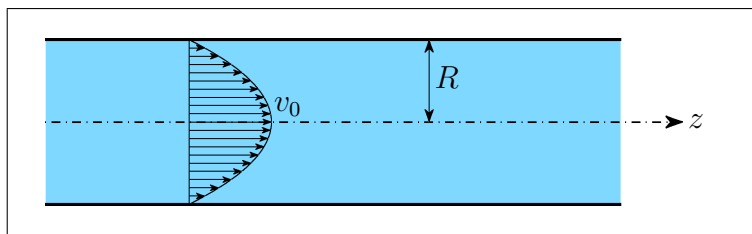


FIG. 5.9 – Tube de Poiseuille

1. Déterminer le profil des vitesses dans les sections droites de la conduite.
2. Montrer que le débit volumique  $Q$  du fluide est proportionnel à la puissance quatrième du rayon de cette conduite (ce résultat fut établi expérimentalement par Poiseuille).
3. Donner, en fonction de la viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$  du fluide et de sa vitesse  $v_0$  aux points de l'axe de la conduite (voir la figure 5.9), l'expression de la force de frottement  $\vec{F}$  par unité de longueur qu'exerce ce fluide sur les parois de la conduite.

### E5.9 Viscosimètre plan-plan

On considère l'écoulement permanent d'un film cylindrique fluide de rayon  $R$  et de faible épaisseur  $h$  entre deux plaques circulaires. La plaque inférieure est fixe tandis que la plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire  $\omega$  ainsi que l'illustre la figure 5.10. Le fluide visqueux est incompressible et newtonien, de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$ . Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant négligeables, on suppose par ailleurs que  $\omega$  est suffisamment faible pour que les termes d'accélération le soient également.

On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_\theta$ , où  $v$  est une fonction inconnue des variables d'espace  $r$  et  $z$  que l'on se propose ici de déterminer. Enfin l'on désigne par  $p_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique et par  $p(r, z)$  celle du fluide.

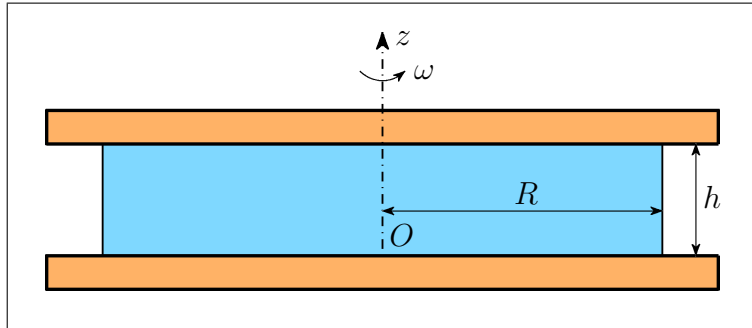


FIG. 5.10 – Viscosimètre plan-plan

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité puis déduire des équations de Navier-Stokes l'expression de  $p$  ainsi que l'équation aux dérivées partielles dont  $v$  est solution.
2. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme  $v(r, z) = f(r)g(z)$ . Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = h$ , que  $g(0) = 0$  et que  $f$  ne peut être qu'une fonction linéaire de  $r$ . Acheter ensuite la détermination de  $v$  de façon à satisfaire l'équation aux dérivées partielles trouvée à la question 1.
3. Des résultats obtenus aux questions 1 et 2 déduire l'expression des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
4. Soit  $C$  le couple nécessaire à entretenir le mouvement de rotation de la plaque supérieure du viscosimètre. Donner, en fonction de  $C$  et  $\omega$  ainsi que des caractéristiques géométriques  $R$  et  $h$  du cylindre fluide, l'expression de la viscosité  $\eta$ .

### E5.10 Torsion d'un disque annulaire

Un disque annulaire  $\mathcal{D}$ , d'épaisseur  $h$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , est constitué d'un matériau homogène au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Ce disque est encastré sur son contour  $\mathcal{C}_2$  tandis que son contour  $\mathcal{C}_1$  est soumis à un couple  $C$  par l'intermédiaire d'un arbre de torsion comme l'illustre la figure 5.11. On suppose alors que le champ des déplacements résultant de cette sollicitation et exprimé relativement au repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_\theta$ , où  $u$  est une fonction de la variable  $r$  que l'on se propose à présent de déterminer.

1. Déduire des équations de Lamé-Navier l'équation différentielle ordinaire dont  $u$  est solution.
2. Relier le couple de torsion  $C$  aux contraintes de cisaillement  $\sigma_{r\theta}(r)$ ,  $r \in [r_1, r_2]$ .
3. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question 1 en tirant parti des résultats de la question 2 ainsi que des conditions aux limites sur le contour  $\mathcal{C}_2$  du disque.
4. Donner, en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques du disque, l'expression de la rotation  $\omega$  du contour  $\mathcal{C}_1$ .

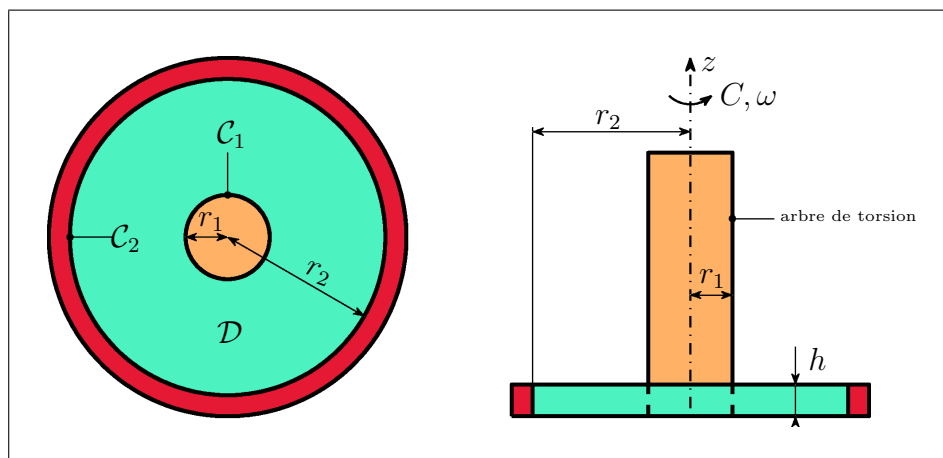


FIG. 5.11 – Torsion d'un disque annulaire

### E5.11 Sphère creuse sous pression

Une sphère creuse de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$  est constituée d'un matériau homogène au comportement élastique linéaire et isotrope, de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Cette sphère étant soumise aux pressions intérieure  $p_1$  et extérieure  $p_2$  (figure 5.12), on suppose alors que le champ des déplacements induit par ces dernières et exprimé relativement au repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  associé au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  adopte la forme  $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_r$ , où  $u$  est une fonction de la variable  $r$  que l'on cherche ici à déterminer.

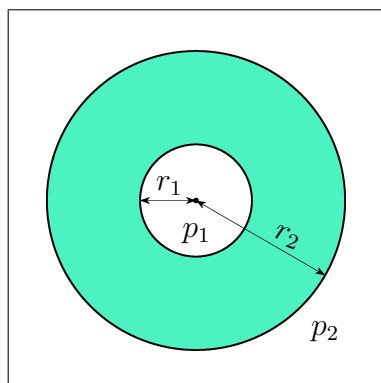


FIG. 5.12 – Sphère creuse sous pression

1. Des équations de Lamé-Navier, déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire  $u$  puis montrer que celle-ci a pour solution générale  $u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes à déterminer.
2. Donner, en fonction des constantes d'intégration  $A$  et  $B$  introduites à la question 1, l'expression des composantes non nulles des tenseurs des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
3. Déterminer les constantes  $A$  et  $B$  en tirant parti des résultats de la question 2 ainsi que

des conditions aux limites en contrainte en  $r = r_1$  et  $r = r_2$ . En déduire alors l'expression finale de  $u(r)$  ainsi que celles des composantes non nulles de  $\varepsilon$  et  $\sigma$ .

### E5.12 Vibrations longitudinales d'une poutre

Une poutre de longueur  $l$  et de sections droites rectangulaires de mêmes dimensions et d'aire  $S$  (figure 5.13) est constituée d'un matériau homogène de masse volumique  $\rho$  au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . La poutre étant au repos à l'instant initial  $t = 0$ , on applique à son extrémité libre  $x = l$  une force périodique  $\phi(t)$ ,  $t \geq 0$ , tandis que son extrémité gauche  $x = 0$  est maintenue immobile ainsi que l'illustre la figure 5.13. On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes, qu'en tout point des sections droites  $x = \text{cste}$  de la poutre cette sollicitation induit un déplacement horizontal  $u(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ .

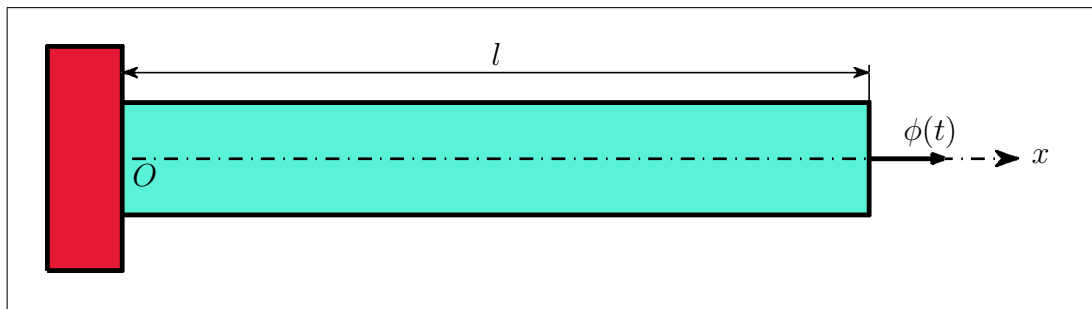


FIG. 5.13 – Vibrations longitudinales d'une poutre

1. Établir l'équation aux dérivées partielles dont  $u$  est solution puis en déduire la vitesse de propagation  $v_l$  des vibrations longitudinales.
2. On suppose tout d'abord que la sollicitation ne dépend pas du temps :  $\phi(t) = \phi_0$ ,  $t > 0$ . Donner alors l'expression du déplacement horizontal  $u(x)$ .
3. On suppose à présent que l'on a  $\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$ ,  $t \geq 0$ .
  - (a) Déterminer le déplacement  $u(x, t)$  (on cherchera pour cela une solution de la forme  $u(x, t) = u_0(x) \sin \omega t$ ).
  - (b) On introduit le module d'élasticité dynamique  $E_d$  défini par  $u(l, t) = \frac{\phi(t)l}{E_d S}$ ,  $t \geq 0$ . Étudier les variations de  $E_d$  avec la pulsation  $\omega$  et plus précisément celles de  $\frac{E_d}{E}$  en fonction de  $\frac{\omega l}{v_l}$ .
  - (c) Déduire des résultats de la question 3b l'expression de la pulsation critique  $\omega_c$  ainsi que celle de la fréquence critique  $f_c$ .

## 5.5.2 Énoncés des problèmes

### P5.1 Compression-confinement d'un cylindre creux

Un cylindre creux de révolution de hauteur  $H$ , de rayon intérieur  $r_0$  et de rayon extérieur  $r_1$  (figure 5.14 (a)), est constitué d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Ce matériau obéit au critère de limite élastique de Tresca, et  $\tau_0$  désigne la valeur de la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  à la limite élastique. Le cylindre est soumis à une pression intérieure  $p_0$  ( $r = r_0$ ) et à une pression extérieure  $p_1$  ( $r = r_1$ ). Le déplacement vertical à la base ( $z = 0$ ) est par ailleurs nul, tandis que sa valeur en tête ( $z = H$ ) est égale à  $-u_0$  comme l'illustre la figure 5.14 (c). Enfin, le champ des déplacements exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est supposé adopter la forme  $\mathbf{u} = u_r(r)\vec{e}_r + u_z(z)\vec{e}_z$ ,  $r \in [r_0, r_1]$ ,  $z \in [0, H]$ .

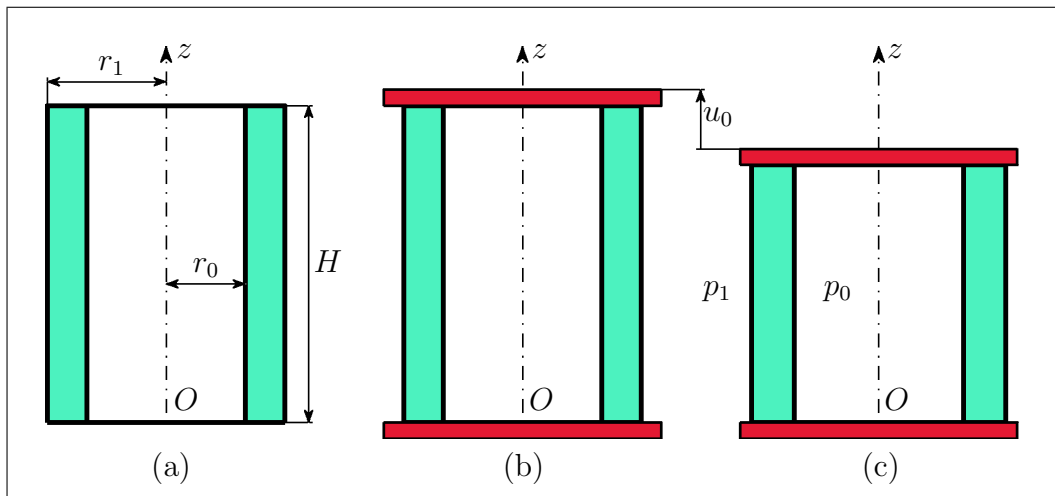


FIG. 5.14 – Compression-confinement d'un cylindre creux

1. Donner, en fonction des inconnues  $u_r$  et  $u_z$ , l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
2. De l'équation indéfinie de l'équilibre écrite en projection sur  $\vec{e}_z$  ainsi que des conditions aux limites cinématiques (i.e. en déplacements), déduire l'expression de  $u_z$ .
3. Écrire l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_r$  et en déduire l'équation différentielle ordinaire satisfaite par  $u_r$ .
4. Montrer que l'équation établie à la question 3 a pour solution générale  $u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}$ , puis déterminer les constantes  $A$  et  $B$  grâce aux conditions aux limites statiques (i.e. en contraintes).
5. Donner, en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $u_0$ ,  $H$  et  $r$ , l'expression finale des composantes non nulles des tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ .

6. On s'intéresse ici aux sollicitations  $(u_0, p_0, p_1)$  qui annulent  $u_r$ . Montrer que l'on a alors nécessairement  $p_0 = p_1 = p$ , puis donner l'expression de  $p$  en fonction de  $\lambda$ ,  $u_0$  et  $H$ . Quelle est alors la valeur  $u_l$  de  $u_0$  à la limite élastique ?
7. On s'intéresse à présent aux sollicitations  $(u_0, p_0, p_1)$  annulant la contrainte verticale  $\sigma_{zz}$ . Quelle est, dans ce cas, l'équation reliant  $u_0$ ,  $p_0$  et  $p_1$  ?
8. La relation de la question 7 étant supposée vérifiée, on se limite aux sollicitations conduisant à un déplacement radial linéaire ( $B = 0$ ). Vérifier que l'on a à nouveau  $p_0 = p_1 = p$ , puis donner l'expression de  $p$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $H$  et  $u_0$  ainsi que la valeur  $u_l$  de  $u_0$  à la limite élastique (on suppose ici  $u_0 \leq 0$ ).
9. La relation de la question 7 étant toujours satisfaite, on s'intéresse à présent aux sollicitations pour lesquelles la composante linéaire du déplacement radial est nulle ( $A = 0$ ). Montrer que l'on a alors nécessairement  $u_0 = 0$ . Donner ensuite l'expression de  $p_1$  en fonction de  $p_0$ ,  $r_0$  et  $r_1$ , puis la valeur  $p_l$  de  $p_0$  à la limite élastique.
10. Le cylindre est maintenant soumis à une variation de température  $\Delta T$ . Quelles sont alors, en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et du coefficient de dilatation thermique linéaire  $\beta$ , les valeurs à donner à  $u_0$ ,  $p_0$  et  $p_1$  si l'on veut que le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  soit nul.

### P5.2 Sertissage d'un cylindre

On considère les cylindres de révolution  $C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$  représentés sur la figure 5.15. Ces deux cylindres ont même hauteur  $H$  et sont constitués du même matériau homogène et non pesant au comportement thermoélastique linéaire et isotrope, de module d'Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0$  et de coefficient de dilatation thermique linéaire  $\beta$ .

Le cylindre plein  $C^{(1)}$  a pour rayon  $r_0$  tandis que  $C^{(2)}$  est un cylindre creux de rayon extérieur  $r_2$  et de rayon intérieur  $r_1$  tel que  $r_1 < r_0$ . On se propose alors de sertir le cylindre  $C^{(1)}$  à l'intérieur du cylindre  $C^{(2)}$  après avoir soumis ce dernier à une élévation  $\Delta T$  de sa température.

1. Les déplacements du cylindre  $C^{(2)}$  étant non empêchés, quelle valeur minimale  $\Delta T_0$  doit-on donner à  $\Delta T$  pour que le sertissage soit possible ?

Ayant ainsi imposé à  $C^{(2)}$  une élévation de température  $\Delta T \geq \Delta T_0$ , on y introduit ensuite  $C^{(1)}$  avant de laisser refroidir l'ensemble ainsi constitué. La température ayant retrouvé sa valeur initiale (les déformations d'origine thermique sont donc à présent nulles), on se propose alors de déterminer les déplacements, les déformations ainsi que les contraintes au sein de chaque cylindre. On suppose que le champ des déplacements  $\mathbf{u}^{(i)}$  de  $C^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{u}^{(i)}(r, z) = u_r^{(i)}(r)\vec{e}_r + u_z^{(i)}(z)\vec{e}_z$ , où  $u_r^{(i)}$  et  $u_z^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables  $r$  et  $z$ . On admet par ailleurs (voir la figure 5.15) que

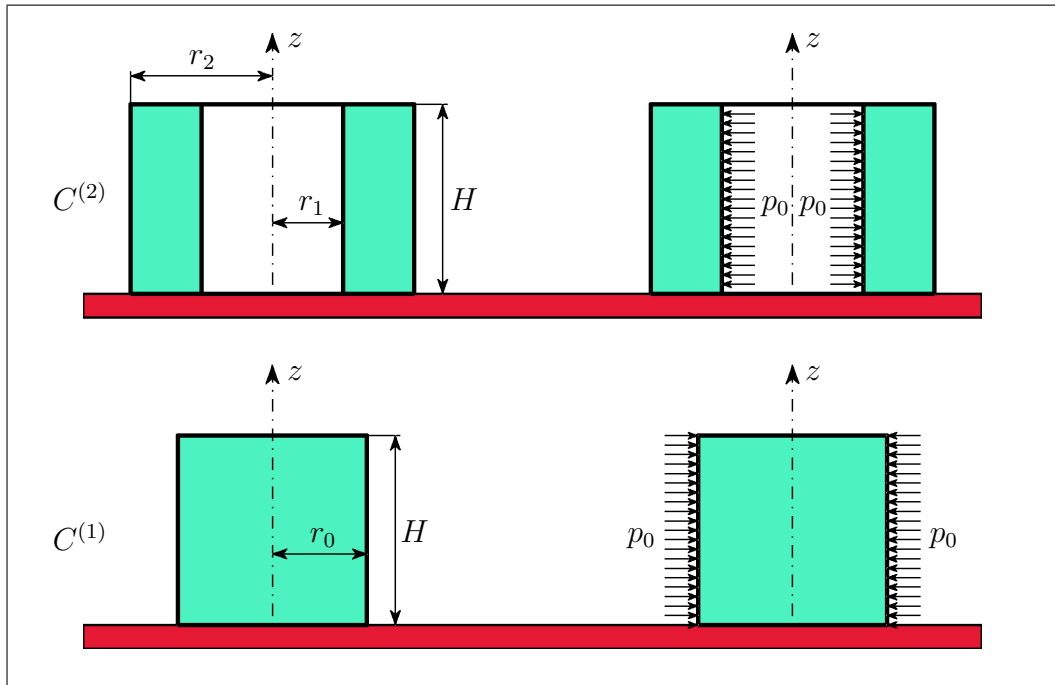


FIG. 5.15 – Sertissage d'un cylindre

l'action de  $C^{(2)}$  sur  $C^{(1)}$  (resp<sup>t</sup> de  $C^{(1)}$  sur  $C^{(2)}$ ) se traduit par une pression uniforme  $p_0$  en  $r = r_0$  (resp<sup>t</sup> en  $r = r_1$ ).

2. Des équations de Lamé-Navier déduire les équations différentielles ordinaires dont  $u_r^{(i)}$  et  $u_z^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont solutions.
3. Montrer, en tirant parti des conditions aux limites cinématiques en  $z = 0$  et statiques en  $z = H$ , que l'on a  $u_z^{(1)} = u_z^{(2)} = 0$ .
4. Montrer que les déplacements radiaux sont de la forme  $u_r^{(1)} = A^{(1)}r$  et  $u_r^{(2)} = A^{(2)}r + \frac{B^{(2)}}{r}$  puis déterminer les constantes  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  et  $B^{(2)}$  après avoir tiré parti des conditions aux limites statiques en  $r = r_0$ , en  $r = r_1$  ainsi qu'en  $r = r_2$ .
5. Retrouver, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle, les expressions de  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  et  $B^{(2)}$  obtenues à la question 4.
6. De la condition de contact à l'interface entre les deux cylindres déduire, en fonction de  $E$ ,  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$ , l'expression de  $p_0$ .
7. Donner, en fonction de  $E$ ,  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$ , l'expression finale des déplacements, des déformations et des contraintes au sein de chaque cylindre.
8. On suppose à présent que le matériau constituant les deux cylindres obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par  $\tau_0$  la valeur de la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  à la limite élastique. Des deux cylindres  $C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$  dire lequel est susceptible de plastifier en premier puis établir la relation que doivent satisfaire  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  pour que le sertissage puisse s'opérer sans plastification.



### P5.3 Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre)

Un cylindre creux de révolution, de rayon intérieur  $r_0$  et de dimensions infinies dans les directions axiale  $z$  et radiale  $r$ , est soumis sur sa paroi intérieure ( $r = r_0$ ) à une pression uniforme  $p_0 > 0$  (figure 5.16). Ce cylindre est constitué d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module de Lamé  $\mu$ . Il obéit par ailleurs au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par  $\sigma_0$  sa limite élastique en traction simple.

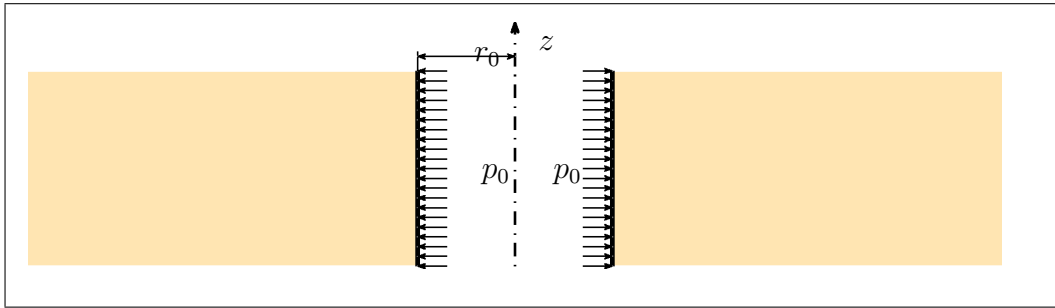


FIG. 5.16 – Cylindre creux infini sous pression

La pression  $p_0$  étant telle que le comportement du matériau reste dans le domaine élastique, on suppose que le champ de déplacement exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_r$ ,  $r \geq r_0$ .

1. Établir l'équation différentielle dont  $u$  est solution, puis l'intégrer en tirant parti des conditions aux limites en  $r = +\infty$  et  $r = r_0$ . En déduire alors, en fonction de  $p_0$ ,  $\mu$ ,  $r_0$  et  $r$ , l'expression des champs de déplacement, de déformation et de contrainte.
2. Montrer que la solution obtenue à la question 1 reste valable tant que  $p_0 < p_l = \frac{\sigma_0}{2}$ .

On suppose à présent que  $p_0 \geq p_l$ . Le comportement du matériau est alors parfaitement plastique dans une zone cylindrique  $r \in [r_0, r_1]$ , où  $r_1$  est à déterminer, et élastique au delà.

3. On admet que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes restent  $\sigma_{rr}(r)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(r)$ . Déterminer alors, en tirant parti de l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_r$ , du critère de Tresca ainsi que des conditions aux limites en  $r = r_0$ , l'état de contrainte dans la zone plastifiée  $r \in [r_0, r_1]$ . On donnera les expressions de  $\sigma_{rr}$  et de  $\sigma_{\theta\theta}$  en fonction de  $p_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $r_0$  et  $r$ .
4. Montrer, en s'appuyant sur les développements de la question 1, que la continuité des contraintes en  $r = r_1$  entraîne  $\sigma_{rr}(r_1) = -\sigma_{\theta\theta}(r_1) = -p_l$ . En déduire alors l'expression de  $r_1$  en fonction de  $p_0$ ,  $\sigma_0$  et  $r_0$ .
5. Achever la détermination du champ des contraintes pour  $r \geq r_1$ .
6. Jusqu'à quelle valeur de  $p_0$  la solution élastoplastique obtenue aux questions 3, 4 et 5 reste-t-elle valable ?

### P5.4 Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné

Une couche d'épaisseur  $h$  constituée d'un matériau homogène et pesant de masse volumique  $\rho$  repose avec une adhérence parfaite sur un plan infini incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale. La neige sur un toit est un exemple de ce type problème qu'illustre par ailleurs la figure 5.17.

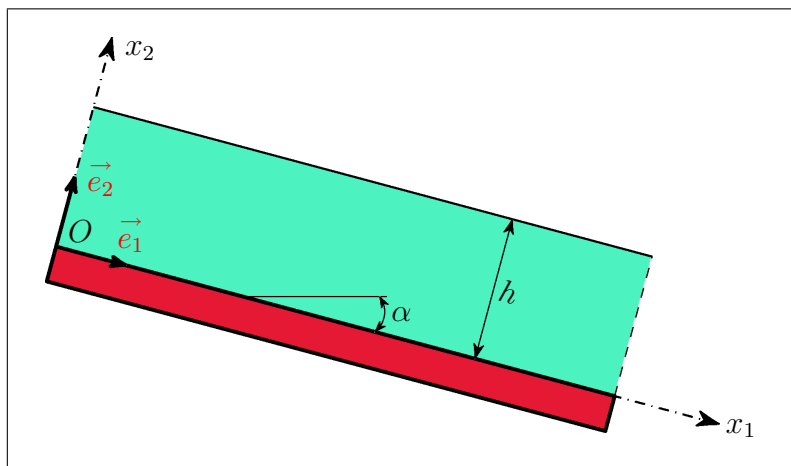


FIG. 5.17 – Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné

Le comportement du matériau est élastique linéaire et isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Il obéit de plus au critère de limite élastique de Tresca, et l'on désigne par  $\tau_0$  la valeur de la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  à la limite élastique.

On suppose alors que le champ de déplacement exprimé relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (voir la figure 5.17) adopte la forme  $\mathbf{u} = u_1(x_2)\vec{e}_1 + u_2(x_2)\vec{e}_2 + u_3(x_2)\vec{e}_3$ ,  $x_2 \in [0, h]$ , où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont trois fonctions inconnues de la variable d'espace  $x_2$  que l'on se propose ici de déterminer. Enfin l'on désigne par  $g$  l'accélération de la pesanteur et l'on choisit la pression atmosphérique comme origine des pressions.

1. Donner, en fonction de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ , l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puis, en fonction cette fois de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $E$  et  $\nu$ , celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
2. Des équations indéfinies de l'équilibre jointes aux conditions aux limites en contrainte à l'interface libre  $x_2 = h$  déduire les expressions de  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{23}$ .
3. Déterminer le champ des déplacements en tirant parti des résultats obtenus aux questions 1 et 2 ainsi que des conditions aux limites cinématiques à l'interface  $x_2 = 0$ .
4. Achever la détermination des composantes du tenseur des contraintes.

Dans toute la suite du problème on suppose  $\nu = \frac{1}{2}$ .

5. Expliciter le critère de Tresca puis en déduire, pour  $\alpha$  quelconque mais fixé, la valeur  $h_l$  de  $h$  à la limite élastique.

6. On fixe à présent la hauteur  $h$  de la couche pesante tout en faisant varier l'angle  $\alpha$ . Pour quelle valeur  $\alpha_l$  de  $\alpha$  la limite élastique est-elle atteinte? Donner l'allure de la courbe  $\alpha_l = f(h)$ .
7. On souhaite enfin prendre en compte à l'interface  $x_2 = 0$  une condition d'adhérence de type Coulomb. Cette dernière adoptant ici la forme  $\frac{|\sigma_{12}|}{|\sigma_{22}|} \leq \tan \varphi$ , où  $\varphi$  désigne l'angle de frottement, quelle est alors la valeur  $\alpha_g$  de  $\alpha$  déclenchant le glissement?
8. Dédurre des questions 6 et 7 l'allure de la courbe limite finale  $\alpha_f = f(h)$  où  $\alpha_f = \min\{\alpha_l, \alpha_g\}$ .

### P5.5 Pale d'hélicoptère

Une pale d'hélicoptère, constituée d'un matériau homogène et pesant de masse volumique  $\rho$ , est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire  $\omega$  ainsi que l'illustre la figure 5.18. Cette pale est schématisée par une poutre droite de longueur  $l$  et de section rectangulaire ayant pour aire l'unité ( $S = 1$ ). Le comportement du matériau est par ailleurs élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0$ .

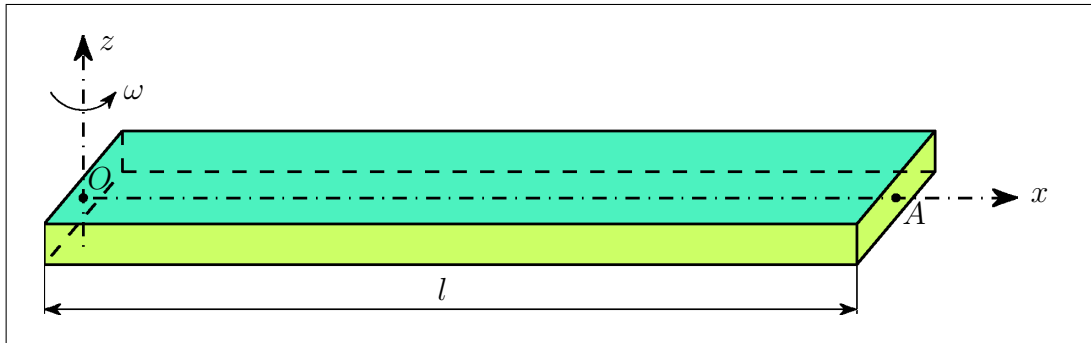


FIG. 5.18 – Pale d'hélicoptère en rotation

On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements exprimé relativement au repère mobile  $(Ox, Oz)$  lié à la pale (voir la figure 5.18) adopte la forme  $\mathbf{u} = u(x)\vec{e}_x$ , où  $\vec{e}_x$  est le vecteur directeur de l'axe  $Ox$  et où  $u$  est une fonction de  $x$  que l'on se propose de déterminer.

1. Écrire l'équation différentielle ordinaire dont  $\sigma_{xx}$  est solution puis l'intégrer en tirant parti de la condition aux limites au point  $A$  (figure 5.18).
2. Dédurre des résultats de la question 1 l'expression de  $u(x)$  ainsi que l'allongement total  $u(l)$  de la pale.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (a priori approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle.

3. On pose  $u(x) = \alpha x$ . Donner l'expression de l'énergie potentielle  $J(\alpha)$  et dire quelle valeur de  $\alpha$  la minimise. Quel est alors le déplacement du point  $A$ ? (on comparera ce dernier avec la valeur trouvée à la question 2). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante?
4. On pose à présent  $u(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ . Calculer  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 2.
5. Vérifier que si l'on pose  $u(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ , on trouve  $\delta = 0$ ,  $\forall n$ .

### P5.6 Action d'un jet sur un obstacle

On considère l'écoulement plan et permanent d'un jet de fluide incompressible de faible viscosité et de masse volumique  $\rho$  autour d'un obstacle cylindrique (figure 5.19).

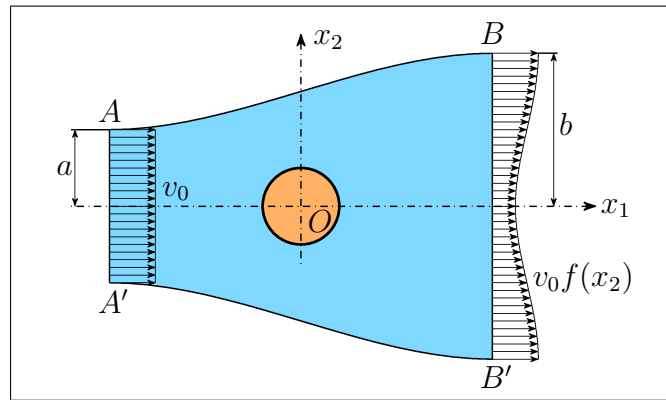


FIG. 5.19 – Action d'un jet sur un obstacle

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on constate expérimentalement qu'à partir d'une section  $BB'$  les vitesses  $\vec{v}$  redeviennent parallèles (voir la figure 5.19), avec une distribution  $v_1 = v_0 f(x_2)$ , où  $v_0 \in \mathbb{R}$  et où  $f$  est une fonction inconnue de la variable d'espace  $x_2$ , paire par raison de symétrie. Les effets de la viscosité sont par ailleurs supposés négligeables à distance de l'obstacle (i.e. sur  $ABB'A'$ ) et prépondérants au voisinage de celui-ci. Enfin, dans tout le problème on posera

$$I_n = \int_0^b f^n(x_2) dx_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et l'on tirera parti des relations

$$\int_{\mathcal{S}} C \vec{n} ds = \vec{0} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} h dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial h}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{S}} h \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

où  $C$  est une constante,  $h$  un champ scalaire et  $\mathcal{S}$  une surface fermée délimitant un volume matériel  $\mathcal{V}$ . On raisonnera en outre par unité de largeur dans la direction  $Ox_3$  orthogonale au plan de l'écoulement.

1. Écrire la conservation du débit et en tirer une condition sur  $I_1$ .
2. Dédire des hypothèses précédentes que  $v_B = v_{B'} = v_0$  et que  $p = p_{\text{atm}}$  sur  $ABB'A'A$ , où  $p_{\text{atm}}$  désigne la pression atmosphérique et  $p$  celle du fluide.
3. Donner, en tirant parti du théorème d'Euler, l'expression de la force de traînée  $F_1$  qu'exerce le fluide sur le cylindre.
4. Dédire du théorème de l'énergie cinétique la puissance  $\mathcal{P}^i$  des efforts intérieurs dissipée dans l'écoulement.

### P5.7 Écoulement dans une conduite de section carrée

On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$  dans une canalisation cylindrique de génératrices parallèles à l'axe  $Ox_3$  et ayant pour section par les plans  $x_3 = \text{cste}$  le carré de sommets  $(x_1 = a, x_2 = a)$ ,  $(x_1 = -a, x_2 = a)$ ,  $(x_1 = -a, x_2 = -a)$  et  $(x_1 = a, x_2 = -a)$  (figure 5.20). Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant négligeables, on désigne par  $p$  le champ des pressions au sein du fluide et l'on suppose, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que la champ des vitesses exprimé relativement au système d'axes orthonormés  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  (voir la figure 5.20) adopte la forme  $\mathbf{v} = v(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$ , où  $\vec{e}_3$  est le vecteur directeur de l'axe  $Ox_3$  et où  $v$  est une fonction inconnue, dépendant a priori des variables d'espace  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , que l'on se propose ici de déterminer.

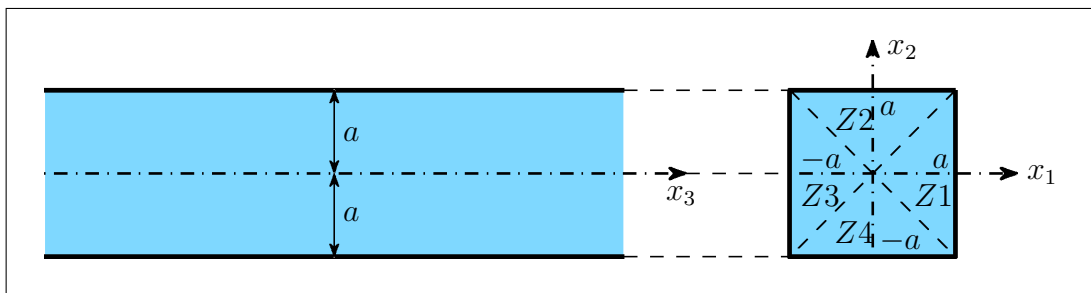


FIG. 5.20 – Écoulement dans une conduite de section carrée

1. Montrer qu'en fait  $v$  est indépendante de  $x_3$ . Donner alors la forme du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
2. Dédire des équations indéfinies du mouvement que la pression ne dépend que de  $x_3$  et que l'on a  $\frac{dp}{dx_3} = \eta(\partial_{11}^2 v + \partial_{22}^2 v) = -G$ , où  $G$  est une constante que l'on choisit strictement positive de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des  $x_3$  positifs.
3. Ayant remarqué que l'équation des sections droites de la conduite est  $\max\{|x_1|, |x_2|\} = a$ , on se propose de chercher  $v$  sous la forme  $v = f(z)$  avec  $z = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ . Donner alors, en tirant notamment parti des conditions aux limites, l'expression de  $v$  dans chacune des

quatre zones des sections droites  $x_3 = \text{cste}$  de la conduite (voir aussi la figure 5.20) définies par

$$\text{Zone 1 : } x_1 \geq 0 \text{ et } |x_2| \leq +x_1 \Rightarrow z = +x_1$$

$$\text{Zone 2 : } x_2 \geq 0 \text{ et } |x_1| \leq +x_2 \Rightarrow z = +x_2$$

$$\text{Zone 3 : } x_1 \leq 0 \text{ et } |x_2| \leq -x_1 \Rightarrow z = -x_1$$

$$\text{Zone 4 : } x_2 \leq 0 \text{ et } |x_1| \leq -x_2 \Rightarrow z = -x_2$$

4. Montrer ensuite que la continuité de  $v$  ne peut être assurée que si l'on a  $v = \frac{G}{2\eta}(a^2 - z^2) - A(a - z)$ ,  $\forall z = \max\{|x_1|, |x_2|\} \in [0, a]$ , où  $A$  est une constante. En considérant enfin les valeurs des contraintes tangentielles  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sur les facettes de normale  $\vec{e}_3$  aux points de coordonnées  $x_1 = x_2 = 0$  et  $x_3 = \text{cste}$ , déduire que l'on a nécessairement  $A = 0$ . Donner alors la valeur du débit volumique  $Q$  à travers une section droite  $x_3 = \text{cste}$  de la conduite.
5. Déterminer le champ des contraintes  $\sigma$  et dire ce que vous inspire, en termes de pertinence, la solution obtenue à la question 4.
6. Calculer, à l'aide des valeurs de  $\sigma$  trouvées à la question 5, la force  $F$  exercée par le fluide sur une longueur unité de la conduite. Déterminer ensuite cette même force à l'aide du théorème d'Euler. Conclusion ?

### P5.8 Fluide visqueux sur un plan incliné

Soient  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  et  $Ox_3$  les axes orthogonaux de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  définis de la façon suivante : le plan  $(Ox_1, Ox_2)$  est incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale, l'axe  $Ox_2$  est horizontal,  $Ox_1$  est dirigé vers le bas et fait l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale tandis qu' $Ox_3$  est dirigé vers le haut et fait ainsi l'angle  $\alpha$  avec la verticale ascendante. Un fluide visqueux incompressible et pesant, de masse volumique  $\rho$ , occupe le domaine de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  compris entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = h$ ,  $h > 0$ . La lave sur la pente d'un volcan est un exemple de ce type problème qu'illustre par ailleurs la figure 5.21.

Le champ des vitesses, exprimé dans le repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  associé au système d'axes  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$ , est de la forme  $\mathbf{v} = v(x_3)\vec{e}_1$ , où  $v$  est une fonction inconnue de la variable d'espace  $x_3$  que l'on se propose de déterminer. Le champ des pressions adopte quant à lui la forme  $p = p(x_1, x_3)$ . Le fluide est soumis, sur sa surface libre  $x_3 = h$ , à la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}}$ . Il vérifie par ailleurs la condition d'adhérence avec le plan  $x_3 = 0$ . Enfin l'on désigne par  $g$  l'accélération de la pesanteur.

1. Le fluide est tout d'abord supposé newtonien, de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$ .
  - (a) Donner, après avoir vérifié l'incompressibilité, les équations différentielles dont  $v$  et  $p$  sont solutions.

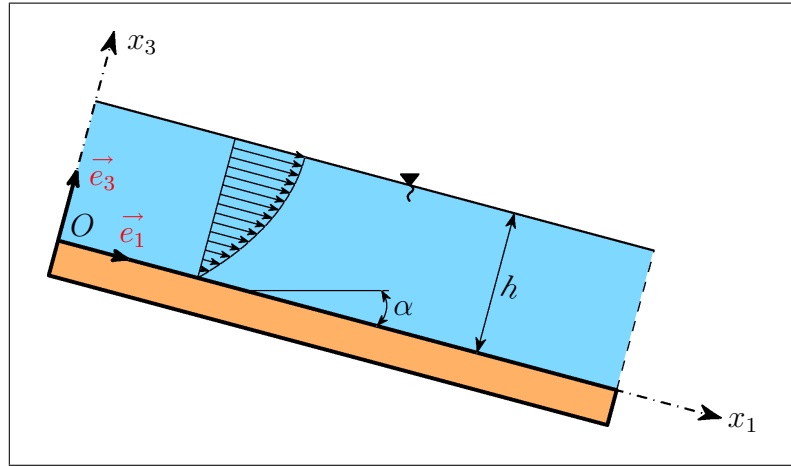


FIG. 5.21 – Fluide visqueux sur un plan incliné

- (b) Écrire la condition d'adhérence du fluide avec le plan  $x_3 = 0$  puis donner l'expression du vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\vec{e}_3$  du plan  $x_3 = h$ . Quelles relations doivent alors vérifier  $p(x_1, x_3)$  et  $v'(x_3)$  en  $x_3 = h$  ?
- (c) Dédire des questions 1a et 1b les expressions de  $p$  et  $v$  ainsi que celles des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (on donnera ces expressions en fonction de  $p_{\text{atm}}$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $\eta$  et  $x_3$ ).
2. Le fluide est à présent non newtonien, de type fluide de Bingham. Les hypothèses du début du problème étant maintenues, on suppose de plus que les contraintes sont de forme identique à celles obtenues précédemment pour un fluide newtonien, c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p(x_3) & 0 & \sigma_{13}(x_3) \\ 0 & -p(x_3) & 0 \\ \sigma_{13}(x_3) & 0 & -p(x_3) \end{bmatrix}$$

On a alors, pour un tel fluide,  $\mathbf{D} = Y \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^v\| - s_0 \right) \frac{1}{2\eta} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\boldsymbol{\sigma}^v\|} \right) \boldsymbol{\sigma}^v$  où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside,  $\boldsymbol{\sigma}^v = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{\delta}$  le tenseur des contraintes visqueuses et où  $s_0 > 0$  est une constante mécanique caractéristique du fluide (seuil d'écoulement).

- (a) Soient  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  et  $a_3 \in [0, h]$  quelconques mais fixés, et soit  $\mathcal{V}$  le volume fluide défini par  $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0, a_1] \times [0, a_2] \times [a_3, h]\}$ . Appliquer le théorème d'Euler à  $\mathcal{V}$  et en déduire les expressions de  $p(x_3)$  et de  $\sigma_{13}(x_3)$ ,  $x_3 \in [0, h]$  (on donnera ces expressions en fonction de  $p_{\text{atm}}$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $h$ , et  $x_3$ ).
- (b) Donner, en fonction de  $s_0$ ,  $\rho$ ,  $g$  et  $h$ , la valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  déclenchant l'écoulement.
- (c) On suppose que  $\alpha \geq \alpha_0$ . Déterminer, en fonction de  $s_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\alpha$ , la valeur  $x_0$  de  $x_3$  au delà de laquelle  $\mathbf{D} = 0$ . Donner alors, en tirant notamment parti de la condition d'adhérence en  $x_3 = 0$ , l'expression de  $v$  dans la zone  $x_3 \in [0, x_0]$  puis

achever la détermination de  $v$  pour  $x_3 \in [x_0, h]$  (dans ces deux zones on exprimera  $v$  en fonction de  $\rho, g, \alpha, \eta, x_0$  et  $x_3$ ).

### P5.9 Fluide visqueux non-newtonien

On se propose d'étudier l'écoulement rectiligne et permanent d'un fluide visqueux non-newtonien et incompressible dans une conduite cylindrique de révolution de rayon  $R$  (figure 5.22). Le comportement de ce fluide est régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\sigma}^v$  ( $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^v$  où  $\eta$  est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici  $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta_0} \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{\sigma}^v\|}{\sqrt{2}s_0}\right) \boldsymbol{\sigma}^v$  où  $\eta_0 > 0$  et  $s_0 > 0$  sont des constantes mécaniques caractéristiques du fluide.

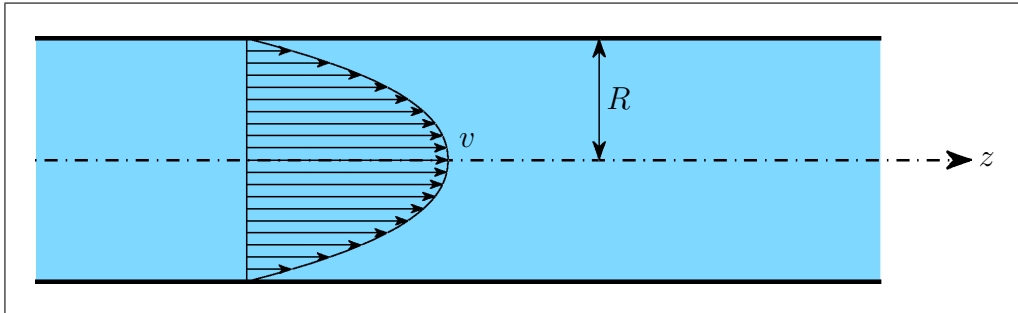


FIG. 5.22 – Écoulement d'un fluide non-newtonien dans une conduite cylindrique

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (figure 5.22) adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_z$  où  $v$  est une fonction inconnue des variables  $r$  et  $z$  que l'on se propose à présent de déterminer.

1. Montrer qu'en fait  $v$  ne dépend que de  $r$ . En déduire alors la forme du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\sigma}^v$  où  $p$  désigne la pression. Préciser le degré de dépendance des composantes non diagonales de  $\boldsymbol{\sigma}$  vis-à-vis des variables  $r$  et  $z$ .
2. Des équations indéfinies du mouvement déduire que la pression  $p$  est indépendante de  $r$  et que son gradient est constant. On pose alors, dans tout ce qui suit,  $\frac{dp}{dz} = -G$  et l'on choisit  $G > 0$  de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des  $z$  positifs.
3. Déduire des résultats de la question 2 l'expression de  $\sigma_{rz}$  en fonction de  $G$  et  $r$  puis donner, en fonction de  $G, \eta_0, s_0, R$  et  $r$  et après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en  $r = R$ , celle de  $v$ .
4. Donner, en fonction de  $G, s_0, \eta_0$  et  $R$ , l'expression du débit volumique  $Q$  du fluide à travers les sections droites de la conduite.



5. Des résultats de la question 3 déduire, en fonction de  $G$  et  $R$ , l'expression de la force de frottement  $\vec{F}$  par unité de longueur qu'exerce le fluide sur les parois de la conduite, puis retrouver ce résultat grâce au théorème d'Euler. Quels commentaires vous inspire ce dernier si on le compare à celui de la question 3 de l'exercice E5.8?

### P5.10 Viscosimètre cône-plan

On considère l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$  entre une plaque horizontale circulaire et un cône de révolution d'axe vertical  $Oz$  et de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . La plaque horizontale est fixe tandis que le cône est animé d'un mouvement de rotation uniforme d'axe  $Oz$  et de vitesse angulaire  $\omega$ , ainsi que l'illustre la figure 5.23.

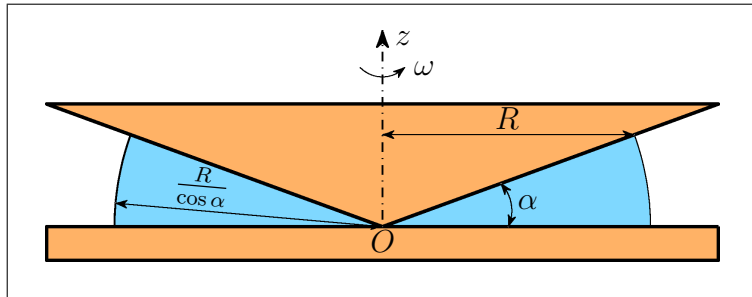


FIG. 5.23 – Viscosimètre cône-plan

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant négligeables, on suppose par ailleurs que  $\omega$  est suffisamment faible pour que les termes d'accélération le soient aussi. On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  associé au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  (voir la figure B.3, annexe B page 408) adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, \theta)\vec{e}_\varphi$ , où  $v$  est une fonction inconnue des variables  $r$  et  $\theta$  que l'on se propose ici de déterminer. Enfin l'on désigne par  $p_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique et par  $p(r, \theta)$  celle du fluide.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis déduire des équations de Navier-Stokes l'expression de  $p$  ainsi que l'équation aux dérivées partielles dont  $v$  est solution.
2. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme  $v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ . Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , que  $g(\frac{\pi}{2}) = 0$  et que  $f$  est une fonction linéaire de  $r$ .
3. Établir, en s'appuyant sur les résultats des questions 1 et 2, l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire  $g$  puis résoudre cette dernière après avoir posé  $h(\theta) = \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{g(\theta)}{\sin \theta} \right) = g'(\theta) - \cot \theta g(\theta)$ ,  $\forall \theta \in ]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}[$ . Donner alors l'expression finale de  $v$ .

4. Des résultats obtenus aux questions 1 et 3 déduire l'expression des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
5. Soit  $C$  le couple nécessaire à entretenir le mouvement de rotation de la partie conique du viscosimètre. Donner, en fonction de  $C$  et  $\omega$  ainsi que des caractéristiques géométriques  $R$  et  $\alpha$  du volume fluide cisailé, l'expression de la viscosité  $\eta$ .

### 5.5.3 Indications et éléments de réponse

#### E5.2 Théorème d'Archimède

On a,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\vec{e}_i \cdot \vec{\mathcal{R}}_c^e = - \int_{\mathcal{S}} p \vec{e}_i \cdot \vec{n} ds = - \int_{\mathcal{V}} \partial_i p dv$  ce qui donne bien, puisque  $\text{grad}_x p = -\rho g \vec{e}_2$ ,  $\vec{\mathcal{R}}_c^e = Mg \vec{e}_2$ . Soit alors  $\vec{\mathcal{M}}_c^e$  le moment résultant au point  $G$  des actions de contact s'exerçant sur la frontière  $\mathcal{S}$  du solide et soit  $\vec{e}$  un vecteur unitaire quelconque mais fixé. On obtient, en effectuant les développements relativement au repère orthonormé direct  $R = (G, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,  $\vec{e} \cdot \vec{\mathcal{M}}_c^e = - \int_{\mathcal{S}} (\vec{e} | \vec{x} | p \vec{n}) ds = - \int_{\mathcal{S}} \epsilon_{ijk} e_i x_j p n_k ds$  c'est-à-dire  $\vec{e} \cdot \vec{\mathcal{M}}_c^e = - \int_{\mathcal{V}} \partial_k (\epsilon_{ijk} e_i x_j p) dv = - \int_{\mathcal{V}} \epsilon_{ijk} e_i x_j \partial_k p dv = g e_3 \int_{\mathcal{V}} \rho x_1 dv - g e_1 \int_{\mathcal{V}} \rho x_3 dv$ . On a donc,  $\forall \vec{e}$ ,  $\vec{e} \cdot \vec{\mathcal{M}}_c^e = 0$  ce qui achève la démonstration du théorème.

#### E5.3 Réservoir cylindrique en rotation

1. De  $\text{grad } p = \rho(-g \vec{e}_z + \omega^2 x \vec{e}_x)$  on tire, en désignant par  $p_0$  la pression atmosphérique,  $p(x, z) = p_0 + \rho(\frac{1}{2}\omega^2 x^2 - gz)$ . La surface libre du fluide est donc la parabole d'équation  $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$ .
2. Les surfaces isobares sont les paraboles d'équations  $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 - \frac{p_{\text{cste}} - p_0}{\rho g}$ ,  $p_{\text{cste}} \geq p_0$ , tandis que celles d'égale pression étoilée correspondent aux cylindres de rayons  $r \in [0, R]$  et de mêmes axes de révolution  $Oz$ .
3. De l'incompressibilité du fluide on tire, avec les notations de la figure 5.4,  $h - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$ . L'équation de la surface libre fournissant par ailleurs  $h - h_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$ , on a alors  $r_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$ .
4. De  $h_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \geq 0$  il découle immédiatement que  $\omega_l = \frac{2}{R} \sqrt{gh}$ .

#### E5.4 Principe du venturi

Soient  $v_1$  et  $p_1$  (resp<sup>t</sup>  $v_2$  et  $p_2$ ) la vitesse et la pression du fluide dans la section (1) (resp<sup>t</sup> dans la section (2)) de la conduite. Le théorème de Bernoulli appliqué aux points de ces sections situés sur une même ligne de courant donne, en l'absence d'actions mécaniques à distance,  $\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$ . La conservation du débit volumique  $Q$  s'écrivant par ailleurs  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ , on obtient alors, en combinant ces deux relations,  $Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$ .

### E5.5 Tube de Pitot

1. Le point  $A$  est un point d'arrêt du fluide :  $v_A = 0$ . Le théorème de Bernoulli fournit alors  $p_A = p + \frac{1}{2}\rho v^2$ .
2. Les dimensions du tube étant faibles, on peut admettre que les caractéristiques de l'écoulement ne sont pas modifiées au point  $B$ . On a donc ici  $v_B = v$  et  $p_B = p$ .
3. Soit  $g$  l'accélération de la pesanteur. Il vient alors, avec les notations de la figure 5.6 (c) et compte tenu des résultats des questions 1 et 2,  $p_A - p_B = h\rho'g = \frac{1}{2}\rho v^2$ , ce qui donne finalement  $v = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}2gh}$ .

### E5.6 Ajustage de Borda

1. On trouve, en appliquant le théorème de Bernoulli aux points  $M$  et  $M'$  de la ligne de courant représentée sur la figure 5.7,  $\vec{v} = \sqrt{2gh}\vec{e}_1$ .
2. La résultante des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le volume fluide  $ABCDEFGHIJKA$  se réduit ici à  $h\rho g S \vec{e}_1$  tandis que le débit des quantités de mouvement à travers sa frontière a pour expression  $2h\rho g s \vec{e}_1$ . On en déduit alors  $c = \frac{1}{2}$  puis  $Q = \rho S \sqrt{\frac{gh}{2}}$ .

### E5.7 Auget Pelton

Du théorème de Bernoulli on tire tout d'abord, avec les notations de la figure 5.8,  $v_0 = v_1$ . De la conservation du débit massique on déduit ensuite  $S_0 = \Sigma_1$ , où  $\Sigma_1$  désigne l'aire de la section droite du jet de fluide à la sortie de l'auget. On a donc  $S_1 = \Sigma_1 \cos \alpha = S_0 \cos \alpha$ . En appliquant enfin au volume fluide représenté sur la figure 5.8 le théorème d'Euler en projection sur l'axe  $Oz$  nous obtenons  $-F = -\rho v_0^2 S_0 - \rho v_1^2 S_1$ , ce qui donne finalement  $F = \rho v_0^2 S_0 (1 + \cos \alpha)$ .

### E5.8 Tube de Poiseuille

1. De l'incompressibilité du fluide il découle tout d'abord que  $\partial_z v = 0$ . Des équations de Navier-Stokes en projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$  on tire ensuite successivement  $\partial_r p = 0$ , où  $p$  désigne la pression au sein du fluide, puis  $\frac{dp}{dz} = \eta \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) = -G$ , où  $G$  est une constante que l'on choisit strictement positive de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des  $z$  positifs. De  $\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{G}{\eta}$  on déduit alors, puisque  $v(R) = 0$  et que la vitesse  $v_0$  du fluide aux points de l'axe de la conduite ne peut être infinie,  $v(r) = \frac{G}{4\eta} (R^2 - r^2)$ .
2. On trouve aisément  $Q = \frac{\Pi G}{8\eta} R^4$ .
3. On a  $\vec{F} = F \vec{e}_z$  avec  $F = -2\Pi R \sigma_{rz}(R)$ . De  $\sigma_{rz} = 2\eta D_{rz}$  et de  $D_{rz} = \frac{1}{2} v'(r)$  on tire alors  $F = \Pi G R^2$  et l'on obtient donc finalement, puisque  $v_0 = \frac{G R^2}{4\eta}$ ,  $F = 4\Pi \eta v_0$ .

### E5.9 Viscosimètre plan-plan

1. On vérifie aisément que  $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ . Les actions mécaniques à distance ainsi que les termes d'accélération étant négligeables, les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à  $\partial_r p(r, z) = \partial_z p(r, z) = 0$  et  $\partial_{zz}^2 v(r, z) + \partial_r \left( \partial_r v(r, z) + \frac{v(r, z)}{r} \right) = 0$ ,  $\forall (r, z) \in ]0, R[ \times ]0, h[$ . On a donc  $p(r, z) = p_{\text{atm}}$ ,  $\forall (r, z) \in [0, R] \times [0, h]$ .
2. De  $v(r, 0) = f(r)g(0) = 0$ ,  $\forall r \in [0, R]$ , on tire tout d'abord  $g(0) = 0$ . De  $v(r, h) = f(r)g(h) = \omega r$ ,  $\forall r \in [0, R]$ , on déduit ensuite  $f(r) = \frac{\omega}{g(h)} r$ ,  $\forall r \in [0, R]$ . L'équation aux dérivées partielles obtenue à la question 1 se réduit alors à  $g''(z) = 0$ ,  $\forall z \in ]0, h[$ , ce qui donne, puisque  $g(0) = 0$ ,  $g(z) = Az$ , où  $A$  est une constante. On a donc  $g(h) = Ah$  et l'on obtient finalement  $v(r, z) = \frac{\omega}{h} r z$ ,  $\forall (r, z) \in [0, R] \times [0, h]$ .
3. Des résultats obtenus aux questions 1 et 2 il découle que les seules composantes non nulles des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont  $D_{\theta z} = \frac{\omega}{2h} r$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p_{\text{atm}}$  et  $\sigma_{\theta z} = \frac{\eta\omega}{h} r$ .
4. Soit  $z_0 \in [0, h]$  quelconque mais fixé. L'équilibre en moment du cylindre fluide compris entre les plans  $z = z_0$  et  $z = h$  fournit  $C - \int_0^R r \sigma_{\theta z}(r) 2\pi r \, dr = 0$  c'est-à-dire  $C = \frac{\Pi\eta\omega}{2h} R^4$ . On a donc  $\eta = \frac{2Ch}{\Pi\omega R^4}$ .

### E5.10 Torsion d'un disque annulaire

1. Les équations de Lamé-Navier se réduisent ici à  $\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}_x \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  ce qui donne  $u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$ ,  $\forall r \in ]r_1, r_2[$ .
2. De  $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_\theta$  on déduit tout d'abord que les seules composantes non nulles des tenseurs des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont  $\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(u'(r) - \frac{u(r)}{r})$  et  $\sigma_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{r\theta}$ . L'équilibre en moment de la portion de disque comprise entre le contour  $\mathcal{C}_1$  et le cercle de rayon  $r \in [r_1, r_2]$  quelconque mais fixé impose alors  $C + 2\Pi r^2 h \sigma_{r\theta}(r) = 0$  et l'on a donc,  $\forall r \in [r_1, r_2]$ ,  $\sigma_{r\theta}(r) = -\frac{C}{2\Pi r^2 h}$ .
3. L'équation différentielle ordinaire obtenue à la question 1 a pour solution générale  $u(r) = Ar + \frac{B}{r}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes à déterminer. Des résultats de la question 2 on tire tout d'abord  $B = \frac{1+\nu}{E} \frac{C}{2\Pi h}$ . On a ensuite, puisque  $u(r_2) = 0$ ,  $A = -\frac{1+\nu}{E} \frac{C}{2\Pi r_2^2 h}$ , si bien que l'on obtient finalement  $u(r) = \frac{1+\nu}{E} \frac{C}{2\Pi h} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right)$ ,  $\forall r \in [r_1, r_2]$ .
4. On trouve  $\omega = \frac{u(r_1)}{r_1} = \frac{1+\nu}{E} \frac{C}{2\Pi h} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}$ .

### E5.11 Sphère creuse sous pression

1. Les équations de Lamé-Navier se réduisent ici à  $\operatorname{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  de sorte que l'on a  $u''(r) + \frac{2u'(r)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2} = 0$ ,  $\forall r \in ]r_1, r_2[$ . La solution générale de cette équation différentielle ordinaire s'obtient ensuite en cherchant des solutions particulières de la forme  $u(r) = r^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On trouve alors  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -2$ .

2. De  $u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$  et de la loi de Hooke il découle que les seules composantes non nulles des tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont ici  $\varepsilon_{rr} = A - 2\frac{B}{r^3}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3}$ ,  $\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A - 4\mu\frac{B}{r^3}$  et  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (3\lambda + 2\mu)A + 2\mu\frac{B}{r^3}$ .
3. De  $\sigma_{rr}(r_1) = -p_1$ ,  $\sigma_{rr}(r_2) = -p_2$  et des résultats de la question 2 on déduit  $A = \frac{1}{3\lambda+2\mu} \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}$  ainsi que  $B = \frac{1}{4\mu} (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}$  si bien que l'on a finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r) = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[ \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{3\lambda + 2\mu} r + \frac{(p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3}{4\mu} \frac{1}{r^2} \right] \\ \varepsilon_{rr} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[ \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{3\lambda + 2\mu} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3}{2\mu} \frac{1}{r^3} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[ \frac{p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3}{4\mu} \frac{1}{r^3} \right] \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[ (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) - (p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3 \frac{1}{r^3} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left[ (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) + (p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3 \frac{1}{2r^3} \right] \end{array} \right. \quad \forall r \in [r_1, r_2]$$

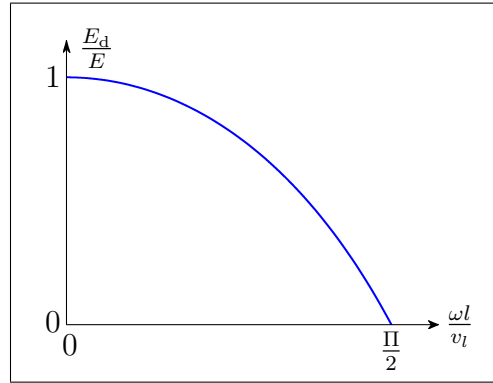
### E5.12 Vibrations longitudinales d'une poutre

1. Des équations de Lamé-Navier on tire  $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ ,  $x \in ]0, l[$ ,  $t > 0$ . On en déduit alors  $v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .
2. L'équation aux dérivées partielles établie à la question 1 se réduit ici à  $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0$ ,  $x \in ]0, l[$ , ce qui donne  $u(x) = Ax + B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes à déterminer. De  $u(0) = 0$  et de  $\sigma_{xx} = E \frac{du}{dx} = \frac{\phi_0}{S}$  on déduit alors  $B = 0$  puis  $A = \frac{\phi_0}{ES}$  ce qui donne finalement  $u(x) = \frac{\phi_0 x}{ES}$ ,  $x \in [0, l]$ .
3. (a) Remarquons tout d'abord qu'une solution de la forme  $u(x, t) = u_0(x) \sin \omega t$  vérifie les conditions initiales  $u(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in [0, l]$ . L'équation aux dérivées partielles trouvée à la question 1 est alors satisfaite si l'on a  $u_0''(x) + \left(\frac{\omega}{v_l}\right)^2 u_0(x) = 0$ ,  $x \in ]0, l[$ , c'est-à-dire si  $u(x) = A \cos \frac{\omega}{v_l} x + B \sin \frac{\omega}{v_l} x$ . Des conditions aux limites  $u(0, t) = 0$  et  $\sigma_{xx}(l, t) = E \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\phi(t)}{S}$ ,  $t \geq 0$ , on tire alors  $A = 0$  et  $B = \frac{\phi_0}{ES} \left(\frac{\omega}{v_l} \cos \frac{\omega l}{v_l}\right)^{-1}$ . On obtient donc finalement  $u(x, t) = \frac{\phi_0}{ES} \left(\frac{\omega}{v_l} \cos \frac{\omega l}{v_l}\right)^{-1} \sin \frac{\omega}{v_l} x \sin \omega t$ .
- (b) On a  $E_d = E \frac{\omega l}{v_l} \cot \frac{\omega l}{v_l}$ . La figure 5.24 illustre les variations de  $\frac{E_d}{E}$  en fonction de  $\frac{\omega l}{v_l}$ .
- (c) La pulsation critique  $\omega_c$  est celle pour laquelle le module dynamique  $E_d$  tend vers zéro (phénomène de résonance). On a donc  $\omega_c = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  et  $f_c = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

### P5.1 Compression-confinement d'un cylindre creux

1. Les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  ont pour expression

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u'_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u'_z(z) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda\theta + 2\mu u'_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\theta + 2\mu \frac{u_r(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\theta + 2\mu u'_z(z) \end{bmatrix}$$

FIG. 5.24 – Variations de  $\frac{E_d}{E}$  en fonction de  $\frac{\omega l}{v_l}$ 

avec  $\theta = u'_r(r) + \frac{u_r(r)}{r} + u'_z(z)$ .

2. De  $\partial_z \sigma_{zz} = 0$  on déduit  $u''_z(z) = 0$ ,  $z \in ]0, H[$ , ce qui donne, avec  $u_z(0) = 0$  et  $u_z(H) = -u_0$ ,  $u_z(z) = -u_0 \frac{z}{H}$ ,  $z \in [0, H]$ .
3. De  $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$  on tire  $u''_r(r) + \frac{u'_r(r)}{r} - \frac{u_r(r)}{r^2} = 0$ ,  $r \in ]r_0, r_1[$ .
4. Il suffit de chercher des solutions particulières de la forme  $u_r(r) = r^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On obtient ensuite, puisque  $\sigma_{rr}(r_0) = -p_0$  et  $\sigma_{rr}(r_1) = -p_1$ ,  $B = \frac{p_0 - p_1}{2\mu} \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$  ainsi que  $A = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{u_0}{H} + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$ .
5. On trouve  $\varepsilon_{rr} = A - \frac{B}{r^2}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}$ ,  $\varepsilon_{zz} = -\frac{u_0}{H}$ ,  $\sigma_{rr} = \lambda(2A - \frac{u_0}{H}) + 2\mu(A - \frac{B}{r^2})$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = \lambda(2A - \frac{u_0}{H}) + 2\mu(A + \frac{B}{r^2})$  et  $\sigma_{zz} = \lambda(2A - \frac{u_0}{H}) - 2\mu \frac{u_0}{H}$ .
6. De  $B = 0$  on déduit immédiatement, compte tenu des résultats obtenus à la question 4,  $p_0 = p_1 = p$ . On a donc nécessairement, puisque  $A = 0$ ,  $p = \lambda \frac{u_0}{H}$ , ce qui donne finalement  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\lambda \frac{u_0}{H}$  et  $\sigma_{zz} = -(\lambda + 2\mu) \frac{u_0}{H}$ . Le critère de limite élastique de Tresca s'écrivant ici  $\max\{|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|\} \leq 2\tau_0$ , on a alors  $u_l = \frac{\tau_0}{\mu} H$ .
7. De  $\sigma_{zz} = 0$ , des résultats de la question 5 ainsi que de l'expression de  $A$  trouvée à la question 4 on tire la relation  $\frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda} \frac{u_0}{H}$ .
8. On a à nouveau, puisque  $B = 0$ ,  $p_0 = p_1 = p$ , ce qui donne, compte tenu de la relation obtenue à la question 7,  $p = -\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda} \frac{u_0}{H}$ . On en déduit alors  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p$  et l'on a donc, puisque  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $u_l = -\frac{\tau_0}{\mu} \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} H$ .
9. De  $\sigma_{zz} = 0$ , de  $A = 0$  ainsi que des résultats de la question 5 il découle immédiatement que  $u_0 = 0$ . On a alors, compte tenu de l'expression de  $A$  trouvée à la question 4,  $p_1 = p_0 \frac{r_0^2}{r_1^2}$  ce qui donne  $B = \frac{p_0}{2\mu} r_0^2$  puis  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -p_0 \frac{r_0^2}{r^2}$ . On obtient donc, puisque  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $p_l = \tau_0$ .
10. De  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  on déduit tout d'abord  $u_0 = 0$ . On a par ailleurs  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  ce qui donne  $\boldsymbol{\sigma} = -(3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T\boldsymbol{\delta}$  et l'on a donc nécessairement  $p_0 = p_1 = (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T$ .

### P5.2 Sertissage d'un cylindre

1. Soient respectivement  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$  les champs des déplacements, des déformations et des contraintes au sein du cylindre  $C^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Les déplacements du cylindre  $C^{(2)}$  étant non empêchés, on a  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{0}$  et l'on en déduit donc  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \beta\Delta T\boldsymbol{\delta}$ . Les déplacements orthoradiaux de  $C^{(2)}$  étant nuls, on a par ailleurs  $\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{u_r^{(2)}}{r}$ , ce qui donne  $u_r^{(2)}(r) = \beta\Delta T r$ . Le sertissage n'étant possible que si  $r_1 + u_r^{(2)}(r_1) \geq r_0$ , la valeur minimale qu'il faut donner à  $\Delta T$  est alors  $\Delta T_0 = \frac{r_0 - r_1}{\beta r_1}$ .
2. On obtient aisément,  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,

$$\begin{cases} u_r^{(i)''} + \frac{1}{r}u_r^{(i)'} - \frac{1}{r^2}u_r^{(i)} = 0 \\ u_z^{(i)''} = 0 \end{cases}$$

3. Soit  $i \in \{1, 2\}$  quelconque mais fixé. De  $u_z^{(i)''} = 0$  on déduit tout d'abord  $u_z^{(i)} = A^{(i)} + B^{(i)}z$ , où  $A^{(i)}$  et  $B^{(i)}$  sont deux constantes à déterminer. De  $u_z^{(i)}(0) = 0$  on tire ensuite  $A^{(i)} = 0$ . Enfin, de  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = E\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$  et de  $\sigma_{zz}^{(i)}(z = H) = 0$  on déduit  $u_z^{(i)'}(H) = 0$  c'est-à-dire  $B^{(i)} = 0$ , et l'on a donc finalement  $u_z^{(1)} = u_z^{(2)} = 0$ .
4. L'équation différentielle  $u_r^{(i)''} + \frac{1}{r}u_r^{(i)'} - \frac{1}{r^2}u_r^{(i)} = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , a pour solution générale  $u_r^{(i)} = A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{r}$ . Les déplacements de l'axe du cylindre  $C^{(1)}$  ne pouvant par ailleurs être infinis, on a alors  $u_r^{(1)} = A^{(1)}r$  et  $u_r^{(2)} = A^{(2)}r + \frac{B^{(2)}}{r}$  où  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  et  $B^{(2)}$  sont trois constantes à déterminer. De  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = E\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , de  $\sigma_{rr}^{(1)}(r = r_0) = \sigma_{rr}^{(2)}(r = r_1) = -p_0$  et de  $\sigma_{rr}^{(2)}(r = r_2) = 0$  on tire ensuite

$$\begin{cases} A^{(1)} = -\frac{p_0}{E} \\ A^{(2)} = \frac{p_0}{E} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ B^{(2)} = \frac{p_0}{E} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{cases}$$

5. Soient  $\mathcal{J}^{(1)}(A^{(1)})$  et  $\mathcal{J}^{(2)}(A^{(2)}, B^{(2)})$  les formes quadratiques définies par (5.132) et respectivement associées aux champs des déplacements  $u_r^{(1)} = A^{(1)}r$  et  $u_r^{(2)} = A^{(2)}r + \frac{B^{(2)}}{r}$  des cylindres  $C^{(1)}$  et  $C^{(2)}$ . On a alors

$$\begin{cases} \mathcal{J}^{(1)}(A^{(1)}) = \Pi E H A^{(1)2} r_0^2 + 2\Pi H p_0 A^{(1)} r_0^2 \\ \mathcal{J}^{(2)}(A^{(2)}, B^{(2)}) = \Pi E H \left( A^{(2)2} (r_2^2 - r_1^2) - B^{(2)2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) \\ \quad - 2\Pi H p_0 (A^{(2)} r_1^2 + B^{(2)}) \end{cases}$$

Soit par ailleurs  $\mathcal{J}(A^{(1)}, A^{(2)}, B^{(2)}) = \mathcal{J}^{(1)}(A^{(1)}) + \mathcal{J}^{(2)}(A^{(2)}, B^{(2)})$ . Le minimum global strict de cette forme quadratique étant atteint lorsque  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial A^{(1)}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial A^{(2)}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial B^{(2)}} = 0$ , il vient

$$\begin{cases} 2\Pi H (E A^{(1)} r_0^2 + p_0 r_0^2) = 0 \\ 2\Pi H (E A^{(2)} (r_2^2 - r_1^2) - p_0 r_1^2) = 0 \\ 2\Pi H \left( -E B^{(2)} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - p_0 \right) = 0 \end{cases}$$

et l'on retrouve bien les expressions de  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  et  $B^{(2)}$  obtenues à la question 4.

6. La condition de contact entre les deux cylindres s'écrivant  $r_0 + u_r^{(1)}(r_0) = r_1 + u_r^{(2)}(r_1)$ , il vient, en tirant parti des expressions de  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  et  $B^{(2)}$  établies à la question 4,

$$p_0 = E \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}$$

7. Des résultats obtenus aux questions 4 et 6 on tire

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = -\frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}} r \vec{e}_r \\ \mathbf{u}^{(2)} = \frac{(r_0 - r_1)r_1^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \left( r + \frac{r_2^2}{r} \right) \vec{e}_r \end{cases}$$

Les composantes non nulles de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  ont alors pour expression

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{(1)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}} \\ \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -E \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}} \end{cases}$$

tandis que celles de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  s'écrivent

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^{(2)} = \frac{(r_0 - r_1)r_1^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{(r_0 - r_1)r_1^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{rr}^{(2)} = E \frac{(r_0 - r_1)r_1^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = E \frac{(r_0 - r_1)r_1^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

8. L'expression des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  établie à la question 7 montre qu'au sein du cylindre  $C^{(1)}$  le critère de Tresca adopte la forme  $|\sigma_{rr}| \leq 2\tau_0$ , ce qui donne

$$\frac{(r_0 - r_1)(r_2^2 - r_1^2)}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \leq \frac{2\tau_0}{E}$$

Dans le cylindre  $C^{(2)}$ , les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  trouvées lors de cette même question sont telles que le critère de Tresca s'y traduit par  $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \leq 2\tau_0$ . La valeur de  $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|$  étant maximale pour  $r = r_1$ , il vient alors

$$\frac{(r_0 - r_1)r_2^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} \leq \frac{\tau_0}{E}$$



La satisfaction de cette dernière inégalité imposant à la précédente d'être vérifiée de façon stricte, c'est donc le cylindre  $C^{(2)}$  qui est susceptible de plastifier le premier. Le sertissage s'effectuera alors sans plastification si et seulement si

$$\frac{(r_0 - r_1)r_2^2}{r_0(r_2^2 - r_1^2) + r_1(r_1^2 + r_2^2)} < \frac{\tau_0}{E}$$

### P5.3 Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre)

1. Les équations de Lamé-Navier se résument ici à  $\mathbf{grad}_x(\operatorname{div}_x \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  ce qui donne  $u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$ ,  $\forall r > r_0$ , équation différentielle ordinaire ayant pour solution générale  $u(r) = Ar + \frac{B}{r}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux constantes à déterminer. De  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 0$  on déduit alors tout d'abord  $A = 0$ , de sorte que les seules composantes non nulles des tenseurs des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  se réduisent respectivement à  $\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{B}{r^2}$  et  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -2\mu\frac{B}{r^2}$ . On a ensuite, puisque  $\sigma_{rr}(r_0) = -p_0$ ,  $B = \frac{p_0}{2\mu}r_0^2$ , et l'on obtient finalement  $u(r) = \frac{p_0}{2\mu}\frac{r_0^2}{r}$ ,  $\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{p_0}{2\mu}\frac{r_0^2}{r^2}$  ainsi que  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -p_0\frac{r_0^2}{r^2}$ ,  $r \geq r_0$ .
2. Le critère de limite élastique de Tresca s'écrivant ici  $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = 2p_0\frac{r_0^2}{r^2} \leq \sigma_0$ , la solution obtenue à la question 1 reste valable tant que  $p_0 < \frac{\sigma_0}{2} = p_l$ .
3. De  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}$  et de l'expression  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_0$  du critère de limite élastique de Tresca on tire tout d'abord  $\sigma_{rr} = \sigma_0 \ln r + C$ , où  $C$  est une constante à déterminer. De  $\sigma_{rr}(r_0) = -p_0$  on déduit ensuite  $C = -\sigma_0 \ln r_0 - p_0$  ce qui donne finalement  $\sigma_{rr} = -p_0 + \sigma_0 \ln \frac{r}{r_0}$  et  $\sigma_{\theta\theta} = -p_0 + \sigma_0(1 + \ln \frac{r}{r_0})$ ,  $r \in [r_0, r_1]$ .
4. La continuité des contraintes en  $r = r_1$  implique que soient simultanément satisfaites les relations  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_0$  (zone plastique  $r < r_1$ ) et  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta}$  (zone élastique  $r > r_1$  où la solution en contrainte est de forme analogue à celle établie à la question 1). On a donc nécessairement  $\sigma_{rr}(r_1) = -\sigma_{\theta\theta}(r_1) = -\frac{\sigma_0}{2} = -p_l$  ce qui donne, compte tenu des résultats de la question 3,  $r_1 = r_0 \exp(\frac{p_0}{\sigma_0} - \frac{1}{2})$ .
5. On a, pour  $r \geq r_1$  et compte tenu des résultats obtenus à la question 1,  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -2\mu\frac{B}{r^2}$ , où la constante  $B$  est à déterminer. De  $\sigma_{rr}(r_1) = -\sigma_{\theta\theta}(r_1) = -\frac{\sigma_0}{2}$  on tire alors  $B = \frac{\sigma_0}{4\mu}r_1^2$  et l'on obtient donc finalement  $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\sigma_0}{2}\frac{r_1^2}{r^2}$ ,  $r \geq r_1$ .
6. La solution élastoplastique obtenue aux questions 3, 4 et 5 reste valable tant que  $\sigma_{\theta\theta}(r_0) \geq 0$  c'est-à-dire tant que  $p_0 \leq \sigma_0 = 2p_l$ .

### P5.4 Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné

1. On trouve

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}u'_1(x_2) & 0 \\ \frac{1}{2}u'_1(x_2) & u'_2(x_2) & \frac{1}{2}u'_3(x_2) \\ 0 & \frac{1}{2}u'_3(x_2) & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}u_2'(x_2) & \frac{E}{2(1+\nu)}u_1'(x_2) & 0 \\ \frac{E}{2(1+\nu)}u_1'(x_2) & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}u_2'(x_2) & \frac{E}{2(1+\nu)}u_3'(x_2) \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)}u_3'(x_2) & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}u_2'(x_2) \end{bmatrix}$$

2. L'expression de  $\boldsymbol{\sigma}$  obtenue à la question 1 montre que les équations indéfinies de l'équilibre se réduisent ici à  $\frac{d\sigma_{12}}{dx_2} + \rho g \sin \alpha = 0$ ,  $\frac{d\sigma_{22}}{dx_2} - \rho g \cos \alpha = 0$  et  $\frac{d\sigma_{23}}{dx_2} = 0$  ce qui donne, puisque  $\sigma_{12}(h) = \sigma_{22}(h) = \sigma_{23}(h) = 0$ ,  $\sigma_{12} = \rho g(h - x_2) \sin \alpha$ ,  $\sigma_{22} = -\rho g(h - x_2) \cos \alpha$  et  $\sigma_{23} = 0$ .
3. Des résultats obtenus aux questions 1 et 2 et de  $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0$  on tire  $u_1(x_2) = \frac{2(1+\nu)}{E} \rho g(hx_2 - \frac{x_2^2}{2}) \sin \alpha$ ,  $u_2(x_2) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \rho g(hx_2 - \frac{x_2^2}{2}) \cos \alpha$  et  $u_3(x_2) = 0$ ,  $\forall x_2 \in [0, h]$ .
4. On trouve aisément  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}u_2'(x_2) = -\frac{\nu}{1-\nu} \rho g(h - x_2) \cos \alpha$ .
5. On a, puisque  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\rho g(h - x_2) \cos \alpha$ . Le critère de limite élastique de Tresca se réduit donc ici à  $|\sigma_{12}| = \rho g(h - x_2) \sin \alpha \leq \tau_0$ ,  $\forall x_2 \in [0, h]$ , ce qui donne  $h_l = \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha}$ .
6. On doit à nouveau satisfaire la relation  $\sin \alpha \leq \frac{\tau_0}{\rho g(h-x_2)}$ ,  $\forall x_2 \in [0, h]$ . On a alors  $\alpha_l = \arcsin \frac{\tau_0}{\rho gh}$  si  $\frac{\tau_0}{\rho gh} \leq 1$  et  $\alpha_l = \frac{\Pi}{2}$  autrement. Les variations de  $\alpha_l$  en fonction de  $h$  sont représentées sur la figure 5.25 (a).

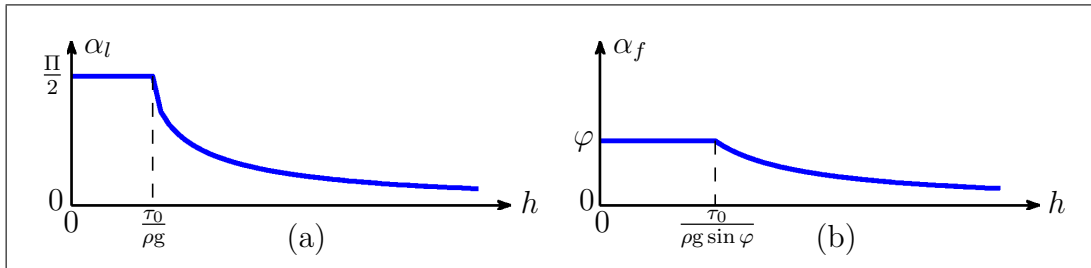


FIG. 5.25 – Variations de  $\alpha_l$  et  $\alpha_f$  en fonction de  $h$

7. De  $\frac{|\sigma_{12}|}{|\sigma_{22}|} = \tan \alpha$ ,  $\forall x_2 \in [0, h]$ , on déduit facilement  $\alpha_g = \varphi$ .
8. On a  $\alpha_f = \arcsin \frac{\tau_0}{\rho gh}$  si  $\frac{\tau_0}{\rho gh} \leq \sin \varphi$  et  $\alpha_l = \varphi$  autrement. La figure 5.25 (b) illustre les variations de  $\alpha_f$  en fonction de  $h$ .

### P5.5 Pale d'hélicoptère

1. De la forme du champ des déplacements et de  $\nu = 0$  il découle que les seules composantes non nulles des tenseurs des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont ici  $\varepsilon_{xx} = u'(x)$  et  $\sigma_{xx} = E u'(x)$ . On a donc  $\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \rho \omega^2 x = 0$ ,  $\forall x \in ]0, l[$  ce qui donne, puisque  $\sigma_{xx}(l) = 0$ ,  $\sigma_{xx} = \frac{\rho \omega^2}{2}(l^2 - x^2)$ .
2. Des résultats de la question 1 et de  $u(0) = 0$  on déduit aisément  $u(x) = \frac{\rho \omega^2}{2E}(l^2 x - \frac{x^3}{3})$ . On a alors  $u(l) = \frac{\rho \omega^2 l^3}{3E}$ .

3. On a, avec  $S = 1$  et compte tenu des résultats obtenus à la question 1,  $J(u) = \int_0^l \frac{1}{2} E u'^2(x) dx - \int_0^l \rho \omega^2 x u(x) dx$ . On obtient donc, dans le cas où  $u(x) = \alpha x$ ,  $J(\alpha) = \frac{1}{2} E \alpha^2 l - \rho \omega^2 \alpha \frac{l^3}{3}$ . Cette fonction étant minimale pour  $\alpha = \frac{\rho \omega^2 l^2}{3E}$ , on en déduit alors la solution approchée  $u^{(1)}(x) = \frac{\rho \omega^2 l^2}{3E} x$  qui ne coïncide avec la solution exacte obtenue à la question 2 qu'en  $x = 0$  et  $x = l$ .
4. On obtient cette fois

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{E}{2} \left[ \alpha^2 l + 2\alpha \beta l^2 + (4\beta^2 + 6\alpha\gamma) \frac{l^3}{3} + 3\beta\gamma l^4 + 9\gamma^2 \frac{l^5}{5} \right] - \rho \omega^2 \left[ \alpha \frac{l^3}{3} + \beta \frac{l^4}{4} + \gamma \frac{l^5}{5} \right]$$

La minimisation de cette fonction de trois variables conduit alors au système d'équations cramérien aux inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$

$$\begin{bmatrix} 1 & l & l^2 \\ 1 & \frac{4}{3}l & \frac{3}{2}l^2 \\ 1 & \frac{3}{2}l & \frac{9}{5}l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

dont la résolution fournit  $\alpha = \frac{\rho \omega^2 l^2}{2E}$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = -\frac{\rho \omega^2}{6E}$ . La solution approchée coïncide donc ici avec la solution exacte obtenue à la question 2, ce qui était prévisible dans la mesure où cette dernière appartient à l'espace d'approximation choisi.

5. On a ici

$$J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{E}{2} \left[ \alpha^2 l + 2\alpha \beta l^2 + (4\beta^2 + 6\alpha\gamma) \frac{l^3}{3} + 3\beta\gamma l^4 + 9\gamma^2 \frac{l^5}{5} \right] + \frac{E}{2} \left[ 2n\alpha \delta \frac{l^n}{n} + 4n\beta \delta \frac{l^{n+1}}{n+1} + 6n\gamma \delta \frac{l^{n+2}}{n+2} + n^2 \delta^2 \frac{l^{2n-1}}{2n-1} \right] - \rho \omega^2 \left[ \alpha \frac{l^3}{3} + \beta \frac{l^4}{4} + \gamma \frac{l^5}{5} + \delta \frac{l^{n+2}}{n+2} \right]$$

La minimisation de cette fonction de quatre variables conduit cette fois au système d'équations aux inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$

$$\begin{bmatrix} 1 & l & l^2 & l^{n-1} \\ 1 & \frac{4}{3}l & \frac{3}{2}l^2 & \frac{2n}{n+1} l^{n-1} \\ 1 & \frac{3}{2}l & \frac{9}{5}l^2 & \frac{3n}{n+2} l^{n-1} \\ 1 & \frac{2n}{n+1} l & \frac{3n}{n+2} l^2 & \frac{n^2}{2n-1} l^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{n+2} \end{bmatrix}$$

dont le déterminant  $\Delta = \frac{1}{60} \frac{(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2}{(n+1)^2 (n+2)^2 (2n-1)}$  nous montre qu'il est cramérien dès que  $n \geq 4$ . Les trois premières équations étant satisfaites pour  $\alpha = \frac{\rho \omega^2 l^2}{2E}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = -\frac{\rho \omega^2}{6E}$  et  $\delta = 0$ , il suffit alors de s'assurer que la dernière l'est également pour ces valeurs. On a donc bien  $\delta = 0$ ,  $\forall n \geq 4$ . Là encore la solution approchée s'identifie à la solution exacte trouvée à la question 2 puisque cette dernière appartient à l'espace d'approximation choisi.

### P5.6 Action d'un jet sur un obstacle

1. De  $Q = 2a\rho v_0 = 2 \int_0^b \rho v_0 f(x_2) dx_2$  on tire immédiatement  $I_1 = a$ .
2. Remarquons tout d'abord que l'on a  $p = p_{\text{atm}}$  sur  $AB$  et  $A'B'$ . Il découle alors du théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant  $AB$  (resp<sup>t</sup>  $A'B'$ ) que  $v_B = v_A = v_0$  (resp<sup>t</sup>  $v'_B = v'_A = v_0$ ). Enfin, de  $\gamma_2 = 0$  le long de  $AA'$  (resp<sup>t</sup>  $BB'$ ), où  $\gamma_2$  désigne la composante de l'accélération dans la direction de l'axe  $Ox_2$ , on déduit  $\partial_2 p = 0$  c'est-à-dire  $p = p_{\text{atm}}$ .
3. La résultante des forces de pression sur la surface fermée  $ABB'A'A$  étant nulle puisque  $p = p_{\text{atm}}$ , le théorème d'Euler en projection sur l'axe  $Ox_1$  se réduit ici à  $-F_1 = -2a\rho v_0^2 + 2 \int_0^b \rho v_0^2 f^2(x_2) dx_2$  ce qui donne  $F_1 = 2\rho v_0^2(a - I_2)$ .
4. Soient respectivement  $\mathcal{P}^i$  et  $\mathcal{P}^d$  la puissance des efforts intérieurs et la puissance dynamique dissipées dans le domaine fluide  $\mathcal{V}$  de frontière  $\mathcal{S} = ABB'A'A$ , et soit  $\mathcal{P}^e$  la puissance des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ce même domaine. On a tout d'abord, puisque  $I_1 = a$ ,  $\mathcal{P}^e = p_{\text{atm}}2av_0 - p_{\text{atm}}2 \int_0^b v_0 f(x_2) dx_2 = 2p_{\text{atm}}v_0(a - I_1) = 0$ . On a par ailleurs  $\mathcal{P}^d = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2) dv + \int_{\mathcal{S}} (\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2) \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  c'est-à-dire, puisque  $\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2) = 0$ ,  $\mathcal{P}^d = -2a \frac{1}{2} \rho v_0^3 + 2 \int_0^b \frac{1}{2} \rho v_0^3 f^3(x_2) dx_2 = -\rho v_0^3(a - I_3)$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrivant  $\mathcal{P}^e = \mathcal{P}^d + \mathcal{P}^i$ , on en déduit alors  $\mathcal{P}^i = \rho v_0^3(a - I_3)$ .

### P5.7 Écoulement dans une conduite de section carrée

1. De l'incompressibilité du fluide on déduit  $\partial_3 v = 0$ . Les seules composantes non nulles du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation et du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont alors  $D_{13} = \frac{1}{2} \partial_1 v$ ,  $D_{23} = \frac{1}{2} \partial_2 v$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ ,  $\sigma_{13} = \eta \partial_1 v$  et  $\sigma_{23} = \eta \partial_2 v$ .
2. L'accélération du fluide étant nulle puisque  $v$  ne dépend ni du temps ni de  $x_3$ , les équations indéfinies du mouvement en projection sur les axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  se réduisent ici, compte tenu des résultats de question 1, à  $\partial_1 p = \partial_2 p = 0$ . La pression  $p$  ne dépend donc que de  $x_3$  et l'équation indéfinie en projection sur le troisième axe fournit alors  $\frac{dp}{dx_3} = \eta(\partial_{11}^2 v + \partial_{22}^2 v) = -G$ , où  $G$  est une constante.
3. Détaillons le raisonnement pour la zone 1. On a ici  $v(x_1, x_2) = f(x_1)$  ce qui donne, puisque  $\partial_{11}^2 v + \partial_{22}^2 v = \frac{-G}{\eta}$ ,  $f''(x_1) = \frac{-G}{\eta}$  c'est-à-dire  $f(x_1) = \frac{-G}{2\eta} x_1^2 + Ax_1 + A'$ , où  $A$  et  $A'$  sont deux constantes. Des conditions aux limites  $v(a, x_2) = 0$ ,  $\forall x_2 \in [-a, a]$ , on tire alors  $f(a) = 0$  et l'on a donc  $f(x_1) = \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_1^2) - A(a - x_1)$ . Il suffit ensuite de réitérer ce raisonnement dans les zones 2, 3 et 4 pour obtenir finalement

$$\begin{aligned} \text{Zone 1 : } x_1 \geq 0 \text{ et } |x_2| \leq +x_1 &\Rightarrow v(x_1, x_2) = \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_1^2) - A(a - x_1) \\ \text{Zone 2 : } x_2 \geq 0 \text{ et } |x_1| \leq +x_2 &\Rightarrow v(x_1, x_2) = \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_2^2) - B(a - x_2) \\ \text{Zone 3 : } x_1 \leq 0 \text{ et } |x_2| \leq -x_1 &\Rightarrow v(x_1, x_2) = \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_1^2) + C(a + x_1) \\ \text{Zone 4 : } x_2 \leq 0 \text{ et } |x_1| \leq -x_2 &\Rightarrow v(x_1, x_2) = \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_2^2) + D(a + x_2) \end{aligned}$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont quatre constantes à déterminer.

4. La continuité de  $v$  aux points  $x_1 = x_2 = 0$  de l'axe  $Ox_3$  implique  $-A = -B = C = D$ . On vérifie alors que ces conditions assurent également la continuité de  $v$  sur les droites  $x_1 = \pm x_2$  des plans  $x_3 = \text{cste}$  et par conséquent en tout point de la conduite. On a donc bien  $v = \frac{G}{2\eta}(a^2 - z^2) - A(a - z)$ ,  $\forall z = \max\{|x_1|, |x_2|\} \in [0, a]$ . Évaluons à présent les contraintes tangentielles  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$ . Il vient, compte tenu de ce qui précède,

$$\begin{aligned} \text{Zone 1 : } x_1 \geq 0 \text{ et } |x_2| \leq +x_1 &\Rightarrow \sigma_{13} = -Gx_1 + \eta A & \sigma_{23} = 0 \\ \text{Zone 2 : } x_2 \geq 0 \text{ et } |x_1| \leq +x_2 &\Rightarrow \sigma_{13} = 0 & \sigma_{23} = -Gx_2 + \eta A \\ \text{Zone 3 : } x_1 \leq 0 \text{ et } |x_2| \leq -x_1 &\Rightarrow \sigma_{13} = -Gx_1 - \eta A & \sigma_{23} = 0 \\ \text{Zone 4 : } x_2 \leq 0 \text{ et } |x_1| \leq -x_2 &\Rightarrow \sigma_{13} = 0 & \sigma_{23} = -Gx_2 - \eta A \end{aligned}$$

Or on a, aux points  $x_1 = x_2 = 0$  de l'axe  $Ox_3$  et par raison de symétrie,  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , ce qui implique  $A = 0$ . On obtient donc finalement  $v = \frac{G}{2\eta}(a^2 - z^2)$ ,  $\forall z = \max\{|x_1|, |x_2|\} \in [0, a]$  et le débit volumique à travers une section droite  $x_3 = \text{cste}$  de la conduite vaut alors  $Q = 4 \int_0^a dx_1 \int_{-x_1}^{x_1} \frac{G}{2\eta}(a^2 - x_1^2) dx_2 = \frac{Ga^4}{\eta}$ .

5. Des résultats obtenus aux questions 2 et 4 on déduit  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -Gx_3 + G_0$ , où  $G_0$  est une constante, ainsi que

$$\begin{aligned} \text{Zone 1 : } x_1 \geq 0 \text{ et } |x_2| \leq +x_1 &\Rightarrow \sigma_{13} = -Gx_1 & \sigma_{23} = 0 \\ \text{Zone 2 : } x_2 \geq 0 \text{ et } |x_1| \leq +x_2 &\Rightarrow \sigma_{13} = 0 & \sigma_{23} = -Gx_2 \\ \text{Zone 3 : } x_1 \leq 0 \text{ et } |x_2| \leq -x_1 &\Rightarrow \sigma_{13} = -Gx_1 & \sigma_{23} = 0 \\ \text{Zone 4 : } x_2 \leq 0 \text{ et } |x_1| \leq -x_2 &\Rightarrow \sigma_{13} = 0 & \sigma_{23} = -Gx_2 \end{aligned}$$

La continuité des contraintes tangentielles  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  n'étant pas assurée sur les droites  $x_1 = \pm x_2$  des plans  $x_3 = \text{cste}$ , la solution trouvée à la question 4 n'est certainement pas la bonne.

6. On trouve, avec les valeurs de  $\sigma$  obtenues à la question 5,  $F = 8Ga^2$ . Le théorème d'Euler fournit quant à lui  $F = 4Ga^2$ , ce qui confirme la conclusion émise à la fin de cette question.

### P5.8 Fluide visqueux sur un plan incliné

1. (a) La fonction  $v$  ne dépendant que de  $x_3$ , on a  $\text{div}_x \mathbf{v} = 0$  et l'incompressibilité du fluide est donc bien vérifiée. Les seules composantes non nulles des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\sigma$  sont alors  $D_{13} = \frac{1}{2}v'(x_3)$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p(x_1, x_3)$  et  $\sigma_{13} = \eta v'(x_3)$ . L'accélération étant par ailleurs nulle puisque  $v$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $x_1$ , les équations indéfinies du mouvement non trivialement vérifiées se réduisent ici à

$$\begin{cases} -\partial_1 p(x_1, x_3) + \eta v''(x_3) + \rho g \sin \alpha = 0 & \text{(équation en projection sur } \vec{e}_1) \\ -\partial_3 p(x_1, x_3) - \rho g \cos \alpha = 0 & \text{(équation en projection sur } \vec{e}_3) \end{cases}$$

- (b) La condition d'adhérence du fluide avec la paroi  $x_3 = 0$  impose  $v(0) = 0$ . Le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\vec{e}_3$  du plan  $x_3 = h$  ayant d'autre part pour expression  $\vec{\sigma}_n = \eta v'(h)\vec{e}_1 - p(x_1, h)\vec{e}_3$  et pour valeur  $\vec{\sigma}_n = -p_{\text{atm}}\vec{e}_3$ , on en déduit  $v'(h) = 0$  et  $p(x_1, h) = p_{\text{atm}}, \forall x_1$ .
- (c) De l'équation indéfinie du mouvement en projection sur  $\vec{e}_3$  et de  $p(x_1, h) = p_{\text{atm}}, \forall x_1$ , on tire  $p(x_3) = p_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha (h - x_3)$ . L'équation indéfinie en projection sur  $\vec{e}_1$  jointe à  $v(0) = v'(h) = 0$  fournit ensuite  $v(x_3) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} (hx_3 - \frac{x_3^2}{2})$  et l'on obtient donc finalement  $D_{13} = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (h - x_3)$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p_{\text{atm}} - \rho g \cos \alpha (h - x_3)$  et  $\sigma_{13} = \rho g \sin \alpha (h - x_3)$ .
2. (a) Le théorème d'Euler appliqué au volume fluide  $\mathcal{V}$  donne, après simplifications,  $(h - a_3)\rho g \sin \alpha - \sigma_{13}(a_3) = 0$  et  $-(h - a_3)\rho g \cos \alpha - p_{\text{atm}} + p(a_3) = 0$ . Le réel  $a_3 \in [0, h]$ , bien que fixé, étant quelconque, on retrouve alors  $\sigma_{13}(x_3) = \rho g \sin \alpha (h - x_3)$  et  $p(x_3) = p_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha (h - x_3)$ .
- (b) Les équations de comportement se réduisant à  $D_{13} = Y(|\sigma_{13}| - s_0)\frac{1}{2\eta}(\sigma_{13} - s_0\frac{\sigma_{13}}{|\sigma_{13}|})$ , de  $\sigma_{13} = \rho g \sin \alpha (h - x_3)$  il ressort alors que l'écoulement du fluide ne peut se déclencher tant que  $\rho g h \sin \alpha \leq s_0$ . On a donc  $\alpha_0 = \arcsin(\frac{s_0}{\rho g h})$ .
- (c) De  $\sigma_{13} = \rho g \sin \alpha (h - x_3) \leq s_0$  on tire tout d'abord  $x_3 \geq h - \frac{s_0}{\rho g \sin \alpha} = x_0$ . Soit alors  $x_3 \in [0, x_0]$ . De  $D_{13} = \frac{1}{2}v'(x_3) = \frac{1}{2\eta}(\rho g \sin \alpha (h - x_3) - s_0)$  et de  $v(0) = 0$  on tire  $v(x_3) = \frac{1}{\eta}[\rho g \sin \alpha (hx_3 - \frac{x_3^2}{2}) - s_0 x_3]$ , c'est-à-dire, puisque  $s_0 = \rho g \sin \alpha (h - x_0)$ ,  $v(x_3) = \frac{1}{\eta}\rho g \sin \alpha (x_0 x_3 - \frac{x_3^2}{2}), \forall x_3 \in [0, x_0]$ . Soit à présent  $x_3 \in [x_0, h]$ . On a cette fois  $D_{13} = \frac{1}{2}v'(x_3) = 0$  ce qui donne, par continuité de  $v$  au point  $x_3 = x_0$ ,  $v(x_3) = \frac{1}{2\eta}\rho g \sin \alpha x_0^2, \forall x_3 \in [x_0, h]$ .

### P5.9 Fluide visqueux non-newtonien

1. De  $\text{div}_x \mathbf{v} = 0$  on déduit aisément  $\partial_z v = 0$ . La seule composante non nulle du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est alors  $D_{rz} = \frac{1}{2}v'(r)$  tandis que celles de  $\boldsymbol{\sigma}$  se réduisent à  $\sigma_{rz}$  et  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$ . Des équations de comportement on tire par ailleurs  $D_{rz} = \frac{1}{2\eta_0} \left(1 + \frac{|\sigma_{rz}|}{s_0}\right) \sigma_{rz}$  ce qui montre que  $\sigma_{rz}$ , tout comme  $D_{rz}$ , ne dépend que de  $r$ .
2. Les équations indéfinies du mouvement en projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$  donnent successivement  $\partial_r p = 0$  puis  $\frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \frac{dp}{dz} = -G$ .
3. De  $\frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\sigma_{rz}) = -G$  on tire tout d'abord, puisque  $\sigma_{rz}(0)$  ne peut être infini,  $\sigma_{rz} = -\frac{Gr}{2}$ . On a ensuite  $v'(r) = 2D_{rz} = \frac{1}{\eta_0} \left(1 + \frac{|\sigma_{rz}|}{s_0}\right) \sigma_{rz} = -\frac{G}{2\eta_0} \left(1 + \frac{Gr}{2s_0}\right) r$  ce qui donne finalement, puisque  $v(R) = 0$ ,  $v(r) = \frac{G}{4\eta_0} \left((R^2 - r^2) + \frac{G}{3s_0}(R^3 - r^3)\right)$ . La figure 5.22 illustre le profil des vitesses dans les sections droites de la conduite.
4. On trouve aisément  $Q = \frac{\pi G}{8\eta_0} \left(1 + \frac{2GR}{5s_0}\right) R^4$ .

5. On a  $\vec{F} = F\vec{e}_z$  avec  $F = -2\Pi R\sigma_{rz}(R)$ . De  $\sigma_{rz}(R) = -\frac{GR}{2}$  on tire alors  $F = \Pi GR^2$ . Le théorème d'Euler appliqué au volume fluide compris entre les sections de cotes  $z$  et  $z + 1$  donne par ailleurs, puisque  $v$  ne dépend que de  $r$ ,  $\Pi R^2(p(z) - p(z + 1))\vec{e}_z - F\vec{e}_z = \vec{0}$ . Le gradient de pression étant constant et égal à  $-G$ , on retrouve alors  $F = \Pi GR^2$ . Du fait de l'incompressibilité, ce résultat est identique à celui obtenu à la question 3 de l'exercice E5.8 pour le fluide visqueux newtonien.

### P5.10 Viscosimètre cône-plan

1. On vérifie aisément que  $\text{div}_x \mathbf{v} = 0$ . Les actions mécaniques à distance ainsi que les termes d'accélération étant négligeables, les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à  $\partial_r p(r, \theta) = \partial_\theta p(r, \theta) = 0$  et  $\partial_{rr}^2(rv(r, \theta)) + \partial_\theta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta v(r, \theta)) \right) = 0$ ,  $\forall (r, \theta) \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[ \times ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ . On a donc  $p(r, \theta) = p_{\text{atm}}$ ,  $\forall (r, \theta) \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[ \times ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ .
2. De  $v(r, \frac{\Pi}{2}) = f(r)g(\frac{\Pi}{2}) = 0$ ,  $\forall r \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[$ , on tire tout d'abord  $g(\frac{\Pi}{2}) = 0$ . De  $v(r, \frac{\Pi}{2} - \alpha) = f(r)g(\frac{\Pi}{2} - \alpha) = \omega r \cos \alpha$ ,  $\forall r \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[$ , on déduit ensuite  $f(r) = \frac{\omega \cos \alpha}{g(\frac{\Pi}{2} - \alpha)} r$ ,  $\forall r \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[$ .
3. De  $v(r, \theta) = \frac{\omega \cos \alpha}{g(\frac{\Pi}{2} - \alpha)} r g(\theta)$ ,  $\forall (r, \theta) \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[ \times ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ , et de l'équation aux dérivées partielles obtenue à la question 1 il découle  $g''(\theta) + \cot \theta g'(\theta) + (1 - \cot^2 \theta)g(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ . Cette équation différentielle ordinaire s'écrit encore, après avoir posé  $h(\theta) = g'(\theta) - \cot \theta g(\theta)$ ,  $h'(\theta) + 2 \cot \theta h(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ , ce qui donne  $h(\theta) = \frac{A}{\sin^2 \theta}$  où  $A$  est une constante. On a alors, puisque  $h(\theta) = \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{g(\theta)}{\sin \theta} \right)$  et  $g(\frac{\Pi}{2}) = 0$ ,  $g(\theta) = A \sin \theta \int_{\frac{\Pi}{2}}^{\theta} \frac{du}{\sin^3 u}$ ,  $\forall \theta \in ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ , et l'on obtient finalement,  $\forall (r, \theta) \in ]0, \frac{R}{\cos \alpha}[ \times ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$ ,

$$v(r, \theta) = \omega r \sin \theta \frac{\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\theta} \frac{du}{\sin^3 u}}{\int_{\frac{\Pi}{2} - \alpha}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{du}{\sin^3 u}}$$

4. Des résultats obtenus aux questions 1 et 3 il ressort que les seules composantes non nulles des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont  $D_{\theta\varphi} = -\frac{\omega}{2 \sin^2 \theta \int_{\frac{\Pi}{2} - \alpha}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{du}{\sin^3 u}}$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p_{\text{atm}}$  et  $\sigma_{\theta\varphi} = -\frac{\eta\omega}{\sin^2 \theta \int_{\frac{\Pi}{2} - \alpha}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{du}{\sin^3 u}}$ .
5. Soit  $\theta_0 \in ]\frac{\Pi}{2} - \alpha, \frac{\Pi}{2}[$  quelconque mais fixé. L'équilibre en moment du domaine fluide compris entre les plans  $\theta = \frac{\Pi}{2} - \alpha$  et  $\theta = \theta_0$  fournit  $C + \int_0^{\frac{R}{\cos \alpha}} r \sin \theta_0 \sigma_{\theta\varphi}(\theta_0) 2\Pi r \sin \theta_0 dr = 0$  c'est-à-dire  $C = \frac{2\Pi\eta\omega R^3}{3 \cos^3 \alpha \int_{\frac{\Pi}{2} - \alpha}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{du}{\sin^3 u}}$ .

On a donc

$$\eta = \frac{3C \cos^3 \alpha}{2\Pi\omega R^3} \int_{\frac{\Pi}{2} - \alpha}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{du}{\sin^3 u}$$





# Chapitre 6

## Introduction à la méthode des éléments finis


L'utilisation de méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis pour la résolution approchée des problèmes complexes issus de la physique est de nos jours devenue de plus en plus courante, en raison notamment des performances sans cesse croissantes des moyens de calcul. Ce chapitre constitue une brève introduction aux méthodes numériques connues sous le nom de MÉTHODES DE GALERKIN, dont la méthode des éléments finis est un exemple. Il se compose de deux parties principales.

Dans la première, nous nous attacherons à décrire les différents concepts liés à la mise en œuvre de telles méthodes : formulation variationnelle, problème approché de Galerkin, construction d'un espace d'éléments finis. Pour ce faire, nous nous appuierons sur un problème modèle intentionnellement simple et consistant en la recherche d'une unique fonction réelle de variable réelle, pour lequel une solution approchée obtenue par la méthode des éléments finis sera exhibée et comparée à sa solution analytique.

Dans la seconde partie, nous nous intéresserons à la résolution par éléments finis du problème de l'élastostatique infinitésimale étudié dans les chapitres précédents du cours. Nous y verrons notamment que les différents concepts précédemment décrits s'appliquent pareillement à ce problème. Enfin, nous illustrerons notre propos par un exemple de résolution numérique d'un problème particulier, l'équilibre d'un barrage poids en argile.

## 6.1 Étude d'un problème modèle : La corde sur fondation élastique

### 6.1.1 Le problème initial

 [pap611.html](#) On s'intéresse ici au problème mécanique schématisé par la figure 6.1. Une corde de longueur  $L$  égale à l'unité est solidaire d'une fondation élastique de raideur  $k$ . Elle est fixée à son extrémité gauche  $x = 0$ , tandis que son extrémité droite  $x = 1$  est soumise à une tension  $T$  inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle  $\theta = \arctan g$ , où  $g$  est un réel donné. Cette corde est par ailleurs soumise, dans la direction verticale, à une densité linéique de forces  $f$  connue.

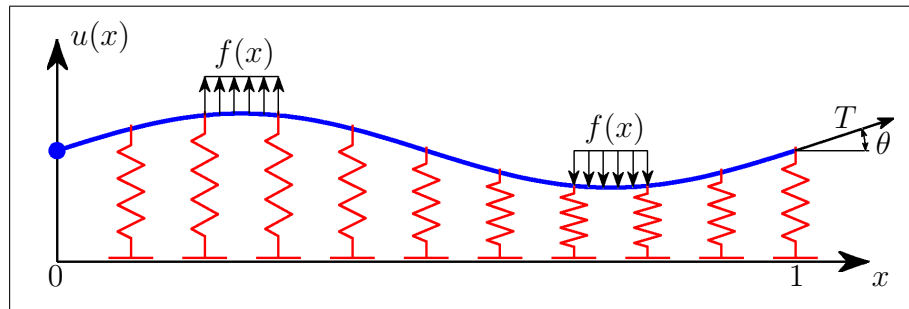



FIG. 6.1 – La corde sur fondation élastique

Affectons, dans un souci de simplicité, une valeur unité à la raideur  $k$  de la fondation ainsi qu'à la composante horizontale de la tension  $T$ . Le déplacement vertical  $u$  de la corde est alors solution du problème

$$(P_i) \begin{cases} \text{Trouver } u : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que} \\ -u''(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) = 0 \quad u'(1) = g \end{cases} \quad (6.1)$$

qui est un exemple simple de problème aux limites. On a, de façon plus générale, la

**Définition 18 (Problème aux limites)**  [def18t.html](#) Soit  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , de frontière  $\Gamma$  "suffisamment régulière". On appelle problème aux limites posé sur  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  le problème consistant en la recherche d'une fonction  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , vérifiant dans  $\Omega$  un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDP), et sur la frontière  $\Gamma$  un ensemble de conditions imposées appelées conditions aux limites (CL).

Dans le cas de notre problème modèle  $(P_i)$ , nous avons  $n = p = 1$ ,  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\Gamma = \{0, 1\}$ , et le système d'équations aux dérivées partielles se réduit à une unique équation différentielle

ordinaire (EDO). Un tel problème est appelé problème aux limites à deux points : sa solution  $u$  dépend de deux constantes qui sont déterminées par les valeurs imposées à chacune des extrémités (limites) de l'intervalle  $[0, 1]$ . Enfin, rappelons que l'on appelle problème de Cauchy un problème où la solution est déterminée à partir des valeurs "initiales" de l'inconnue.

### 6.1.2 Formulation variationnelle



C'est la notion fondamentale de nombreuses méthodes numériques, et notamment de la MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (MEF). Elle permet d'introduire, d'expliquer et de justifier ces méthodes numériques.

L'introduction de cette notion repose sur un théorème et sur une définition.

#### 6.1.2.1 Un théorème

Soit  $m \in \mathbb{N}$  et soit  $\mathcal{C}^m[0, 1]$  l'espace des fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $[0, 1]$ . Soit par ailleurs  $\mathcal{C}_0^m[0, 1]$  le sous-espace de  $\mathcal{C}^m[0, 1]$  constitué par les fonctions  $v \in \mathcal{C}^m[0, 1]$  telles que  $v(0) = 0$ .

On se propose ici d'établir le

**Théorème 17**  [theo17t.html](#)  [theo17p.html](#) Les deux formulations suivantes sont équivalentes.

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}_0^2[0, 1] \text{ tel que} \\ -u''(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in ]0, 1[ \\ u'(1) = g \end{array} \right. \quad (6.2)$$

$$(P'_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}_0^2[0, 1] \text{ tel que} \\ \int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 fv \, dx + gv(1) \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1[0, 1] \end{array} \right. \quad (6.3)$$

**Preuve**  [demth17t.html](#) Il s'agit ici de montrer que  $(P_i)$  et  $(P'_i)$  ont même ensemble de solutions.

Démontrons tout d'abord le théorème direct. Soit  $u \in \mathcal{C}_0^2[0, 1]$  une solution de  $(P_i)$ , et soit  $v$  une fonction quelconque appartenant à  $\mathcal{C}_0^1[0, 1]$ . On a alors

$$(-u''(x) + u(x))v(x) = f(x)v(x) \quad \forall x \in ]0, 1[ \quad (6.4)$$

Intégrons la relation précédente sur  $[0, 1]$ . Il vient

$$-\int_0^1 u''v \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1[0, 1] \quad (6.5)$$

Intégrons à présent par parties le premier terme du membre de gauche de cette égalité. Nous obtenons

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 fv dx + [u'v]_0^1 \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1[0, 1] \quad (6.6)$$

ce qui donne

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 fv dx + gv(1) \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1[0, 1] \quad (6.7)$$

puisque  $v(0) = 0$  et  $u'(1) = g$ . Donc  $u$  est bien solution de  $(P'_i)$ .

Réciproquement, soit  $u \in \mathcal{C}_0^2[0, 1]$  une solution de  $(P'_i)$ . Intégrons par parties le premier terme du membre de gauche de l'égalité (6.3). Il vient, puisque  $v(0) = 0$ ,

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)v dx + (u'(1) - g)v(1) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^1[0, 1] \quad (6.8)$$


Prenons alors successivement pour  $v$  les éléments d'une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{C}_0^1[0, 1]$ , nulles en  $x = 1$ , et telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = -u''(x) + u(x) - f(x)$ ,  $\forall x \in ]0, 1[$ . Une telle suite existe d'après la théorie de l'intégration. Nous obtenons alors

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)v_n dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.9)$$

et donc, par passage à la limite,

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)^2 dx = 0 \quad (6.10)$$


Ceci n'est possible que si nous avons  $-u'' + u - f = 0$  dans  $]0, 1[$ . Reportant cette égalité dans (6.8), on en déduit que  $u'(1) = g$ . Enfin, comme par hypothèse  $u \in \mathcal{C}_0^2[0, 1]$ ,  $u$  est nul en  $x = 0$ . C'est donc finalement une solution de  $(P_i)$ .  $\square$

**Problème**  [pap6121.html](#) On ne peut pas toujours garantir l'existence et l'unicité de la solution  $u$  du problème  $(P_i)$  ou du problème  $(P'_i)$  si le chargement  $f$  est irrégulier : chargement isolé ou chargement par “morceaux”. Nous devons donc affaiblir nos exigences sur  $u$ , et ceci dans deux directions :

1. Le problème  $(P'_i)$  ne fait pas apparaître  $u''$ . On n'exigera donc plus que  $u$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Le problème  $(P'_i)$  ne nécessite pas la continuité de  $u'$ . Il faut seulement que l'intégrale  $\int_0^1 u'v' dx$  soit définie, ce qui revient à supposer que  $u'$  et  $v'$  sont de carré intégrable sur  $[0, 1]$ .


### 6.1.2.2 Une définition

À partir des deux idées précédentes, on construit une nouvelle écriture du problème  $(P'_i)$ . C'est la

**Définition 19**  [def19p.html](#) Soit  $H^1[0, 1] = \left\{ v : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \int_0^1 v^2 dx < +\infty, \int_0^1 v'^2 dx < +\infty \right\}$ , et soit  $V$  le sous-espace de  $H^1[0, 1]$  défini par  $V = \{v \in H^1[0, 1], v(0) = 0\}$ . On appelle formulation faible ou variationnelle du problème  $(P_i)$  le problème


$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_0^1 (uv + u'v') dx = \int_0^1 fv dx + gv(1) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Cette formulation est dorénavant notre formulation de travail. Contrairement à  $(P'_i)$ ,  $(P_v)$  n'est pas équivalente à  $(P_i)$  : elle est plus faible car on demande moins de propriétés à la solution  $u$ . Elle présente donc l'inconvénient de “tricher” par rapport à  $(P_i)$ , dans la mesure où nous affaiblissons nos exigences sur la solution. En contrepartie, elle présente par rapport à  $(P_i)$  l'avantage de posséder une unique solution dépendant continûment du chargement  $f$ , même si ce dernier est irrégulier. Cette propriété essentielle constitue le

**Théorème 18**  [theo18p.html](#) Le problème  $(P_v)$  défini par (6.11) est bien posé (i.e. il admet une unique solution  $u$  dépendant continûment du chargement  $f$ , même si ce dernier est irrégulier).

dont l'étude de la démonstration qui suit, bien que vivement conseillée, reste facultative.


**Preuve** Rappelons tout d'abord, sans en donner la démonstration, le

**Théorème 19 (Riesz)**  [theo19p.html](#) Soit  $E$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_E$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_E$ , et soit  $E'$  le dual de  $E$  (i.e. l'espace des formes linéaires continues sur  $E$ ) muni de la norme duale  $\|\cdot\|_{E'}$  définie par

$$\|l\|_{E'} = \sup_{u \neq 0} \frac{l(u)}{\|u\|_E} \quad \forall l \in E'$$

Alors,  $\forall l \in E', \exists ! u \in E$  tel que  $(u, v)_E = l(v) \quad \forall v \in E$ . De plus, on a  $\|u\|_E = \|l\|_{E'}$ .

qui a été établi en cours de Mathématiques, et dont nous allons tirer parti.

 [demth18p.html](#) Considérons tout d'abord l'espace  $L^2[0, 1]$  des fonctions  $v : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  de carré intégrable sur  $[0, 1]$ . Nous savons que  $L^2[0, 1]$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(u, v)_{L^2[0,1]} = \int_0^1 uv dx$ . Il s'ensuit que  $H^1[0, 1]$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(u, v)_{H^1[0,1]} = \int_0^1 (uv + u'v') dx$ . Signalons qu'ici les dérivées sont à prendre au sens des distributions, c'est-à-dire que  $v(x) = u'(x)$  si et seulement si l'on a  $\int_0^1 u\varphi' dx = - \int_0^1 v\varphi dx$ ,

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$  tel que  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Montrons alors que le sous-espace  $V$  des fonctions de  $H^1[0, 1]$  nulles en  $x = 0$ , muni de la restriction du produit scalaire de  $H^1[0, 1]$ , est un espace de Hilbert. Pour cela considérons la forme linéaire  $h$  définie sur  $H^1[0, 1]$  par  $h(v) = v(0)$ ,  $\forall v \in H^1[0, 1]$ , et montrons que  $h$  est continue (i.e.  $h$  appartient au dual  $(H^1[0, 1])'$  de  $H^1[0, 1]$ ). On a,  $\forall v \in H^1[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)v' dx &= [(1-x)v]_0^1 + \int_0^1 v dx \\ &= -v(0) + \int_0^1 v dx \end{aligned} \quad (6.12)$$

c'est-à-dire

$$v(0) = \int_0^1 v dx - \int_0^1 (1-x)v' dx \quad (6.13)$$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|v(0)| \leq \|v\|_{L^2[0,1]} + \frac{1}{\sqrt{3}} \|v'\|_{L^2[0,1]} \quad (6.14)$$

c'est-à-dire, puisque  $\|v\|_{H^1[0,1]}^2 = \|v\|_{L^2[0,1]}^2 + \|v'\|_{L^2[0,1]}^2$ ,

$$|v(0)| \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \|v\|_{H^1[0,1]} \quad (6.15)$$

ce qui établit la continuité de  $h$ . Il s'ensuit alors que  $V = \ker(h)$  est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet, de  $H^1[0, 1]$ . Muni de la restriction du produit scalaire de  $H^1[0, 1]$ , notée  $(\cdot, \cdot)_V$  dans ce qui suit,  $V$  est donc un espace de Hilbert.

Soit à présent  $l$  la forme linéaire définie sur  $V$  par  $l(v) = \int_0^1 f v dx + g v(1)$ ,  $\forall v \in V$ . Le problème variationnel  $(P_v)$  s'écrit alors

$$(P_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (u, v)_V = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (6.16)$$

Il ne reste alors plus, grâce au théorème de représentation de Riesz 19, qu'à établir la continuité de  $l$  (i.e. l'appartenance de  $l$  à  $V'$ ). Mais on a, toujours avec Cauchy-Schwarz et  $\forall v \in V$ ,

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2[0,1]} \|v\|_{L^2[0,1]} + |g| |v(1)| \quad (6.17)$$

Par ailleurs, puisque  $v(0) = 0$ ,

$$|v(1)| = \left| \int_0^1 v' dx \right| \leq \|v'\|_{L^2[0,1]} \quad (6.18)$$

Regroupant (6.17) et (6.18), nous obtenons

$$|l(v)| \leq \left( \|f\|_{L^2[0,1]} + |g| \right) \|v\|_V \quad (6.19)$$

ce qui assure la continuité de  $l$  et achève la démonstration du théorème 18, l'unique solution  $u$  de  $(P_v)$  vérifiant alors la relation

$$\|u\|_V \leq \|f\|_{L^2[0,1]} + |g| \quad (6.20)$$

□

La formulation variationnelle  $(P_v)$  du problème modèle considéré est la base naturelle des MÉTHODES DE GALERKIN et notamment de la MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.

Par ailleurs, la solution classique de  $(P_i)$ , si elle existe, est l'unique solution de  $(P_v)$ . En effet, c'est alors une solution de  $(P'_i)$ , et donc de  $(P_v)$  qui est une forme affaiblie de  $(P'_i)$ . Réciproquement, toute solution régulière (i.e. de classe  $\mathcal{C}^2$ ) de  $(P_v)$  est clairement solution de  $(P'_i)$  donc de  $(P_i)$ .

Enfin, notons qu'en mécanique le théorème des travaux virtuels (théorème 14 page 292) conduit systématiquement, ainsi que nous le verrons dans la seconde partie de ce chapitre, à une formulation variationnelle des équations indéfinies de l'équilibre, court-circuitant ainsi la théorie plus générale développée dans cette section.

### 6.1.3 Méthodes de Galerkin

On s'intéresse ici aux méthodes de résolution numérique de problèmes variationnels tels que le problème  $(P_v)$  établi plus haut et donné par (6.11). Pour ce propos et dans un souci de clarté de l'exposé, nous nous placerons dans un cadre plus général que celui du problème modèle précédent, en écrivant  $(P_v)$  sous forme abstraite.

#### 6.1.3.1 Écriture abstraite d'un problème variationnel

 [pap6131.html](#) Tout problème variationnel peut être écrit sous la forme abstraite suivante

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{array} \right. \quad (6.21)$$

où  $V$  est un espace vectoriel normé (le plus souvent de Hilbert) de fonctions  $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  (on rappelle que  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Omega$  étant un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , de frontière  $\Gamma$  "suffisamment régulière"), où  $l : V \mapsto \mathbb{R}$  est une forme linéaire, et où  $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$  est une

forme linéaire par rapport au second argument. Dans le cas de notre problème modèle, nous avons

$$\begin{cases} V &= \{v \in H^1[0, 1], v(0) = 0\} \\ a(u, v) &= \int_0^1 (uv + u'v') \, dx \\ l(v) &= \int_0^1 f v \, dx + gv(1) \end{cases} \quad (6.22)$$

Malheureusement,  $V$  est le plus souvent un espace vectoriel de dimension infinie, de sorte que la solution  $\mathbf{u}$  recherchée s'écrit, au mieux, sous la forme

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \boldsymbol{\psi}_i(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (6.23)$$

où les fonctions  $\boldsymbol{\psi}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont des fonctions de base de  $V$  (en nombre infini), et où les réels  $u_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont les composantes de la fonction  $\mathbf{u}$  relativement à la base  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Autrement dit, déterminer  $\mathbf{u}$  revient à calculer les coefficients  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Comme il y en a une infinité, l'ordinateur ne peut pas tous les déterminer. Il faut donc simplifier.

### 6.1.3.2 Formulation variationnelle approchée de Galerkin

Comme  $V$  est “trop gros”, il est naturel de le remplacer par un espace  $V_h$  plus petit. C'est l'idée “toute simple” de Galerkin. Elle conduit à la

**Définition 20 (Problème approché de Galerkin)**  [def20p.html](#) Soit  $M_h \in \mathbb{N}^*$ , soient  $\boldsymbol{\psi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ ,  $M_h$  fonctions linéairement indépendantes dans  $V$ , et soit  $V_h$  l'espace qu'elles engendrent

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in V, \quad \mathbf{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{i=M_h} v_i \boldsymbol{\psi}_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad v_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, M_h\} \right\} \quad (6.24)$$

On appelle alors problème approché de Galerkin associé au problème  $(P_v)$  et aux fonctions  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  le problème obtenu en remplaçant  $V$  par  $V_h$  dans  $(P_v)$ . Il s'écrit donc

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Le problème  $(P_h)$  n'a plus que  $M_h$  inconnues. En effet, comme  $\mathbf{u}_h \in V_h$ ,  $\mathbf{u}_h$  s'écrit

$$\mathbf{u}_h(x) = \sum_{i=1}^{i=M_h} u_i \boldsymbol{\psi}_i(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (6.26)$$

et donc déterminer  $\mathbf{u}_h$  revient à déterminer les  $M_h$  réels  $(u_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ .




En contrepartie,  $(P_h)$  n'est plus équivalent au problème variationnel de départ  $(P_v)$ . C'est un problème approché dont la solution  $\mathbf{u}_h$  n'est qu'une approximation de la solution  $\mathbf{u}$  de  $(P_v)$ , approximation dont la qualité dépend du choix des fonctions  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ . Si par exemple la solution  $\mathbf{u}$  de  $(P_v)$  appartient à  $V_h$ , alors  $\mathbf{u}$  est solution de  $(P_h)$ , et l'on a  $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}$ . Ce cas de figure reste bien sûr exceptionnel, et l'on a donc, la plupart du temps,  $\mathbf{u}_h \neq \mathbf{u}$ . On a toutefois, dans de nombreuses situations, le résultat suivant que l'on donne sans démonstration

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \simeq \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V \quad (6.27)$$

et qui est bien entendu ce que l'on peut espérer de mieux.

### 6.1.3.3 Résolution numérique d'un problème approché de Galerkin

On s'intéresse à présent à la résolution du problème approché de Galerkin  $(P_h)$ . On a le

**Théorème 20**  [theo20p.html](#) Si  $a$  est linéaire en  $\mathbf{u}$ , le problème  $(P_h)$  a pour solution

$$\mathbf{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{j=M_h} u_j \boldsymbol{\psi}_j(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (6.28)$$

où les  $M_h$  réels  $(u_j)_{j \in \{1, \dots, M_h\}}$  sont solutions du système linéaire (immédiatement soluble par ordinateur)

$$(S_h) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{j=M_h} a(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_i) u_j = l(\boldsymbol{\psi}_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, M_h\} \end{array} \right. \quad (6.29)$$

**Preuve**  [demth20p.html](#) Par définition de  $V_h$ ,  $(P_h)$  s'écrit

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_j)_{j \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \text{ tel que} \\ a \left( \sum_{j=1}^{j=M_h} u_j \boldsymbol{\psi}_j, \sum_{i=1}^{i=M_h} v_i \boldsymbol{\psi}_i \right) = l \left( \sum_{i=1}^{i=M_h} v_i \boldsymbol{\psi}_i \right) \quad \forall (v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Par linéarité, cela s'écrit encore


$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_j)_{j \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^{i=M_h} \left( a \left( \sum_{j=1}^{j=M_h} u_j \boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_i \right) - l(\boldsymbol{\psi}_i) \right) v_i = 0 \quad \forall (v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \end{array} \right. \quad (6.31)$$

puis

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_j)_{j \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \text{ tel que} \\ \sum_{i=1}^{i=M_h} \left( \sum_{j=1}^{j=M_h} a(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_i) u_j - l(\boldsymbol{\psi}_i) \right) v_i = 0 \quad \forall (v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h} \end{array} \right. \quad (6.32)$$

Comme  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}} \in \mathbb{R}^{M_h}$  est arbitraire, ceci équivaut bien à  $S_h$ .  $\square$

#### 6.1.3.4 Les méthodes de Galerkin

 [pap6134.html](#) Nous venons de voir qu'un problème de Galerkin se réduit, dans le cas où la forme  $a$  est linéaire par rapport au premier argument, à un système d'équations linéaires, et est donc facile à résoudre numériquement. Pour résoudre numériquement un problème aux limites, il suffit donc de pouvoir l'écrire sous la forme d'un problème approché de Galerkin. C'est le principe des MÉTHODES dites DE GALERKIN, dont la MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS constitue un cas particulier, qui consistent à

1. Écrire une formulation variationnelle du problème initial (c'est la clef de voûte de la méthode). Dans le cas de notre problème modèle, cette formulation s'écrivait

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V = \{v \in H^1[0, 1], v(0) = 0\} \text{ tel que} \\ \int_0^1 (uv + u'v') \, dx = \int_0^1 f v \, dx + gv(1) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (6.33)$$

2. Construire  $M_h$  fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  linéairement indépendantes dans l'espace  $V$  des inconnues (on verra par la suite comment le faire dans le cadre des MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS).
3. Calculer  $a(\psi_j, \psi_i)$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M_h\}^2$ , ainsi que  $l(\psi_i)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, M_h\}$ .
4. Résoudre le système linéaire ( $\Leftrightarrow$  résoudre  $P_h$ )


$$(S_h) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{j=M_h} a(\psi_j, \psi_i) u_j = l(\psi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, M_h\} \end{array} \right. \quad (6.34)$$

5. Prendre comme solution approchée du problème la fonction

$$\mathbf{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{j=M_h} u_j \psi_j(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (6.35)$$

On obtient alors, suivant la manière dont on construit les fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ , une énorme variété de méthodes numériques efficaces pour résoudre les problèmes aux limites rencontrés en mécanique.

#### 6.1.4 Construction d'un espace d'éléments finis

 [aud614.html](#) La philosophie des méthodes d'éléments finis réside dans leur procédé systématique et local de construction des fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  nécessaires à l'application des méthodes de Galerkin. Cette construction repose sur l'utilisation de trois outils dont la description fait l'objet des trois sections suivantes.

### 6.1.4.1 Premier outil : définition d'un élément fini

Il s'agit de la donnée en parallèle

1. d'une géométrie simple  $\Omega^e \subset \mathbb{R}^n$ , où  $n$  est la dimension du problème physique que l'on veut résoudre (dans la grande majorité des situations  $n \in \{1, 2, 3\}$ ).
2. d'un espace d'interpolation  $P_m^p$  inclus dans  $F^p = \{\mathbf{v} : \Omega^e \mapsto \mathbb{R}^p\}$ , où  $p$  représente la dimension du champ inconnu  $\mathbf{u}$  que l'on cherche à approcher. Cet espace  $P_m^p$  est le plus souvent de type polynomial,  $m$  représentant alors le degré de l'interpolation.
3. de  $\nu^e$  degrés de liberté  $l_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , formes linéaires définies sur l'espace d'interpolation  $F^p$  et vérifiant la

**Propriété 1 (Unisolvance)** *Pour tout  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , il existe une unique fonction  $\varphi_k^e \in P_m^p$  telle que  $l_i^e(\varphi_k^e) = \delta_{ik}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, \nu^e\}$  (sans sommation sur  $e$ ).*

**Exemple** Dans le cas de notre problème modèle à une dimension d'espace pour lequel l'inconnue  $u$  est une unique fonction réelle de variable réelle, nous avons  $n = p = 1$ . Nous pouvons choisir comme géométrie simple  $\Omega^e$  de la droite réelle le segment d'extrémités  $A^e$  et  $B^e$  représenté sur la figure 6.2, et comme degrés de liberté les deux formes linéaires associant respectivement à toute fonction  $v \in F^1$  ses valeurs aux points  $A^e$  (numéroté 1) et  $B^e$  (numéroté 2). Nous verrons, dans ce qui suit, qu'un tel choix de degrés de liberté permet d'assurer la continuité des fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ .

$$l_1^e(v) = v(A^e), \quad l_2^e(v) = v(B^e), \quad \forall v \in F^1 \tag{6.36}$$

Les points  $A^e$  et  $B^e$  de  $\Omega^e$  sont appelés nœuds de l'élément, et les valeurs  $l_1^e(v)$  et  $l_2^e(v)$  de la fonction  $v$  en ces points sont les valeurs nodales de cette fonction. Choisissons à présent un espace d'interpolation de type polynomial. La propriété 1 d'unisolvance ne peut alors être satisfaite que si ces polynômes sont de degré un ( $m = 1$ ). L'espace d'interpolation est alors  $P_1^1$ , et les fonctions  $\varphi_1^e$  et  $\varphi_2^e$  associées de façon biunivoque aux deux degrés de liberté précédemment choisis et représentées sur la figure 6.2 sont linéaires. Elles ont pour expression, avec les notations de cette figure,

$$\varphi_1^e(x) = \frac{x^{B^e} - x}{x^{B^e} - x^{A^e}} \quad \varphi_2^e(x) = \frac{x - x^{A^e}}{x^{B^e} - x^{A^e}} \tag{6.37}$$

L'élément fini à une dimension d'espace ainsi construit est appelé élément monodimensionnel linéaire de Lagrange.

**Remarque** On voit donc que la propriété d'unisolvance impose une relation entre le degré  $m$  de l'interpolation et le nombre  $\nu^e$  de degrés de liberté de l'élément. Dans le cas de notre problème modèle, cette relation est  $\nu^e = m + 1$ .

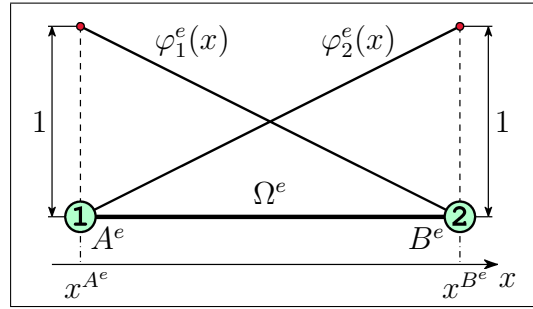


FIG. 6.2 – Élément monodimensionnel linéaire de Lagrange

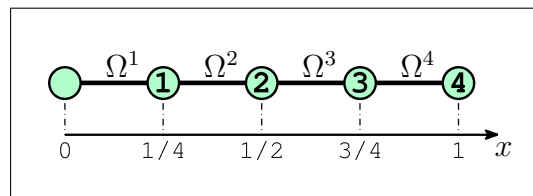
### 6.1.4.2 Deuxième outil : triangulation

On appelle triangulation (ou encore maillage) du domaine de calcul  $\bar{\Omega}$  (domaine de définition du champ inconnu  $\mathbf{u}$  que l'on cherche à approcher) toute partition de ce domaine en petits éléments de géométrie simple  $\Omega^e$ . Si  $N_h$  est le nombre total d'éléments de la triangulation, on a

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{e=N_h} \Omega^e \quad (6.38)$$

le paramètre réel  $h > 0$  étant ici lié à la finesse de la triangulation, avec la signification suivante :  $N_h$  croît en fonction inverse de  $h$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} N_h = +\infty$ .

**Exemple** Dans le cas de notre problème modèle, nous avons  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ . La figure 6.3 représente alors une triangulation (ou maillage) de  $\bar{\Omega}$  composée de quatre éléments linéaires de Lagrange, tels que celui de la figure 6.2, d'égale longueur  $h = \frac{1}{4}$ .

FIG. 6.3 – Triangulation de  $\bar{\Omega}$ 

### 6.1.4.3 Troisième outil : matrice de connectivité

Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation du domaine de calcul  $\bar{\Omega}$  composée de  $N_h$  éléments, et soit  $\mathcal{S}$  l'union des degrés de liberté de tous les éléments finis, ensemble que l'on numérote de 1 à  $M_h$  en ne comptant qu'une fois les degrés de liberté communs à plusieurs éléments et en ne comptant pas ceux correspondant à des valeurs connues de la solution. La matrice de connectivité (on dit aussi la table de connectivité) est alors l'application **NU** qui à tout degré de liberté local  $l_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , de l'élément  $\Omega^e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , associe son numéro global **NU**( $k, e$ ) dans  $\mathcal{S}$ .

**Exemple** Reconsidérons la triangulation de la figure 6.3 relative à notre problème modèle et effectuons la numérotation globale des degrés de liberté comme indiqué sur cette même figure. On a ici  $N_h = 4$ ,  $\nu^e = 2$ ,  $\forall e \in \{1, 2, 3, 4\}$ , et  $M_h = 4$ , et la matrice de connectivité associée à cette numérotation est fournie par le tableau 6.1.

TAB. 6.1 – Matrice de connectivité associée à la triangulation de la figure 6.3

n° local du d.d.l.	Numéro de l'élément			
	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$
$k = 1$	-	1	2	3
$k = 2$	1	2	3	4

**Remarque** L'entier  $M_h$ , introduit dans la section 6.1.3.2 pour représenter la dimension de l'espace d'approximation  $V_h$ , a également été utilisé dans cette section pour désigner le nombre total de degrés de liberté. En effet, nous allons voir dans la section suivante qu'à chacun de ces degrés de liberté globaux correspond une unique fonction  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , et que ces fonctions sont par construction linéairement indépendantes. Conséquemment,  $M_h$  représente bien la dimension de l'espace d'éléments finis  $V_h$  égale au nombre total de degrés de liberté.

#### 6.1.4.4 Construction finale des fonctions $\psi_i$ , $i \in \{1, \dots, M_h\}$

Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation du domaine de calcul  $\bar{\Omega}$  composée de  $N_h$  éléments, soit  $M_h$  le nombre total de degrés de liberté, et soit **NU** la matrice de connectivité associée à leur numérotation globale. À chaque degré de liberté de numéro global  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , correspond alors une unique fonction  $\psi_i$  définie comme suit :

$$\forall e \in \{1, \dots, N_h\} \quad \psi_i|_{\Omega^e} = \begin{cases} \varphi_k^e & \text{si } \exists k \in \{1, \dots, \nu^e\} \text{ tel que } i = \mathbf{NU}(k, e) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.39)$$

Observons que cette définition est locale (i.e. elle s'effectue élément par élément) et ne nécessite que la connaissance des fonctions  $\varphi_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , et de la matrice de connectivité **NU**. Par ailleurs, le support des fonctions  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , est petit devant  $\Omega$ . En effet, pour  $i \in \{1, \dots, M_h\}$  quelconque mais fixé, ce support correspond à l'union des éléments  $\Omega^e$  tels que  $\exists k \in \{1, \dots, \nu^e\}$  avec  $i = \mathbf{NU}(k, e)$ , et les triangulations utilisées dans la pratique sont telles que le nombre de ces éléments reste (très) faible devant  $N_h$ . En d'autres termes, pour  $e \in \{1, \dots, N_h\}$  quelconque mais fixé, seules quelques fonctions  $\psi_i$  ( $\nu^e$  exactement) sont non nulles sur  $\Omega^e$ . Leurs traces sur  $\Omega^e$  sont précisément les fonctions  $\varphi_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ .

**Exemple** Dans le cas de notre problème modèle et de la triangulation de la figure 6.3 pour laquelle  $N_h = 4$ ,  $\nu^e = 2$ ,  $\forall e \in \{1, 2, 3, 4\}$ , et  $M_h = 4$ , nous obtenons, grâce à la table de connectivité donnée par le tableau 6.1, les quatre fonctions  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  et  $\psi_4$  de la figure 6.4. On notera que ces fonctions sont continues. Ceci est dû au choix des degrés de liberté  $l_k^e$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , qui aux fonctions  $v \in F^1$  font correspondre leurs valeurs aux extrémités de l'élément  $\Omega^e$ .

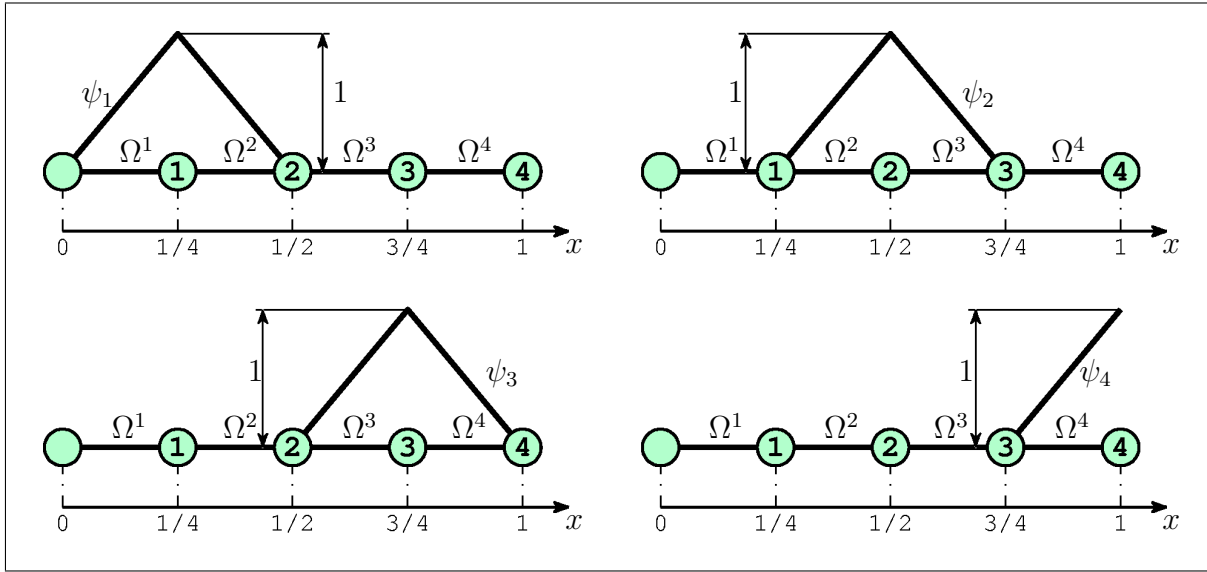


FIG. 6.4 – Construction finale des fonctions  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

### Remarques

1. Soit  $l_i$  le degré de liberté de numéro global  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ . On a alors, par construction des fonctions  $\psi_j$ ,  $j \in \{1, \dots, M_h\}$ , et compte tenu de la propriété 1 d'unicité,  $l_i(\psi_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M_h\}^2$ . Ces fonctions sont donc linéairement indépendantes, et leur nombre  $M_h$  est égal à la dimension de l'espace d'éléments finis  $V_h$  qu'elles engendrent. On a alors,  $\forall \mathbf{v}_h \in V_h$  et  $\forall i \in \{1, \dots, M_h\}$ ,

$$l_i(\mathbf{v}_h) = l_i \left( \sum_{j=1}^{j=M_h} v_j \psi_j \right) = \sum_{j=1}^{j=M_h} v_j l_i(\psi_j) = \sum_{j=1}^{j=M_h} v_j \delta_{ij} = v_i \quad (6.40)$$

2. Lorsque les degrés de liberté  $l_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , ne font correspondre aux fonctions réelles  $v \in F^1$  (on a ici  $p = 1$ ) que leurs valeurs en des points particuliers (nœuds) de l'élément  $\Omega^e$  (comme c'est le cas pour notre problème modèle), les composantes des fonctions  $v_h \in V_h$  relativement à la base  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  ne sont autres que les valeurs de ces fonctions aux nœuds du maillage. Autrement dit, on a

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{i=M_h} v_i \psi_i(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (6.41)$$

où  $\forall i \in \{1, \dots, M_h\}$ ,  $v_i$  est la valeur de  $v_h$  au nœud associé au degré de liberté de numéro global  $i$ . C'est, dans ce cas précis, une conséquence directe de (6.40) qui s'écrit ici  $v_i = l_i(v_h)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, M_h\}$  et  $\forall v_h \in V_h$ .

3. Plus généralement, lorsque les degrés de liberté  $l_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , ne font correspondre aux fonctions  $\mathbf{v} \in F^p$ ,  $p \geq 2$ , que les valeurs de leurs composantes (dans  $\mathbb{R}^p$ ) aux nœuds de l'élément  $\Omega^e$ , les composantes  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  des fonctions  $\mathbf{v}_h \in V_h$  relativement à la base  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  ne sont autres que les valeurs des composantes (dans  $\mathbb{R}^p$ ) de ces fonctions aux nœuds du maillage. Il s'agit là encore d'une conséquence directe de (6.40).

### 6.1.4.5 Résolution numérique d'un problème de Galerkin par la méthode des éléments finis

Les fonctions  $\boldsymbol{\psi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , génératrices de l'espace d'approximation  $V_h$  ayant été construites comme il est décrit ci-dessus, il s'agit à présent de calculer, le plus astucieusement possible (c'est-à-dire au moindre coût), les composantes de la matrice et du second membre du système d'équations linéaires  $S_h$  défini par (6.29). Désignons par  $\mathbf{K}$  cette matrice, par  $\mathbf{F}$  le second membre et par  $\mathbf{U}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{M_h}$  associé aux composantes de l'inconnue  $\mathbf{u}_h$  sur la base  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ . Le système  $S_h$  s'écrit alors

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{6.42}$$

Soient  $K_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, M_h\}^2$ , les composantes de  $\mathbf{K}$ , et  $F_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , celles de  $\mathbf{F}$ . On a alors, avec (6.29),

$$K_{ij} = a(\boldsymbol{\psi}_j, \boldsymbol{\psi}_i) \quad F_i = l(\boldsymbol{\psi}_i) \tag{6.43}$$

Les fonctions  $\boldsymbol{\psi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , étant définies localement (i.e. élément par élément), le calcul des composantes de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$  nécessite l'évaluation, puis la sommation, des contributions de chaque élément à ces composantes. On peut alors songer à calculer les unes après les autres les composantes de  $\mathbf{K}$  (resp. de  $\mathbf{F}$ ) en évaluant, pour chacune d'elles, les différentes contributions élémentaires avant de les sommer. On effectue alors autant de "balayages" de l'ensemble des éléments qu'il y a de composantes à calculer, c'est-à-dire  $M_h^2 + M_h$ . En d'autres termes, chacun des  $N_h$  éléments est "examiné"  $M_h^2 + M_h$  fois.

Cette façon de procéder est clairement loin d'être optimale. En effet, nous avons vu, dans la section 6.1.4.4, que le support des fonctions  $\boldsymbol{\psi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , est petit devant  $\Omega$ . Les intersections des supports de  $\boldsymbol{\psi}_i$  et  $\boldsymbol{\psi}_j$  seront donc de mesure nulle pour de nombreux couples d'indices  $(i, j) \in \{1, \dots, M_h\}^2$ , et, conséquemment, les composantes  $K_{ij}$  de  $\mathbf{K}$  qui leur correspondent seront nulles : il n'y a donc pas lieu de chercher à les évaluer. Par ailleurs, et pour la même raison, le nombre d'éléments contribuant à une composante non nulle quelconque

mais fixée de  $\mathbf{K}$  est petit devant le nombre total d'éléments  $N_h$  : il n'est donc pas nécessaire d'effectuer un balayage de l'ensemble des éléments pour évaluer chacun de ces termes non nuls.

La stratégie optimale (en terme de coût) consiste, bien évidemment, à ne calculer que les contributions élémentaires non nulles aux composantes non nulles de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$ , ce qui est possible si l'on décide de n'effectuer qu'un unique balayage de l'ensemble des éléments. En effet, soit  $\Omega^e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , un élément quelconque mais fixé. L'ensemble des traces des fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  sur  $\Omega^e$  est connu : c'est l'ensemble des fonctions  $(\varphi_k^e)_{k \in \{1, \dots, \nu^e\}}$ .

Associons alors à chaque fonction  $\varphi_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , de  $\Omega^e$  dans  $\mathbb{R}^p$  (où  $p$  représente la dimension du champ inconnu  $\mathbf{u}$  que l'on cherche à approcher) la fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^p$  de même nom (cet abus d'écriture est classique) obtenue en prolongeant  $\varphi_k^e$  par la fonction nulle à l'extérieur de  $\Omega^e$ . On peut alors introduire la matrice élémentaire  $\mathbf{K}^e$  et le second membre élémentaire  $\mathbf{F}^e$ , de composantes respectives  $K_{kl}^e$ ,  $(k, l) \in \{1, \dots, \nu^e\}^2$ , et  $F_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , définies par

$$K_{kl}^e = a(\varphi_l^e, \varphi_k^e) \quad F_k^e = l(\varphi_k^e) \quad (6.44)$$

Il ne nous reste plus qu'à préciser à quelles composantes de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$  contribuent les composantes de  $\mathbf{K}^e$  et  $\mathbf{F}^e$ . La réponse à cette question est fournie par la matrice de connectivité  $\mathbf{NU}$ . Soit en effet  $(k, l) \in \{1, \dots, \nu^e\}^2$  un couple d'indices quelconque mais fixé, et soient  $i = \mathbf{NU}(k, e)$  et  $j = \mathbf{NU}(l, e)$ . Alors  $\varphi_k^e$  (resp.  $\varphi_l^e$ ) est la trace de  $\psi_i$  (resp.  $\psi_j$ ) sur  $\Omega^e$ . Conséquemment,  $K_{kl}^e$  contribue à  $K_{ij}$ , tandis que  $F_k^e$  contribue à  $F_i$ .

Les différents calculs conduisant au système d'équations linéaires (6.42) s'organisent donc selon l'algorithme suivant

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{K} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}; \\
 \text{Pour } e = 1 \text{ jusqu'à } N_h \\
 \left[ \begin{array}{l}
 \text{Pour } k = 1 \text{ jusqu'à } \nu^e \\
 \left[ \begin{array}{l}
 \text{calculer } F_k^e = l(\varphi_k^e) \\
 i = \mathbf{NU}(k, e) \\
 F_i \leftarrow F_i + F_k^e \quad (*) \\
 \text{Pour } l = 1 \text{ jusqu'à } \nu^e \\
 \left[ \begin{array}{l}
 \text{calculer } K_{kl}^e = a(\varphi_l^e, \varphi_k^e) \\
 j = \mathbf{NU}(l, e) \\
 K_{ij} \leftarrow K_{ij} + K_{kl}^e \quad (*) \\
 \text{Fin Pour } l
 \end{array} \right. \\
 \text{Fin Pour } k
 \end{array} \right. \\
 \text{Fin Pour } e
 \end{array} \right. \quad (6.45)
 \end{array}$$



dans lequel l'opération référencée par (\*) et consistant à ajouter à  $\mathbf{K}$  (resp.  $\mathbf{F}$ ) les contributions élémentaires  $\mathbf{K}^e$  (resp.  $\mathbf{F}^e$ ) est appelée assemblage.

**Exemple** Reconsidérons notre problème modèle et la triangulation de la figure 6.3 pour laquelle nous avons  $N_h = 4$ ,  $\nu^e = 2$ ,  $\forall e \in \{1, 2, 3, 4\}$ , et  $M_h = 4$ . Soit  $e \in \{1, 2, 3, 4\}$  quelconque mais fixé. Les composantes  $K_{kl}^e$ ,  $(k, l) \in \{1, 2\}^2$ , de la matrice élémentaire  $\mathbf{K}^e$  et celles  $F_k^e$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , du second membre élémentaire  $\mathbf{F}^e$  sont alors données, compte tenu de (6.22) ainsi que des considérations des paragraphes précédents, par

$$\begin{cases} K_{kl}^e &= \int_{(e-1)h}^{eh} (\varphi_k^e \varphi_l^e + \varphi_k^{e'} \varphi_l^{e'}) \, dx \\ F_k^e &= \int_{(e-1)h}^{eh} f \varphi_k^e \, dx + g \varphi_k^e(1) \end{cases} \quad (6.46)$$

où  $h = \frac{1}{4}$  est la longueur de chaque élément. Choisissons alors comme chargement  $f(x) = 1$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , et  $g = 2$ . Les fonctions  $\varphi_1^e$  et  $\varphi_2^e$  étant celles de la figure 6.2 données par (6.37), il vient

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^4 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 98 & -95 \\ -95 & 98 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

et

$$\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^2 = \mathbf{F}^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

L'assemblage de ces matrices et seconds membres élémentaires peut ensuite être effectué, grâce à la table de connectivité donnée par le tableau 6.1. Nous obtenons

$$\mathbf{K} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 196 & -95 & 0 & 0 \\ -95 & 196 & -95 & 0 \\ 0 & -95 & 196 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & 98 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Observons que les composantes  $K_{11}^1$ ,  $K_{12}^1$  et  $K_{21}^1$  de la matrice élémentaire  $\mathbf{K}^1$  ne contribuent pas à la matrice globale  $\mathbf{K}$ , de même que la composante  $F_1^1$  de  $\mathbf{F}^1$  ne contribue pas à  $\mathbf{F}$ . Ceci est dû au fait que le degré de liberté local  $k = 1$  de l'élément  $\Omega^1$  n'est pas pris en compte au niveau global, comme le montre la table de connectivité (tableau 6.1). En effet, la valeur de la solution au nœud associé à ce degré de liberté est connue :  $u(0) = 0$ .

La résolution du système d'équations linéaires (6.42) fournit alors le vecteur  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^4$  associé aux composantes de la solution approchée  $u_h$  de notre problème relativement à la base d'interpolation  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$  (figure 6.4). Rappelons (c'est la remarque 2 de la section 6.1.4.4)

qu'ici ces composantes ne sont autres que les valeurs de  $u_h$  aux nœuds associés à chacun des quatre degrés de liberté globaux (figure 6.3), d'abscisses respectives  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{3}{4}$  et  $x = 1$ . Ces valeurs approchées sont regroupées dans le tableau 6.2 et comparées aux valeurs exactes fournies par la solution analytique du problème


$$u(x) = 1 - \cosh(x) + \frac{2 + \sinh(1)}{\cosh(1)} \sinh(x) \quad (6.50)$$

TAB. 6.2 – Valeurs exactes et approchées de la solution aux noeuds du maillage

	$u(x)$	$u_h(x)$	$\left  \frac{u_h(x) - u(x)}{u(x)} \right $
$x = \frac{1}{4}$	0.488388	0.488387	$2.5 \cdot 10^{-6}$
$x = \frac{1}{2}$	0.944633	0.944461	$1.8 \cdot 10^{-4}$
$x = \frac{3}{4}$	1.397400	1.397028	$2.7 \cdot 10^{-4}$
$x = 1$	1.875134	1.874670	$2.5 \cdot 10^{-4}$

## 6.2 Étude du problème de l'élastostatique infinitésimale

### 6.2.1 Le problème initial

 [pap621.html](#) On s'intéresse ici au problème de l'équilibre d'un milieu continu élastique linéaire isotrope et homogène soumis à des liaisons cinématiques et subissant, sous l'action d'un chargement extérieur donné, une transformation infiniment petite. Un exemple d'un tel problème est illustré par le barrage poids en argile de la figure 6.5. La configuration déformée de ce solide matériel est un ouvert borné et connexe  $\Omega$  de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$  dans le cas d'un problème plan), de frontière  $\Gamma$  "suffisamment régulière", et nous désignons par  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à  $\Gamma$ . Les liaisons cinématiques se traduisent par la relation  $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0$ , où  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  est le champ des déplacements du solide déformable, et où  $\Gamma_1$  est une partie de la frontière  $\Gamma$ . Enfin, le chargement extérieur est représenté par la densité massique de forces  $\mathbf{b} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  ainsi que par la densité surfacique de forces  $\mathbf{g} : \Gamma_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ , où  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$ .

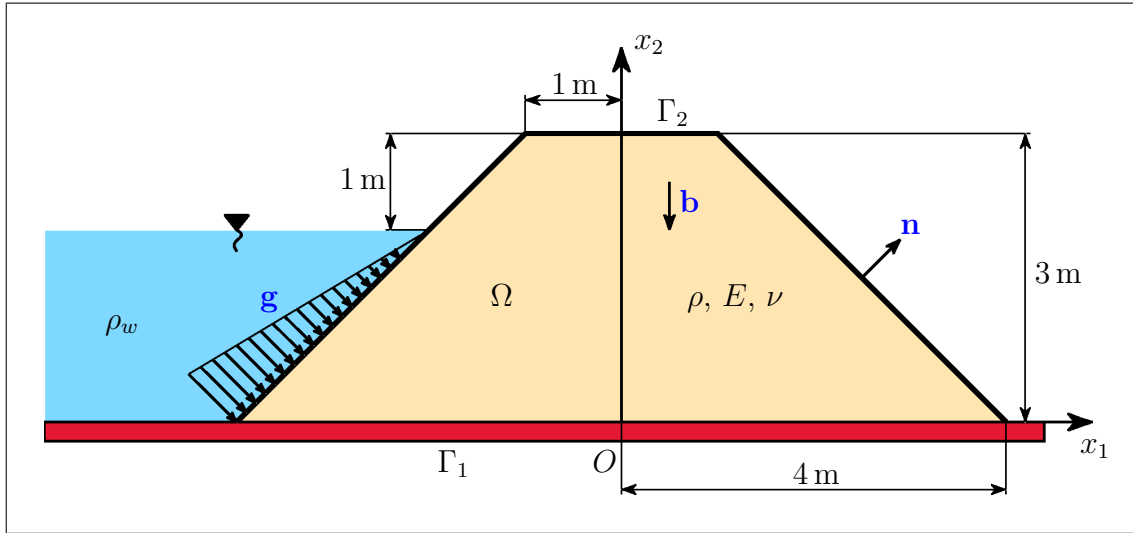


FIG. 6.5 – Barrage poids en argile

Les chapitres précédents du cours nous ont appris que ce problème se formule de la façon suivante

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3 \text{ et } \boldsymbol{\sigma} : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9 \text{ tels que} \\ (6.51.1) \quad -\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}) = \rho \mathbf{b}(\vec{x}) \\ (6.51.2) \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\vec{x})) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\vec{x})) \\ (6.51.3a) \quad \mathbf{u}(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ (6.51.3b) \quad \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}(\vec{x}) \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega \quad (6.51)$$


où  $\rho$  est la masse volumique,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur (symétrique) des contraintes de Cauchy,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  le tenseur linéarisé des petites déformations, image de  $\mathbf{u}$  par l'opérateur différentiel  $\boldsymbol{\varepsilon}$  défini par  $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_x(\cdot) + {}^t\mathbf{grad}_x(\cdot))$ , où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur unité du second ordre, et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les modules de Lamé. Rappelons que ces modules sont reliés au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.52)$$

Les trois équations différentielles scalaires issues de l'égalité vectorielle (6.51.1), quali-fiées d'indéfinies, traduisent l'équilibre du milieu continu. Les six équations scalaires constituant l'égalité tensorielle (6.51.2), encore appelées équations de fermeture, sont celles de la loi de comportement élastique linéaire et isotrope du solide déformable. Enfin, les égalités vectorielles (6.51.3a) et (6.51.3b) fournissent les conditions aux limites de notre problème. Bien que simple d'un point de vue mécanique, ce dernier est beaucoup plus complexe que le problème modèle précédemment étudié, en raison notamment du nombre plus important de variables d'espace, de composantes des champs inconnus ainsi que d'équations. Dans les cas les plus simples que constituent les problèmes plans, on aura à déterminer au moins deux fonctions

réelles de deux variables réelles : les composantes  $u_1$  et  $u_2$  du déplacement  $\mathbf{u}$ , fonctions des deux variables d'espace  $x_1$  et  $x_2$ .

## 6.2.2 Formulation variationnelle

 [pap622.html](#) Considérons les équations indéfinies de l'équilibre (6.51.1), et procédons comme nous l'avons fait dans la section 6.1.2.1 pour le problème modèle de la corde sur fondation élastique, la seule différence résidant dans le fait que nous avons à présent trois équations aux dérivées partielles (deux pour un problème plan) au lieu d'une unique équation différentielle ordinaire. Soit alors  $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$  (on observera l'analogie avec la condition  $v(0) = 0$  de notre problème modèle). Il vient

$$-\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}) \cdot \mathbf{v}(\vec{x}) = \rho \mathbf{b}(\vec{x}) \cdot \mathbf{v}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (6.53)$$

Intégrons la relation précédente sur  $\Omega$ . Nous obtenons

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \quad (6.54)$$

On notera l'analogie entre (6.54) et (6.5). On s'intéresse à présent, comme dans la section 6.1.2.1, au membre de gauche de cette égalité que l'on intègre par parties. Il vient

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= -\int_{\Omega} \partial_j \sigma_{ij} v_i \, d\Omega \\ &= -\int_{\Omega} \partial_j (\sigma_{ij} v_i) \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i \, d\Omega \\ &= -\int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j \, d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i \, d\Omega \\ &= -\int_{\Gamma_2} v_i g_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i \, d\Omega \end{aligned} \quad (6.55)$$

puisque  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$  et  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$  sur  $\Gamma_2$ . On a par ailleurs

$$\sigma_{ij} \partial_j v_i = \sigma_{ji} \partial_i v_j = \sigma_{ij} \partial_i v_j = \sigma_{ij} \frac{\partial_i v_j + \partial_j v_i}{2} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (6.56)$$

Reportant (6.56) dans (6.55) puis (6.55) dans (6.54), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \quad (6.57)$$

et l'on reconnaît là le THÉORÈME des TRAVAUX VIRTUELS (théorème 14 page 292), et plus précisément le corollaire 6, étudiés dans le chapitre 5 (section 5.1.4 page 290). Autrement dit, nous aurions pu partir directement de (6.57), court-circuitant ainsi les développements

précédents : c'est la remarque de la fin de la section 6.1.2.2. Ces derniers nous ont toutefois permis de constater que la démarche adoptée ici est rigoureusement semblable à celle utilisée dans la section 6.1.2.1 pour le problème modèle de la corde sur fondation élastique. Ceci illustre le fait que le principe de mise en œuvre d'une formulation variationnelle (ou faible) d'un problème donné est indépendant des équations régissant ce problème.

Si la forme (6.57) du THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS constitue la base de nombreuses formulations variationnelles du problème de l'élastostatique infinitésimale (et, plus généralement, de tous les problèmes d'équilibre de milieux continus déformables), il ne peut toutefois s'identifier à ces dernières. En effet, nous avons pour l'instant tiré parti des équations indéfinies de l'équilibre (6.51.1) (écrites sous la forme faible (6.57)) ainsi que des conditions aux limites (6.51.3a) et (6.51.3b), mais pas des équations de comportement (6.51.2), qui comme nous le savons sont nécessaires à la résolution du problème initial ( $P_i$ ) (c'est pour cette raison que les physiciens nomment de telles équations "équations de fermeture"). La prise en compte de ces équations peut s'opérer de différentes manières. On peut tout d'abord imposer qu'elles soient satisfaites en tout point de  $\Omega$  (on dit alors qu'elles sont écrites sous forme forte) de façon à pouvoir les injecter dans (6.57). C'est la démarche que nous adopterons et qui conduit, ainsi que nous l'allons voir dans ce qui suit, à une formulation variationnelle à un seul champ inconnu, le champ des déplacements  $\mathbf{u}$ . Mais on pourrait également choisir de les écrire sous forme faible, en les multipliant par  $\mathbf{s} : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$  puis en intégrant l'expression résultante sur  $\Omega$ , sans effectuer d'intégration par parties, puisque ces équations ne font pas intervenir de dérivées de  $\boldsymbol{\sigma}$  ou de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Nous obtiendrions alors une formulation variationnelle à deux champs inconnus, le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  et le champ des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Choisissant la première de ces deux approches, nous injectons les équations (6.51.2) dans l'intégrande du membre de gauche des égalités (6.57). Il vient

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\
 &= (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\
 &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\
 &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Soit alors  $H^1(\Omega) = \{v : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < +\infty, \int_{\Omega} (\partial_i v)^2 d\Omega < +\infty \forall i \in \{1, 2, 3\}\}$ , et soit  $V_0$  l'espace fonctionnel (de Hilbert) défini par  $V_0 = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}\}$ . Reportant (6.58) dans (6.57), nous obtenons finalement la formulation variationnelle à un champ (déplacement) du problème de l'élastostatique infinitésimale

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_0 \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \end{array} \right. \tag{6.59}$$

déjà rencontrée dans le chapitre 5 du cours (voir la remarque 2 de la section 5.3.3, page 309).

Donnons à présent, sans démonstration, le

**Théorème 21** *Pour que le problème variationnel  $(P_\nu)$  défini par (6.59) soit bien posé (i.e. pour qu'il admette une unique solution  $\mathbf{u}$  dépendant continûment du chargement  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{g}$ , même si ce dernier est irrégulier), il faut et il suffit que  $E > 0$ ,  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ , et que  $\Gamma_1$  contienne au moins trois points non alignés.*


On notera que ce théorème implique une condition relative aux liaisons cinématiques sur  $\Gamma_1$ , dont le but est d'empêcher tout déplacement arbitraire de corps rigide (l'espace  $(H^1(\Omega))^3$  est quotienté par le groupe des rotations-translations de l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ ), ainsi que deux conditions portant sur les constantes mécaniques de la loi de comportement élastique linéaire isotrope. Une conséquence de ces dernières est que la formulation variationnelle (6.59) devient inadaptée si le solide élastique est incompressible ( $\nu = \frac{1}{2}$ ).

Enfin, observons que le problème variationnel  $(P_\nu)$  défini par (6.59) peut être écrit sous la forme abstraite (6.21) en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \right\} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \, d\Omega \\ l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \end{array} \right. \quad (6.60)$$

Conséquemment, le problème approché de Galerkin  $(P_h)$  associé à  $(P_\nu)$  adopte la forme (6.25) de la définition 20, où  $V_h$  est un sous-espace de  $V$  de dimension finie engendré par  $M_h$  fonctions  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  linéairement indépendantes dans  $V$ . La section suivante donne un exemple de construction d'un espace  $V_h$  d'éléments finis à deux dimensions d'espace, pour la résolution approchée du problème d'équilibre du barrage poids de la figure 6.5.

### 6.2.3 Exemple numérique : équilibre d'un barrage poids élastique

 [aud623.html](#) On s'intéresse ici au problème d'équilibre du barrage poids représenté sur la figure 6.5. Ce barrage, constitué d'une argile homogène et imperméable, est symétrique par rapport à l'axe  $Ox_2$ , et ses dimensions sont données par la figure précédente. Il est soumis aux actions mécaniques à distance  $\mathbf{b}$  qui se réduisent ici aux forces de pesanteur, de sorte que l'on a

$$\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_2 \quad (6.61)$$

où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur, et où  $\mathbf{e}_2$  est le vecteur directeur de l'axe  $Ox_2$ . La figure 6.5 illustre également les conditions aux limites du problème. Le barrage est fixé à sa base  $\Gamma_1$  et l'on a donc  $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$ . Il est par ailleurs soumis, sur la partie  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$  de

sa frontière en contact avec l'eau de masse volumique  $\rho_w$ , à la densité surfacique de forces  $\mathbf{g} = -p\mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  désigne la normale sortante et  $p$  la pression hydrostatique, tandis que l'on a  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  sur la partie de  $\Gamma_2$  en contact avec l'air (bord libre). Enfin, le comportement mécanique de l'argile est supposé être, dans le domaine des sollicitations auxquelles est soumis le barrage, élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . Les valeurs des différentes constantes mécaniques sont regroupées dans le tableau 6.3.

TAB. 6.3 – Valeurs des différentes constantes mécaniques

$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\rho_w$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$g$ (m.s <sup>-2</sup> )	$E$ (Pa)	$\nu$
$1.8 \cdot 10^3$	$10^3$	10	$8 \cdot 10^6$	0.3

Il s'agit là d'un problème en déformations planes : les composantes  $u_1$  et  $u_2$  du déplacement  $\mathbf{u}$  dans le plan  $(Ox_1, Ox_2)$  de la modélisation ne sont fonctions que des seules variables d'espace  $x_1$  et  $x_2$ , tandis que la composante  $u_3$  de  $\mathbf{u}$  dans la direction orthogonale à ce plan est nulle. On a donc, en tout point  $\vec{x} \in \Omega$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ , et les équations de comportement (6.51.2) montrent que l'on a également  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . La composante  $\sigma_{33}$  du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est en revanche pas nulle puisque  $\nu \neq 0$ .

### 6.2.3.1 Choix d'un élément fini bidimensionnel

La dimension du problème physique que l'on veut résoudre est ici  $n = 2$ . Choisissons alors comme géométrie simple  $\Omega^e \subset \mathbb{R}^2$  le triangle de sommets  $A^e$ ,  $B^e$  et  $C^e$  représenté sur la figure 6.6

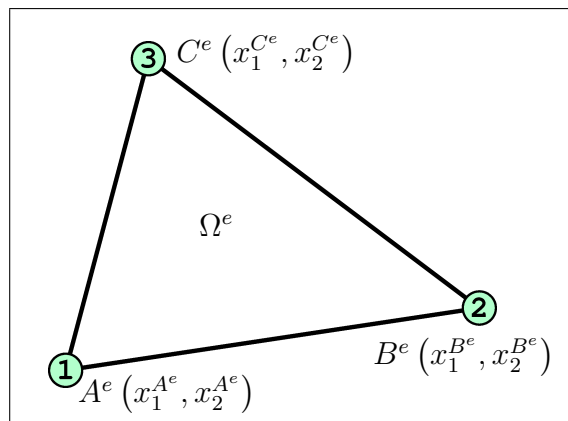


FIG. 6.6 – Élément bidimensionnel linéaire de Lagrange

La dimension du champ inconnu  $\mathbf{u}$  que l'on cherche à approcher est quant à elle  $p = 2$ . Dans le but d'assurer, ainsi que nous l'avons fait dans la section 6.1.4.1, la continuité des

fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$ , nous choisissons ici comme degrés de liberté les six formes linéaires associant à toute fonction  $\mathbf{v} \in F^2 = \{\mathbf{v} : \Omega^e \mapsto \mathbb{R}^2\}$  les valeurs de ses composantes aux points  $A^e$  (numéroté 1),  $B^e$  (numéroté 2) et  $C^e$  (numéroté 3), comme suit :

$$\begin{cases} l_1^e(\mathbf{v}) = v_1(A^e) & l_2^e(\mathbf{v}) = v_2(A^e) \\ l_3^e(\mathbf{v}) = v_1(B^e) & l_4^e(\mathbf{v}) = v_2(B^e) \\ l_5^e(\mathbf{v}) = v_1(C^e) & l_6^e(\mathbf{v}) = v_2(C^e) \end{cases} \quad \forall \mathbf{v} \in F^2 \quad (6.62)$$

À chacun des points (nœuds)  $A^e$ ,  $B^e$  et  $C^e$  de l'élément  $\Omega^e$  correspondent donc deux degrés de liberté fournissant les composantes  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathbf{v}$  en ce nœud. Soit à présent  $P_m^2 \subset F^2$  l'espace d'interpolation, de type polynomial. La propriété 1 d'unisolvance ne peut alors être satisfaite que si les composantes  $v_1$  et  $v_2$  des fonctions  $\mathbf{v} \in P_m^2$  sont des polynômes de degré un en  $x_1$  et  $x_2$  :  $m = 1$ . L'espace d'interpolation est donc  $P_1^2$ , et les fonctions  $(\varphi_i^e)_{i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$  associées de façon biunivoque aux six degrés de liberté précédemment choisis sont données par

$$\begin{cases} \varphi_1^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1^e(\vec{x}) \\ 0 \end{bmatrix} & \varphi_2^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1^e(\vec{x}) \end{bmatrix} \\ \varphi_3^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_2^e(\vec{x}) \\ 0 \end{bmatrix} & \varphi_4^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2^e(\vec{x}) \end{bmatrix} \\ \varphi_5^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_3^e(\vec{x}) \\ 0 \end{bmatrix} & \varphi_6^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_3^e(\vec{x}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.63)$$

où les fonctions réelles  $\varphi_1^e(\vec{x})$ ,  $\varphi_2^e(\vec{x})$  et  $\varphi_3^e(\vec{x})$  sont définies, avec les notations de la figure 6.6, par les relations suivantes

$$\begin{cases} \varphi_1^e(\vec{x}) = \frac{1}{2S} ((x_2^{B^e} - x_2^{C^e})x_1 + (x_1^{C^e} - x_1^{B^e})x_2 + x_1^{B^e}x_2^{C^e} - x_1^{C^e}x_2^{B^e}) \\ \varphi_2^e(\vec{x}) = \frac{1}{2S} ((x_2^{C^e} - x_2^{A^e})x_1 + (x_1^{A^e} - x_1^{C^e})x_2 + x_1^{C^e}x_2^{A^e} - x_1^{A^e}x_2^{C^e}) \\ \varphi_3^e(\vec{x}) = \frac{1}{2S} ((x_2^{A^e} - x_2^{B^e})x_1 + (x_1^{B^e} - x_1^{A^e})x_2 + x_1^{A^e}x_2^{B^e} - x_1^{B^e}x_2^{A^e}) \end{cases} \quad (6.64)$$

dans lesquelles  $S$  désigne l'aire de l'élément  $\Omega^e$

$$S = \frac{1}{2} (x_1^{A^e}x_2^{B^e} + x_1^{B^e}x_2^{C^e} + x_1^{C^e}x_2^{A^e} - x_1^{B^e}x_2^{A^e} - x_1^{A^e}x_2^{C^e} - x_1^{C^e}x_2^{B^e}) \quad (6.65)$$

### 6.2.3.2 Triangulation

Considérons la triangulation de  $\Omega$  donnée par la figure 6.7 et composée de 30 éléments triangulaires tels que celui de la figure 6.6.



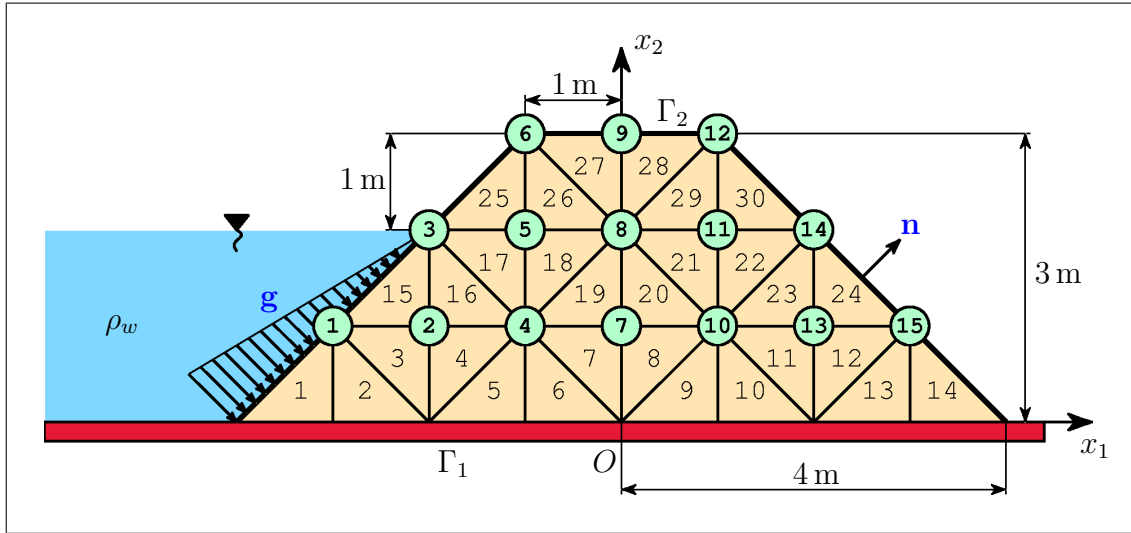


FIG. 6.7 – Triangulation du barrage

Nous avons donc ici  $N_h = 30$  et  $\nu^e = 6$ ,  $\forall e \in \{1, \dots, N_h\}$ . Observons que les éléments de cette triangulation sont tous des triangles rectangles isocèles, de côtés orthogonaux parallèles aux axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  et d'égale longueur  $h = 1$  m. Ils ne diffèrent entre eux que par leur orientation. Effectuons alors, pour les besoins des développements de la section 6.2.3.5, une partition de l'ensemble  $\mathcal{E} = \{1, \dots, 30\}$  en quatre sous-ensembles  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$  et  $\mathcal{E}_4$  correspondant à chacune des quatre orientations possibles de ces éléments. Leur numérotation étant celle donnée par la figure 6.7, nous avons

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \{2, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 30\} \\ \mathcal{E}_2 = \{3, 7, 11, 17, 21, 27\} \\ \mathcal{E}_3 = \{4, 8, 12, 18, 22, 28\} \\ \mathcal{E}_4 = \{1, 5, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 29\} \end{cases} \quad (6.66)$$

Le sous-ensemble  $\mathcal{E}_1$  correspond donc aux éléments ayant leur angle droit en bas et à gauche, tandis que  $\mathcal{E}_2$  est associé à ceux dont l'angle droit se situe en haut et à droite. Le sous-ensemble  $\mathcal{E}_3$  fournit quant à lui les numéros des éléments dont l'angle droit est en haut et à gauche, et  $\mathcal{E}_4$  ceux des éléments dont l'angle droit se trouve en bas et à droite.

### 6.2.3.3 Matrice de connectivité

Il nous faut à présent construire la matrice de connectivité **NU** associée à la triangulation  $\mathcal{T}$  de la figure 6.7. Convenons tout d'abord du mode de numérotation locale des six degrés de liberté de chaque élément  $\Omega^e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ . Il suffit pour cela de décider d'un mode de numérotation locale de leurs nœuds. Au nœud de numéro local  $k \in \{1, 2, 3\}$  correspond alors, conformément à (6.62), les deux degrés de liberté de numéros locaux  $2k - 1$  et  $2k$  fournissant les composantes  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathbf{v}$  en ce nœud. Nous choisissons ici d'affecter le numéro 1 au

nœud  $A^e$  correspondant à l'angle droit de l'élément  $\Omega^e$ , et les numéros 2 puis 3 aux nœuds  $B^e$  puis  $C^e$  rencontrés successivement sur la frontière  $\Gamma^e$  de  $\Omega^e$  lorsqu'on la parcourt dans le sens trigonométrique direct à partir de  $A^e$  (le sens de parcours de  $\Gamma^e$  n'a en fait aucune importance, mais il doit impérativement être le même pour tous les éléments).

Soit à présent  $\mathcal{S}$  l'union des degrés de liberté de tous les éléments finis de la triangulation  $\mathcal{T}$ , ensemble qu'il nous faut numéroter de 1 à  $M_h$  en ne comptant qu'une fois les degrés de liberté communs à plusieurs éléments et en ne comptant pas ceux correspondant à des valeurs connues de la solution. Effectuer cette numérotation globale revient ici à considérer l'ensemble  $\mathcal{N}$  des nœuds de  $\mathcal{T}$  n'appartenant pas à  $\Gamma_1$ . Cet ensemble étant numéroté de 1 à 15 comme indiqué sur la figure 6.7, au nœud de numéro global  $i \in \{1, \dots, 15\}$  correspond alors, compte tenu des considérations du paragraphe précédent, les deux degrés de liberté de numéros globaux  $2i - 1$  et  $2i$  fournissant les composantes  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathbf{v}$  en ce nœud.

Soit **NN** l'application qui à tout nœud de l'élément  $\Omega^e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , de numéro local  $k \in \{1, 2, 3\}$  associe son numéro global **NN**( $k, e$ ) dans  $\mathcal{N}$ . Cette application est appelée matrice (ou table) de connectivité nodale. Elle est fournie, pour la triangulation  $\mathcal{T}$  de la figure 6.7, par le tableau 6.4.

TAB. 6.4 – Matrice de connectivité nodale associée à la triangulation de la figure 6.7

n° local du noeud	Numéro de l'élément														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	-	2	2	-	-	7	7	-	-	13	13	-	-	2
2	1	-	1	-	4	-	4	-	10	-	10	-	15	-	3
3	-	1	-	4	-	4	-	10	-	10	-	15	-	15	1

n° local du noeud	Numéro de l'élément														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	5	5	7	7	11	11	13	13	5	5	9	9	11	11
2	4	3	4	8	10	8	10	14	15	6	8	6	8	12	14
3	3	4	8	4	8	10	14	10	14	3	6	8	12	8	12

La matrice de connectivité **NU** associée à  $\mathcal{T}$  et donnée par le tableau 6.5 se déduit alors aisément de la matrice de connectivité nodale **NN**. Soit en effet  $e \in \{1, \dots, N_h\}$  et  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Si le nœud de  $\Omega^e$  et de numéro local  $k$  n'appartient pas à  $\mathcal{N}$  (il appartient alors à  $\Gamma_1$ ), les degrés de liberté de  $\Omega^e$  et de numéros locaux  $2k - 1$  et  $2k$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{S}$ . Si ce nœud

appartient à  $\mathcal{N}$ , on a les relations suivantes qui définissent complètement **NU**.

$$\mathbf{NU}(2k-1, e) = 2\mathbf{NN}(k, e) - 1 \quad \mathbf{NU}(2k, e) = 2\mathbf{NN}(k, e) \quad (6.67)$$

TAB. 6.5 – Matrice de connectivité (d.d.l.) associée à la triangulation de la figure 6.7

n° local du d.d.l.	Numéro de l'élément														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-	-	3	3	-	-	13	13	-	-	25	25	-	-	3
2	-	-	4	4	-	-	14	14	-	-	26	26	-	-	4
3	1	-	1	-	7	-	7	-	19	-	19	-	29	-	5
4	2	-	2	-	8	-	8	-	20	-	20	-	30	-	6
5	-	1	-	7	-	7	-	19	-	19	-	29	-	29	1
6	-	2	-	8	-	8	-	20	-	20	-	30	-	30	2

n° local du d.d.l.	Numéro de l'élément															
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	3	9	9	13	13	21	21	25	25	9	9	17	17	21	21	
2	4	10	10	14	14	22	22	26	26	10	10	18	18	22	22	
3	7	5	7	15	19	15	19	27	29	11	15	11	15	23	27	
4	8	6	8	16	20	16	20	28	30	12	16	12	16	24	28	
5	5	7	15	7	15	19	27	19	27	5	11	15	23	15	23	
6	6	8	16	8	16	20	28	20	28	6	12	16	24	16	24	

Nous avons donc, pour la triangulation  $\mathcal{T}$  de la figure 6.7,  $M_h = 30$ .

### 6.2.3.4 Expressions locales des déplacements, des déformations et des contraintes

Nous pouvons à présent construire les fonctions  $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  génératrices de l'espace d'éléments finis  $V_h$  ainsi qu'il est indiqué dans la section 6.1.4.4 : à chaque degré de liberté de numéro global  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, M_h\}$ , correspond une unique fonction  $\psi_i$  définie comme suit :

$$\forall e \in \{1, \dots, N_h\} \quad \psi_i|_{\Omega^e} = \begin{cases} \varphi_k^e & \text{si } \exists k \in \{1, \dots, \nu^e\} \text{ tel que } i = \mathbf{NU}(k, e) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.68)$$

Nous ne chercherons pas ici à exhiber ces fonctions. En effet, leur définition est locale (i.e. elle s'effectue élément par élément) et ne nécessite que la connaissance des fonctions  $\varphi_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , et de la matrice de connectivité  $\mathbf{NU}$ . L'expression locale (i.e. sur chaque élément) des différents champs (déplacements, déformations, contraintes) ne requiert donc que la connaissance de ces mêmes fonctions. Illustrons notre propos en considérant un champ de déplacement  $\mathbf{v}_h \in V_h$  quelconque mais fixé. On a alors

$$\mathbf{v}_h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=M_h} v_i \boldsymbol{\psi}_i(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (6.69)$$

où les composantes  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  de  $\mathbf{v}_h$  relativement à la base  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  sont les valeurs des composantes (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de cette fonction aux nœuds du maillage (c'est la remarque 3 de la section 6.1.4.4). Soit alors  $e \in \{1, \dots, N_h\}$  quelconque mais fixé, et soit  $\mathbf{v}_h^e$  la trace de  $\mathbf{v}_h$  sur l'élément  $\Omega^e$ . Les traces des fonctions  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, M_h\}}$  sur  $\Omega^e$  étant les fonctions  $(\varphi_k^e)_{k \in \{1, \dots, \nu^e\}}$ , il vient

$$\mathbf{v}_h^e(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{k=\nu^e} v_k^e \varphi_k^e(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega^e \quad (6.70)$$

où les composantes  $(v_k^e)_{k \in \{1, \dots, \nu^e\}}$  de  $\mathbf{v}_h^e$  relativement à la base locale  $(\varphi_k^e)_{k \in \{1, \dots, \nu^e\}}$  sont les valeurs des composantes (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\mathbf{v}_h$  aux nœuds de l'élément  $\Omega^e$ . Plus précisément, nous avons ici, avec  $\nu^e = 6$  et compte tenu de (6.62) et de la propriété d'unisolvance 1,

$$\begin{cases} v_1^e = v_{h1}(A^e) & v_2^e = v_{h2}(A^e) \\ v_3^e = v_{h1}(B^e) & v_4^e = v_{h2}(B^e) \\ v_5^e = v_{h1}(C^e) & v_6^e = v_{h2}(C^e) \end{cases} \quad (6.71)$$

Soit alors  $\mathbf{V}^e$  le vecteur de  $\mathbb{R}^6$  de composantes  $(v_k^e)_{k \in \{1, \dots, 6\}}$ , et soit, pour  $\vec{x} \in \Omega^e$  quelconque mais fixé,  $\mathbf{N}^e(\vec{x})$  la matrice de  $\mathbb{R}^{2 \times 6}$  (i.e. à 2 lignes et 6 colonnes) définie par

$$\mathbf{N}^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1^e(\vec{x}) & 0 & \varphi_2^e(\vec{x}) & 0 & \varphi_3^e(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \varphi_1^e(\vec{x}) & 0 & \varphi_2^e(\vec{x}) & 0 & \varphi_3^e(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

La relation (6.70) devient alors, compte tenu de la définition (6.63) des fonctions  $(\varphi_k^e)_{k \in \{1, \dots, 6\}}$ ,

$$\mathbf{v}_h^e(\vec{x}) = \mathbf{N}^e(\vec{x}) \cdot \mathbf{V}^e \quad \forall \vec{x} \in \Omega^e \quad (6.73)$$

et nous l'écrivons, en omettant la variable d'espace  $\vec{x}$ ,

$$\mathbf{v}_h^e = \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{V}^e \quad (6.74)$$

Intéressons-nous à présent aux expressions locales (i.e. sur  $\Omega^e$ ) des déformations  $\underline{\varepsilon}_h^e$  et des contraintes  $\underline{\sigma}_h^e$  résultant du déplacement  $\mathbf{v}_h^e$ . S'agissant ici d'un problème en déformations planes, nous poserons, après avoir introduit, pour simplifier les développements qui suivent, la distorsion  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ ,

$$\underline{\varepsilon}_h^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}_h^e = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

et nous désignerons par  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  les opérateurs “déformation” et “contrainte” définis par

$$\underline{\varepsilon}(\cdot) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\cdot) \\ \varepsilon_{22}(\cdot) \\ \gamma_{12}(\cdot) \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}(\cdot) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\cdot) \\ \sigma_{22}(\cdot) \\ \sigma_{12}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

Ces opérateurs sont liés par les équations de comportement (6.51.2) et l'on a

$$\underline{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (6.77)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  définie par

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

Soit à présent  $\mathcal{D}$  l'opérateur différentiel matriciel défini par

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

Il vient alors, avec (6.74), (6.75), (6.76) et (6.79),

$$\underline{\varepsilon}_h^e = \underline{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^e) = \mathcal{D} \cdot \mathbf{v}_h^e = \mathcal{D} \cdot (\mathbf{N}^e \cdot \mathbf{V}^e) = (\mathcal{D} \cdot \mathbf{N}^e) \cdot \mathbf{V}^e = \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{V}^e \quad (6.80)$$

où  $\mathbf{B}^e$  est la matrice de  $\mathbb{R}^{3 \times 6}$  définie, pour  $\vec{x} \in \Omega^e$  quelconque mais fixé, par

$$\mathbf{B}^e(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi_1^e(\vec{x}) & 0 & \partial_1 \varphi_2^e(\vec{x}) & 0 & \partial_1 \varphi_3^e(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \partial_2 \varphi_1^e(\vec{x}) & 0 & \partial_2 \varphi_2^e(\vec{x}) & 0 & \partial_2 \varphi_3^e(\vec{x}) \\ \partial_2 \varphi_1^e(\vec{x}) & \partial_1 \varphi_1^e(\vec{x}) & \partial_2 \varphi_2^e(\vec{x}) & \partial_1 \varphi_2^e(\vec{x}) & \partial_2 \varphi_3^e(\vec{x}) & \partial_1 \varphi_3^e(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

On a ensuite, avec (6.75), (6.76), (6.77) et (6.80),

$$\underline{\sigma}_h^e = \underline{\sigma}(\mathbf{v}_h^e) = \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^e) = \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_h^e = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{V}^e \quad (6.82)$$

Observons enfin, compte tenu de (6.63), (6.72) et (6.73), que la colonne numéro  $i$  de  $\mathbf{B}^e$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , représente la déformation  $\underline{\varepsilon}(\varphi_i^e)$  résultant du déplacement  $\varphi_i^e$ . Conséquemment, la contrainte  $\underline{\sigma}(\varphi_i^e)$  engendrée sur l'élément  $\Omega^e$  par ce même déplacement est donnée par la colonne  $i$  de  $\mathbf{D.B}^e$ .

### 6.2.3.5 Résolution numérique

Nous nous proposons ici de résoudre le système d'équations linéaires (6.42) associé à la modélisation par éléments finis de notre problème, décrite dans les sections précédentes et pour laquelle nous avons  $N_h = 30$ ,  $\nu^e = 6$ ,  $\forall e \in \{1, \dots, N_h\}$ , et  $M_h = 30$ .

Soit  $\Omega^e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_h\}$ , un élément quelconque mais fixé de frontière  $\Gamma^e$ , et soient  $\mathbf{K}^e$  et  $\mathbf{F}^e$  la matrice et le second membre élémentaires, de composantes respectives  $K_{kl}^e$ ,  $(k, l) \in \{1, \dots, \nu^e\}^2$ , et  $F_k^e$ ,  $k \in \{1, \dots, \nu^e\}$ , définies par (6.44). On a alors, compte tenu de (6.60),

$$\begin{cases} K_{kl}^e &= \int_{\Omega^e} (\lambda \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) + 2\mu \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) : \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e)) \, d\Omega \\ F_k^e &= \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{b} \cdot \varphi_k^e \, d\Omega + \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \varphi_k^e \, d\Gamma \end{cases} \quad (6.83)$$

Intéressons-nous tout d'abord au calcul de  $\mathbf{K}^e$ . S'agissant ici d'un problème en déformations planes, nous avons, compte tenu de (6.58) et (6.76),

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) + 2\mu \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) : \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) &= \underline{\sigma}(\varphi_l^e) : \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) \\ &= \sigma_{11}(\varphi_l^e) \varepsilon_{11}(\varphi_k^e) + \sigma_{22}(\varphi_l^e) \varepsilon_{22}(\varphi_k^e) \\ &\quad + 2\sigma_{12}(\varphi_l^e) \varepsilon_{12}(\varphi_k^e) \\ &= \underline{\sigma}(\varphi_l^e) \cdot \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) \end{aligned} \quad (6.84)$$

Or  $\underline{\varepsilon}(\varphi_k^e)$  correspond à la colonne numéro  $k$  de  $\mathbf{B}^e$ , tandis que  $\underline{\sigma}(\varphi_l^e)$  est donné par la colonne numéro  $l$  de  $\mathbf{D.B}^e$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) \operatorname{tr} \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) + 2\mu \underline{\varepsilon}(\varphi_l^e) : \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) &= \underline{\sigma}(\varphi_l^e) \cdot \underline{\varepsilon}(\varphi_k^e) \\ &= \sum_{i=1}^{i=6} (D_{ij} B_{jl}^e) B_{ik}^e \\ &= (\mathbf{D.B}^e)_{kl} \end{aligned} \quad (6.85)$$

et l'on a donc finalement

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{D.B}^e \cdot \mathbf{B}^e \, d\Omega \quad (6.86)$$

Considérons à présent la partition  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4)$  de l'ensemble  $\mathcal{E} = \{1, \dots, 30\}$  des numéros de tous les éléments (figure 6.7) introduite dans la section 6.2.3.2 et donnée par (6.66), et désignons par  $a_1$  et  $a_2$  les coordonnées du nœud numéro 1 (nœud  $A^e$ ) de l'élément  $\Omega^e$  et par  $h$  la longueur de ses côtés orthogonaux. Nous obtenons alors, compte tenu de (6.64), (6.65) et (6.81) ainsi que de la figure 6.7,

$$\forall e \in \mathcal{E}_1 : \begin{cases} \varphi_1^e = 1 + \frac{1}{h}(a_1 + a_2 - x_1 - x_2) \\ \varphi_2^e = \frac{1}{h}(x_1 - a_1) \\ \varphi_3^e = \frac{1}{h}(x_2 - a_2) \end{cases} \implies \mathbf{B}^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_2 : \begin{cases} \varphi_1^e = 1 + \frac{1}{h}(x_1 + x_2 - a_1 - a_2) \\ \varphi_2^e = \frac{1}{h}(a_1 - x_1) \\ \varphi_3^e = \frac{1}{h}(a_2 - x_2) \end{cases} \implies \mathbf{B}^e = \frac{-1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_3 : \begin{cases} \varphi_1^e = 1 + \frac{1}{h}(a_1 - a_2 + x_2 - x_1) \\ \varphi_2^e = \frac{1}{h}(a_2 - x_2) \\ \varphi_3^e = \frac{1}{h}(x_1 - a_1) \end{cases} \implies \mathbf{B}^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_4 : \begin{cases} \varphi_1^e = 1 + \frac{1}{h}(a_2 - a_1 + x_1 - x_2) \\ \varphi_2^e = \frac{1}{h}(x_2 - a_2) \\ \varphi_3^e = \frac{1}{h}(a_1 - x_1) \end{cases} \implies \mathbf{B}^e = \frac{-1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

ce qui donne, avec (6.78) et (6.86),

$$\forall e \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 : \mathbf{K}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda + 3\mu & \lambda + \mu & -\lambda - 2\mu & -\mu & -\mu & -\lambda \\ \lambda + \mu & \lambda + 3\mu & -\lambda & -\mu & -\mu & -\lambda - 2\mu \\ -\lambda - 2\mu & -\lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & \lambda \\ -\mu & -\mu & 0 & \mu & \mu & 0 \\ -\mu & -\mu & 0 & \mu & \mu & 0 \\ -\lambda & -\lambda - 2\mu & \lambda & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

ainsi que

$$\forall e \in \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4 : \mathbf{K}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda + 3\mu & -\lambda - \mu & -\mu & \lambda & -\lambda - 2\mu & \mu \\ -\lambda - \mu & \lambda + 3\mu & \mu & -\lambda - 2\mu & \lambda & -\mu \\ -\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & -\mu \\ \lambda & -\lambda - 2\mu & 0 & \lambda + 2\mu & -\lambda & 0 \\ -\lambda - 2\mu & \lambda & 0 & -\lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ \mu & -\mu & -\mu & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.92)$$





La résolution du système d'équations linéaires  $\mathbf{K}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{F}$  fournit alors les composantes  $(u_i)_{i \in \{1, \dots, 30\}}$  de la solution approchée  $\mathbf{u}_h$  de notre problème sur la base  $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in \{1, \dots, 30\}}$  de l'espace d'éléments finis  $V_h$ , qui ne sont autres ici que les composantes (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\mathbf{u}_h$  aux nœuds de la triangulation  $\mathcal{T}$ .

On en déduit ensuite, grâce à (6.80) et (6.82), les déformations et les contraintes au sein de chaque élément.

TAB. 6.6 – Composantes nodales du déplacement  $\mathbf{u}_h$

n° du noeud	Déplacement $\mathbf{u}_h$ (m)	
	$u_1$	$u_2$
1	$-0.32277 \cdot 10^{-3}$	$-0.19918 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.27275 \cdot 10^{-3}$	$-0.24784 \cdot 10^{-2}$
3	$-0.29404 \cdot 10^{-3}$	$-0.38562 \cdot 10^{-2}$
4	$-0.28560 \cdot 10^{-3}$	$-0.33678 \cdot 10^{-2}$
5	$0.90614 \cdot 10^{-4}$	$-0.52057 \cdot 10^{-2}$
6	$0.57679 \cdot 10^{-3}$	$-0.61712 \cdot 10^{-2}$
7	$0.35683 \cdot 10^{-3}$	$-0.34892 \cdot 10^{-2}$
8	$0.44777 \cdot 10^{-3}$	$-0.60448 \cdot 10^{-2}$
9	$0.46458 \cdot 10^{-3}$	$-0.64285 \cdot 10^{-2}$
10	$0.10657 \cdot 10^{-2}$	$-0.33446 \cdot 10^{-2}$
11	$0.84440 \cdot 10^{-3}$	$-0.52084 \cdot 10^{-2}$
12	$0.35260 \cdot 10^{-3}$	$-0.62038 \cdot 10^{-2}$
13	$0.12718 \cdot 10^{-2}$	$-0.24142 \cdot 10^{-2}$
14	$0.13086 \cdot 10^{-2}$	$-0.38459 \cdot 10^{-2}$
15	$0.17866 \cdot 10^{-2}$	$-0.14137 \cdot 10^{-2}$

L'ensemble de ces résultats fait l'objet des tableaux 6.6 (déplacements), 6.7 (déformations) et 6.8 (contraintes), les valeurs de  $\sigma_{33}$  données dans ce dernier tableau ayant été évaluées grâce à la relation

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (6.97)$$

TAB. 6.7 – Composantes des déformations  $\varepsilon_h^e$  au sein de chaque élément

n° de l'élément	Déformations $\varepsilon_h^e$		
	$\varepsilon_{11}^e$	$\varepsilon_{22}^e$	$\gamma_{12}^e$
1	0.00000	$-0.19918 \cdot 10^{-2}$	$-0.32277 \cdot 10^{-3}$
2	0.00000	$-0.19918 \cdot 10^{-2}$	$-0.32277 \cdot 10^{-3}$
3	$0.50019 \cdot 10^{-4}$	$-0.24784 \cdot 10^{-2}$	$-0.75942 \cdot 10^{-3}$
4	$-0.12849 \cdot 10^{-4}$	$-0.24784 \cdot 10^{-2}$	$-0.11621 \cdot 10^{-2}$
5	0.00000	$-0.33678 \cdot 10^{-2}$	$-0.28560 \cdot 10^{-3}$
6	0.00000	$-0.33678 \cdot 10^{-2}$	$-0.28560 \cdot 10^{-3}$
7	$0.64243 \cdot 10^{-3}$	$-0.34892 \cdot 10^{-2}$	$0.23543 \cdot 10^{-3}$
8	$0.70890 \cdot 10^{-3}$	$-0.34892 \cdot 10^{-2}$	$0.50140 \cdot 10^{-3}$
9	0.00000	$-0.33446 \cdot 10^{-2}$	$0.10657 \cdot 10^{-2}$
10	0.00000	$-0.33446 \cdot 10^{-2}$	$0.10657 \cdot 10^{-2}$
11	$0.20608 \cdot 10^{-3}$	$-0.24142 \cdot 10^{-2}$	$0.22022 \cdot 10^{-2}$
12	$0.51482 \cdot 10^{-3}$	$-0.24142 \cdot 10^{-2}$	$0.22723 \cdot 10^{-2}$
13	0.00000	$-0.14137 \cdot 10^{-2}$	$0.17866 \cdot 10^{-2}$
14	0.00000	$-0.14137 \cdot 10^{-2}$	$0.17866 \cdot 10^{-2}$
15	$0.50019 \cdot 10^{-4}$	$-0.13778 \cdot 10^{-2}$	$-0.50795 \cdot 10^{-3}$
16	$-0.12849 \cdot 10^{-4}$	$-0.13778 \cdot 10^{-2}$	$-0.91062 \cdot 10^{-3}$
17	$0.38465 \cdot 10^{-3}$	$-0.18379 \cdot 10^{-2}$	$-0.97328 \cdot 10^{-3}$
18	$0.35716 \cdot 10^{-3}$	$-0.18379 \cdot 10^{-2}$	$-0.46291 \cdot 10^{-3}$
19	$0.64243 \cdot 10^{-3}$	$-0.25557 \cdot 10^{-2}$	$-0.30453 \cdot 10^{-4}$
20	$0.70890 \cdot 10^{-3}$	$-0.25557 \cdot 10^{-2}$	$0.23552 \cdot 10^{-3}$
21	$0.39663 \cdot 10^{-3}$	$-0.18639 \cdot 10^{-2}$	$0.61504 \cdot 10^{-3}$
22	$0.46425 \cdot 10^{-3}$	$-0.18639 \cdot 10^{-2}$	$0.11412 \cdot 10^{-2}$
23	$0.20608 \cdot 10^{-3}$	$-0.14317 \cdot 10^{-2}$	$0.96723 \cdot 10^{-3}$
24	$0.51482 \cdot 10^{-3}$	$-0.14317 \cdot 10^{-2}$	$0.10373 \cdot 10^{-2}$
25	$0.38465 \cdot 10^{-3}$	$-0.96552 \cdot 10^{-3}$	$-0.86332 \cdot 10^{-3}$
26	$0.35716 \cdot 10^{-3}$	$-0.96552 \cdot 10^{-3}$	$-0.35295 \cdot 10^{-3}$
27	$-0.11222 \cdot 10^{-3}$	$-0.38370 \cdot 10^{-3}$	$-0.24051 \cdot 10^{-3}$
28	$-0.11197 \cdot 10^{-3}$	$-0.38370 \cdot 10^{-3}$	$0.24147 \cdot 10^{-3}$
29	$0.39663 \cdot 10^{-3}$	$-0.99540 \cdot 10^{-3}$	$0.34457 \cdot 10^{-3}$
30	$0.46425 \cdot 10^{-3}$	$-0.99540 \cdot 10^{-3}$	$0.87074 \cdot 10^{-3}$

TAB. 6.8 – Composantes des contraintes  $\sigma_h^e$  au sein de chaque élément

n° de l'élément	Contraintes $\sigma_h^e$ (Pa)			
	$\sigma_{11}^e$	$\sigma_{22}^e$	$\sigma_{12}^e$	$\sigma_{33}^e$
1	$-0.11951 \cdot 10^5$	$-0.23901 \cdot 10^5$	$-0.96832 \cdot 10^3$	$-0.11951 \cdot 10^5$
2	$-0.11951 \cdot 10^5$	$-0.23901 \cdot 10^5$	$-0.96832 \cdot 10^3$	$-0.11951 \cdot 10^5$
3	$-0.14270 \cdot 10^5$	$-0.29441 \cdot 10^5$	$-0.22783 \cdot 10^4$	$-0.14570 \cdot 10^5$
4	$-0.15025 \cdot 10^5$	$-0.29818 \cdot 10^5$	$-0.34863 \cdot 10^4$	$-0.14948 \cdot 10^5$
5	$-0.20207 \cdot 10^5$	$-0.40413 \cdot 10^5$	$-0.85681 \cdot 10^3$	$-0.20207 \cdot 10^5$
6	$-0.20207 \cdot 10^5$	$-0.40413 \cdot 10^5$	$-0.85681 \cdot 10^3$	$-0.20207 \cdot 10^5$
7	$-0.13226 \cdot 10^5$	$-0.38015 \cdot 10^5$	$0.70629 \cdot 10^3$	$-0.17080 \cdot 10^5$
8	$-0.12428 \cdot 10^5$	$-0.37616 \cdot 10^5$	$0.15042 \cdot 10^4$	$-0.16682 \cdot 10^5$
9	$-0.20067 \cdot 10^5$	$-0.40135 \cdot 10^5$	$0.31972 \cdot 10^4$	$-0.20067 \cdot 10^5$
10	$-0.20067 \cdot 10^5$	$-0.40135 \cdot 10^5$	$0.31972 \cdot 10^4$	$-0.20067 \cdot 10^5$
11	$-0.12012 \cdot 10^5$	$-0.27734 \cdot 10^5$	$0.66066 \cdot 10^4$	$-0.13249 \cdot 10^5$
12	$-0.83073 \cdot 10^4$	$-0.25881 \cdot 10^5$	$0.68169 \cdot 10^4$	$-0.11396 \cdot 10^5$
13	$-0.84822 \cdot 10^4$	$-0.16964 \cdot 10^5$	$0.53599 \cdot 10^4$	$-0.84822 \cdot 10^4$
14	$-0.84822 \cdot 10^4$	$-0.16964 \cdot 10^5$	$0.53599 \cdot 10^4$	$-0.84822 \cdot 10^4$
15	$-0.76663 \cdot 10^4$	$-0.16233 \cdot 10^5$	$-0.15239 \cdot 10^4$	$-0.79664 \cdot 10^4$
16	$-0.84207 \cdot 10^4$	$-0.16610 \cdot 10^5$	$-0.27319 \cdot 10^4$	$-0.83436 \cdot 10^4$
17	$-0.64117 \cdot 10^4$	$-0.19747 \cdot 10^5$	$-0.29199 \cdot 10^4$	$-0.87196 \cdot 10^4$
18	$-0.67416 \cdot 10^4$	$-0.19912 \cdot 10^5$	$-0.13887 \cdot 10^4$	$-0.88846 \cdot 10^4$
19	$-0.76247 \cdot 10^4$	$-0.26813 \cdot 10^5$	$-0.91358 \cdot 10^2$	$-0.11479 \cdot 10^5$
20	$-0.68271 \cdot 10^4$	$-0.26414 \cdot 10^5$	$0.70657 \cdot 10^3$	$-0.11080 \cdot 10^5$
21	$-0.64236 \cdot 10^4$	$-0.19987 \cdot 10^5$	$0.18451 \cdot 10^4$	$-0.88034 \cdot 10^4$
22	$-0.56122 \cdot 10^4$	$-0.19581 \cdot 10^5$	$0.34236 \cdot 10^4$	$-0.83977 \cdot 10^4$
23	$-0.61174 \cdot 10^4$	$-0.15944 \cdot 10^5$	$0.29017 \cdot 10^4$	$-0.73538 \cdot 10^4$
24	$-0.24125 \cdot 10^4$	$-0.14092 \cdot 10^5$	$0.31120 \cdot 10^4$	$-0.55014 \cdot 10^4$
25	$-0.11773 \cdot 10^4$	$-0.92783 \cdot 10^4$	$-0.25900 \cdot 10^4$	$-0.34852 \cdot 10^4$
26	$-0.15072 \cdot 10^4$	$-0.94432 \cdot 10^4$	$-0.10588 \cdot 10^4$	$-0.36501 \cdot 10^4$
27	$-0.36488 \cdot 10^4$	$-0.52777 \cdot 10^4$	$-0.72153 \cdot 10^3$	$-0.29755 \cdot 10^4$
28	$-0.36459 \cdot 10^4$	$-0.52763 \cdot 10^4$	$0.72442 \cdot 10^3$	$-0.29741 \cdot 10^4$
29	$-0.12129 \cdot 10^4$	$-0.95651 \cdot 10^4$	$0.10337 \cdot 10^4$	$-0.35926 \cdot 10^4$
30	$-0.40146 \cdot 10^3$	$-0.91594 \cdot 10^4$	$0.26122 \cdot 10^4$	$-0.31869 \cdot 10^4$





## 6.3 Exercices

### 6.3.1 Énoncés

#### E6.1 Essai de compression œdométrique

Un matériau élastique linéaire isotrope et pesant, de masse volumique  $\rho$  et de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , est placé dans un moule cylindrique indéformable (œdomètre) de hauteur  $h$  et soumis sur sa face supérieure  $z = h$  à une pression uniforme  $q$  (voir l'exemple de la section 5.3.4 ainsi que la figure 5.2 page 310). Le déplacement vertical  $u(z)$ ,  $z \in [0, h]$ , est alors solution du problème aux limites à deux points

$$(P_i) \begin{cases} \text{Trouver } u : [0, h] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que} \\ (\lambda + 2\mu)u''(z) - \rho g = 0 \quad \forall z \in ]0, h[ \\ u(0) = 0 \quad u'(h) = \frac{-q}{\lambda + 2\mu} \end{cases}$$

1. Donner, en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $q$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $z$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ , la solution analytique de  $(P_i)$ .
2. Écrire la formulation faible  $(P_v)$  de  $(P_i)$ .
3. Résoudre  $(P_v)$  en discrétisant l'intervalle  $[0, h]$  à l'aide de 4 éléments finis linéaires de Lagrange d'égale longueur  $\frac{h}{4}$ . On donnera l'expression des valeurs nodales  $u_h(\frac{h}{4})$ ,  $u_h(\frac{h}{2})$ ,  $u_h(\frac{3h}{4})$  et  $u_h(h)$  du déplacement en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $q$ ,  $h$ ,  $\rho$  et  $g$ .
4. Comparer les valeurs approchées  $u_h(z)$ ,  $z \in [0, h]$ , du déplacement obtenues à la question 3 avec la solution analytique  $u(z)$  de la question 1. Conclusion ?
5. Qu'aurait-on obtenu en effectuant la résolution approchée de  $(P_v)$  à l'aide d'un unique élément fini quadratique de Lagrange ?

#### E6.2 Pale d'hélicoptère

Une pale d'hélicoptère, constituée d'un matériau homogène et pesant de masse volumique  $\rho$ , est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire  $\omega$  (voir le problème P5.5 ainsi que la figure 5.18 page 329). Cette pale est schématisée par une poutre droite de longueur  $l$  et de section rectangulaire ayant pour aire l'unité ( $S = 1$ ). Le comportement du matériau est par ailleurs élastique linéaire isotrope, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . Le déplacement longitudinal  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , est alors solution du problème aux limites à deux points

$$(P_i) \begin{cases} \text{Trouver } u : [0, l] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que} \\ Eu''(x) + \rho\omega^2 x = 0 \quad \forall x \in ]0, l[ \\ u(0) = 0 \quad u'(l) = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer, en fonction de  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $l$  et  $x$ , la solution analytique de  $(P_i)$ .
2. Donner la formulation faible  $(P_v)$  de  $(P_i)$ .

3. Résoudre  $(P_v)$  en discrétisant l'intervalle  $[0, l]$  à l'aide de 3 éléments finis linéaires de Lagrange d'égale longueur  $\frac{l}{3}$ . On donnera l'expression des valeurs nodales  $u_h(\frac{l}{3})$ ,  $u_h(\frac{2l}{3})$  et  $u_h(l)$  du déplacement en fonction de  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $E$  et  $l$ .
4. Comparer les valeurs approchées  $u_h(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , du déplacement obtenues à la question 3 avec la solution analytique  $u(x)$  de la question 1. Conclusion ?
5. Qu'aurait-on obtenu en effectuant la résolution approchée de  $(P_v)$  à l'aide d'un unique élément fini cubique de Lagrange ?

### E6.3 Poutre en flexion

Une poutre horizontale de longueur  $l$  et de section rectangulaire d'inertie  $I$ , reposant à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = l$  sur deux appuis simples, est soumise, dans la direction verticale et sur toute sa longueur, à la densité linéique de forces  $q$  indépendante de  $x$ . Le matériau constituant cette poutre est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope et non pesant, de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . Le déplacement vertical  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , de la fibre moyenne est alors solution du problème aux limites à deux points

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : [0, l] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que} \\ EIu''(x) + \frac{qx}{2}(l-x) = 0 \quad \forall x \in ]0, l[ \\ u(0) = 0 \quad u(l) = 0 \end{array} \right.$$

1. Donner, en fonction de  $E$ ,  $I$ ,  $l$ ,  $q$  et  $x$ , la solution analytique de  $(P_i)$ .
2. Écrire la formulation faible  $(P_v)$  de  $(P_i)$ .
3. Résoudre  $(P_v)$  en discrétisant l'intervalle  $[0, l]$  à l'aide de 4 éléments finis linéaires de Lagrange d'égale longueur  $\frac{l}{4}$ . On donnera l'expression des valeurs nodales  $u_h(\frac{l}{4})$ ,  $u_h(\frac{l}{2})$ , et  $u_h(\frac{3l}{4})$  du déplacement en fonction de  $E$ ,  $I$ ,  $l$  et  $q$ .
4. Comparer les valeurs approchées  $u_h(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , du déplacement obtenues à la question 3 avec la solution analytique  $u(x)$  de la question 1. Conclusion ?
5. Qu'aurait-on obtenu en effectuant la résolution approchée de  $(P_v)$  à l'aide d'un unique élément fini de Lagrange de degré 4 ?

### 6.3.2 Indications et éléments de réponse

#### E6.1 Essai de compression œdométrique

1. On trouve, après deux intégrations successives,  $u(z) = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[ \rho g \frac{z^2}{2} - (q + \rho gh)z \right]$ ,  $\forall z \in [0, h]$ .
2. On obtient le problème

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_0^h (\lambda + 2\mu)u'v' dz = - \int_0^h \rho gv dz - qv(h) \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

avec  $V = \left\{ v : [0, h] \mapsto \mathbb{R}, \int_0^h v^2 dz < +\infty, \int_0^h v'^2 dz < +\infty, v(0) = 0 \right\}$ ,

3. On évalue tout d'abord les matrices élémentaires

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^4 = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les seconds membres élémentaires

$$\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^2 = \mathbf{F}^3 = -\frac{\rho gh}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^4 = -\frac{\rho gh}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

dont l'assemblage donne

$$\mathbf{K} = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = -\frac{\rho gh}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$  fournit ensuite

$$\begin{cases} u_h(\frac{h}{4}) = -\frac{7}{32} \frac{\rho gh^2}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{4} \frac{qh}{\lambda+2\mu} \\ u_h(\frac{h}{2}) = -\frac{3}{8} \frac{\rho gh^2}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{2} \frac{qh}{\lambda+2\mu} \\ u_h(\frac{3h}{4}) = -\frac{15}{32} \frac{\rho gh^2}{\lambda+2\mu} - \frac{3}{4} \frac{qh}{\lambda+2\mu} \\ u_h(h) = -\frac{1}{2} \frac{\rho gh^2}{\lambda+2\mu} - \frac{qh}{\lambda+2\mu} \end{cases}$$

- Les valeurs approchées  $u_h(z)$  et les valeurs exactes  $u(z)$ ,  $z \in [0, h]$ , coïncident aux nœuds du maillage (i.e. aux points  $z = 0$ ,  $z = \frac{h}{4}$ ,  $z = \frac{h}{2}$ ,  $z = \frac{3h}{4}$  et  $z = h$ ). Il n'en est bien entendu pas de même aux autres points du segment  $[0, h]$  puisque  $u_h$  est une fonction linéaire par morceaux de la variable  $z$  alors que  $u$  est une fonction quadratique de cette même variable.
- La solution exacte  $u$  appartenant à l'espace d'approximation  $V_h$  engendré par un unique élément quadratique de Lagrange, on aurait obtenu  $u_h(z) = u(z)$ ,  $\forall z \in [0, h]$ .

## E6.2 Pale d'hélicoptère

- Après deux intégrations successives l'on obtient  $u(x) = \frac{\rho\omega^2}{6E} (3l^2x - x^3)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ .
- Soit  $V = \left\{ v : [0, l] \mapsto \mathbb{R}, \int_0^l v^2 dx < +\infty, \int_0^l v'^2 dx < +\infty, v(0) = 0 \right\}$ , On a alors le problème

$$(P_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_0^l E u' v' dx = \int_0^l \rho \omega^2 x v dx \quad \forall v \in V \end{cases}$$



3. L'assemblage des matrices élémentaires

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \frac{3E}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et des seconds membres élémentaires

$$\mathbf{F}^1 = \frac{\rho\omega^2 l^2}{54} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^2 = \frac{\rho\omega^2 l^2}{54} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^3 = \frac{\rho\omega^2 l^2}{54} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

fournit tout d'abord

$$\mathbf{K} = \frac{3E}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \frac{\rho\omega^2 l^2}{54} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$  donne ensuite

$$\begin{cases} u_h(\frac{l}{3}) = \frac{13}{81} \frac{\rho\omega^2 l^3}{E} \\ u_h(\frac{2l}{3}) = \frac{23}{81} \frac{\rho\omega^2 l^3}{E} \\ u_h(l) = \frac{1}{3} \frac{\rho\omega^2 l^3}{E} \end{cases}$$

- Les valeurs approchées  $u_h(x)$  et les valeurs exactes  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , coïncident aux nœuds du maillage (i.e. aux points  $x = 0$ ,  $x = \frac{l}{3}$ ,  $x = \frac{2l}{3}$  et  $x = l$ ). Il n'en est par contre pas de même aux autres points du segment  $[0, l]$ . En effet,  $u_h$  est une fonction linéaire par morceaux de la variable  $x$  tandis que  $u$  est une fonction cubique de cette même variable.
- On aurait obtenu  $u_h(x) = u(x)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ , puisque la solution exacte  $u$  appartient à l'espace d'approximation  $V_h$  engendré par un unique élément cubique de Lagrange.

### E6.3 Poutre en flexion

- On trouve, après deux intégrations successives,  $u(x) = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} (1 - \frac{x}{l})(1 + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2})$ ,  $\forall x \in [0, l]$ .
- On obtient le problème

$$(P_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_0^l EI u' v' dx = \int_0^l \frac{1}{2} qx(l-x)v dx \quad \forall v \in V \end{cases}$$

avec  $V = \left\{ v : [0, l] \mapsto \mathbb{R}, \int_0^l v^2 dx < +\infty, \int_0^l v'^2 dx < +\infty, v(0) = v(l) = 0 \right\}$ ,

- On évalue tout d'abord les matrices élémentaires

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^4 = \frac{4EI}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les seconds membres élémentaires

$$\mathbf{F}^1 = \frac{ql^3}{1536} \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^2 = \frac{ql^3}{1536} \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^3 = \frac{ql^3}{1536} \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^4 = \frac{ql^3}{1536} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

dont l'assemblage donne

$$\mathbf{K} = \frac{4EI}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \frac{ql^3}{1536} \begin{pmatrix} 34 \\ 46 \\ 34 \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$  fournit ensuite

$$\begin{cases} u_h(\frac{l}{4}) = \frac{57}{6144} \frac{ql^4}{EI} \\ u_h(\frac{l}{2}) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \\ u_h(\frac{3l}{4}) = \frac{57}{6144} \frac{ql^4}{EI} \end{cases}$$

4. Les valeurs approchées  $u_h(x)$  et les valeurs exactes  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , coïncident aux nœuds du maillage (i.e. aux points  $x = 0$ ,  $x = \frac{l}{4}$ ,  $x = \frac{l}{2}$ ,  $x = \frac{3l}{4}$  et  $x = l$ ). Il n'en est bien entendu pas de même aux autres points du segment  $[0, l]$  puisque  $u_h$  est une fonction linéaire par morceaux de la variable  $x$  alors que  $u$  est une fonction polynomiale de degré 4 de cette même variable.
5. La solution exacte  $u$  appartenant à l'espace d'approximation  $V_h$  engendré par un unique élément de Lagrange de degré 4, on aurait obtenu  $u_h(x) = u(x)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ .

# Annexe A

## Éléments de calcul tensoriel en bases orthonormées


Dans tout ce qui suit, on considère l'espace Euclidien  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , muni d'une base orthonormée fixe  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ . Dans la pratique  $E$ , représentera l'espace physique et l'on aura  $n = 3$ , et même  $n = 2$  dans le cas de problèmes plans. Enfin, dans un souci tant de simplicité de l'écriture que de respect des conventions typographiques de la mathématique (l'analyse et le calcul tensoriels sont des branches de cette discipline), les vecteurs de  $E$  seront représentés ici par des lettres italiques non surmontées de flèches.


### A.1 Convention d'indice muet

Soit  $x$  un vecteur de  $E$ , de composantes  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a alors

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$$

et l'on notera  $x = x_i e_i$ . C'est la

**Définition 21 (Convention d'indice muet ou convention d'Einstein)**  *def21t.*

*html*  *def21p.html* La répétition d'un même indice dans une expression arithmétique vaut convention de sommation sur cet indice.

**Remarque** On écrira indifféremment  $x = x_i e_i$  ou  $x = x_j e_j$  : la lettre associée à l'indice répété peut être ici quelconque, c'est ce que signifie le terme "indice muet".

**Exemple** Soient  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $E$ , de composantes respectives  $x_i$  et  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Le produit scalaire de  $x$  et  $y$ , représenté par  $\langle x, y \rangle$ , ou plus simplement


par  $x.y$ , et défini par


$$x.y = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$$

s'écrira, en utilisant la convention d'indice muet,  $x.y = x_i y_i$  (ou encore  $x.y = x_k y_k$ ).

## A.2 Tenseurs euclidiens en bases orthonormées

On a la

**Définition 22 (Tenseur d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{R}^n$  orthonormé)**  [def22t.html](#) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle tenseur d'ordre  $p$  sur  $E = \mathbb{R}^n$  orthonormé,  $n \in \mathbb{N}^*$ , toute forme  $p$ -linéaire sur l'espace produit  $E \times \dots \times E$  ( $p$  fois).

 [tabA1.html](#) Soit alors  $\mathbf{t}$  un tenseur d'ordre  $p$  sur  $E$ , et  $x, y, \dots, u$  et  $v$   $p$  vecteurs de  $E$ , de composantes respectives  $x_i, y_i, \dots, u_i$  et  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a alors

$$\mathbf{t}(x, y, \dots, u, v) = \mathbf{t} \left( \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i, \dots, \sum_{i=1}^{i=n} u_i e_i, \sum_{i=1}^{i=n} v_i e_i \right)$$

ou encore, en utilisant la convention d'indice muet,

$$\mathbf{t}(x, y, \dots, u, v) = \mathbf{t}(x_i e_i, y_j e_j, \dots, u_k e_k, v_l e_l)$$


On voit que l'on a dû prêter attention aux lettres désignant les différents indices : il convient en effet, afin d'éviter toute confusion, d'introduire une lettre nouvelle pour chaque nouvelle sommation.

Exploitions à présent la  $p$ -linéarité du tenseur  $\mathbf{t}$ . Il vient

$$\mathbf{t}(x, y, \dots, u, v) = x_i y_j \dots u_k v_l \mathbf{t}(e_i, e_j, \dots, e_k, e_l)$$

On voit alors que le tenseur  $\mathbf{t}$  est complètement caractérisé par l'ensemble des  $n^p$  scalaires  $\mathbf{t}(e_i, e_j, \dots, e_k, e_l)$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , qui sont les composantes de ce tenseur relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a, en posant  $t_{ij\dots kl} = \mathbf{t}(e_i, e_j, \dots, e_k, e_l)$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ ,

$$\mathbf{t}(x, y, \dots, u, v) = t_{ij\dots kl} x_i y_j \dots u_k v_l$$

 **tabA2.html** Si  $p = 1$ , le tenseur  $\mathbf{t}$  de composantes  $t_i = \mathbf{t}(e_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  s'identifie au vecteur  $t$  de  $E$  ayant les mêmes composantes relativement à cette base :  $t = t_i e_i$ . On a ainsi,  $\forall y = y_i e_i \in E$ ,  $\mathbf{t}(y) = t_i y_i = \langle t, y \rangle$ . Cette relation permet alors d'identifier tout vecteur  $x = x_i e_i \in E$  à un tenseur  $\mathbf{x}$  d'ordre 1 de composantes  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Les vecteurs  $e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , de la base  $\mathcal{B}$  s'identifient en particulier à des tenseurs du premier ordre  $\mathbf{e}_i$  de composantes  $\delta_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à cette base ( $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon). On a,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{e}_i(y) = \langle e_i, y \rangle = y_i$ ,  $\forall y \in E$ , et  $\mathbf{e}_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ . Ces  $n$  tenseurs d'ordre 1 constituent une base de l'espace vectoriel des tenseurs du premier ordre sur  $E$ , tout tenseur  $\mathbf{t}$  de cet espace (de dimension finie  $n$ ) de composantes  $t_i = \mathbf{t}(e_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  s'écrivant alors  $\mathbf{t} = t_i \mathbf{e}_i$ .

De façon plus générale, les  $n^p$  tenseurs


$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$$

définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l (x, y, \dots, u, v) &= \mathbf{e}_i(x) \mathbf{e}_j(y) \cdots \mathbf{e}_k(u) \mathbf{e}_l(v) \\ &= x_i y_j \cdots u_k v_l \end{aligned}$$

$\forall (x, y, \dots, u, v) \in E^p$ , constituent une base de l'espace vectoriel (de dimension finie  $n^p$ ) des tenseurs d'ordre  $p$  sur  $E$ . Tout tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre  $p$  de composantes  $t_{ij\dots kl}$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  s'écrit alors

$$\mathbf{t} = t_{ij\dots kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

 **tabA3.html** Examinons à présent comment se transforment les composantes d'un tenseur d'ordre  $p$  dans un changement de base orthonormée de l'espace Euclidien  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$  et  $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_n\}$  deux bases orthonormées de  $E$ , et soit  $\hat{\mathbf{p}}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\hat{\mathcal{B}}$  définie par  $\hat{e}_i = \hat{p}_{ji} e_j$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . (le premier indice des composantes de  $\hat{\mathbf{p}}$  est l'indice de ligne, le second est l'indice de colonne). Soit à présent  $\mathbf{t}$  un tenseur d'ordre  $p$  sur  $E$  de composantes  $t_{ij\dots kl}$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  et  $\hat{t}_{ij\dots kl}$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , relativement à la base  $\hat{\mathcal{B}}$ . On a alors, par définition des composantes d'un tenseur et  $\forall (i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ ,

$$\begin{aligned} \hat{t}_{ij\dots kl} &= \mathbf{t}(\hat{e}_i, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_k, \hat{e}_l) \\ &= \mathbf{t}(\hat{p}_{i'1} e_{i'}, \hat{p}_{j'2} e_{j'}, \dots, \hat{p}_{k'k} e_{k'}, \hat{p}_{l'l} e_{l'}) \\ &= \hat{p}_{i'1} \hat{p}_{j'2} \cdots \hat{p}_{k'k} \hat{p}_{l'l} \mathbf{t}(e_{i'}, e_{j'}, \dots, e_{k'}, e_{l'}) \\ &= \hat{p}_{i'1} \hat{p}_{j'2} \cdots \hat{p}_{k'k} \hat{p}_{l'l} t_{i'j' \dots k'l'} \end{aligned}$$

Nous concluons cette section en examinant les cas particuliers où  $p = 1$  et  $p = 2$ .

Si  $p = 1$ , le tenseur  $\mathbf{t}$  s'identifie à un vecteur de composantes  $t_i = \mathbf{t}(e_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  et de composantes  $\hat{t}_i = \mathbf{t}(\hat{e}_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\hat{\mathcal{B}}$ . On a alors,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\hat{t}_i = \hat{p}_{ji}t_j$ . On retrouve ainsi, en posant  $[\mathbf{t}] = {}^t(t_1, \dots, t_n)$ ,  $[\hat{\mathbf{t}}] = {}^t(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n)$  et  $[\hat{\mathbf{p}}] = [\hat{p}_{ij}]$ , la relation matricielle classique

$$[\hat{\mathbf{t}}] = {}^t[\hat{\mathbf{p}}][\mathbf{t}]$$

Si  $p = 2$ , le tenseur  $\mathbf{t}$  est une forme bilinéaire de composantes  $t_{ij} = \mathbf{t}(e_i, e_j)$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$  et de composantes  $\hat{t}_{ij} = \mathbf{t}(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , relativement à la base  $\hat{\mathcal{B}}$ . On a alors,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $\hat{t}_{ij} = \hat{p}_{ki}\hat{p}_{lj}t_{kl}$ . En posant  $[\mathbf{t}] = [t_{ij}]$ ,  $[\hat{\mathbf{t}}] = [\hat{t}_{ij}]$  (les premiers indices sont les indices de ligne et les seconds les indices de colonne) ainsi que  $[\hat{\mathbf{p}}] = [\hat{p}_{ij}]$ , nous obtenons la relation matricielle connue

$$[\hat{\mathbf{t}}] = {}^t[\hat{\mathbf{p}}][\mathbf{t}][\hat{\mathbf{p}}]$$

Un tenseur  $\mathbf{t}$  du second ordre est dit symétrique lorsque  $t_{ij} = t_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , et antisymétrique si  $t_{ij} = -t_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ . Dans ce dernier cas, on a alors  $t_{ii} = 0$  (sans sommation sur  $i$ ),  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Enfin, tout tenseur  $\mathbf{t}$  du second ordre admet une unique décomposition en parties symétrique  $\mathbf{t}^s$  et antisymétrique  $\mathbf{t}^a$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^s + \mathbf{t}^a$$

avec


$$\mathbf{t}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{t} + {}^t\mathbf{t}) \iff t_{ij}^s = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

ainsi que

$$\mathbf{t}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{t} - {}^t\mathbf{t}) \iff t_{ij}^a = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

### A.3 Tenseurs isotropes

On donne la

**Définition 23 (Tenseur isotrope)**  [def23t.html](#) *Un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre  $p$  sur  $E = \mathbb{R}^n$  orthonormé,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est isotrope lorsque ses composantes sont invariantes dans tout changement de repère orthonormé.*

Un tenseur isotrope est nécessairement d'ordre pair. Les composantes d'un tenseur isotrope du second ordre sur  $E = \mathbb{R}^n$  relativement à une base orthonormée sont de la forme  $t_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a alors


$$\mathbf{t} = \alpha\delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \alpha\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

et l'espace de ces tenseurs est de dimension 1. Les composantes d'un tenseur isotrope d'ordre 4 sur  $E = \mathbb{R}^n$  relativement à une base orthonormée sont quant à elles de la forme  $t_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$ ,  $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$ , avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\ &= \alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j + \beta \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \gamma \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

et l'espace de tels tenseurs est de dimension 3.

## A.4 Tenseurs gradient et divergence

 [tabA4.html](#) Soit  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ , soit  $\Omega \subset E$  un ouvert de  $E$ , et soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\Omega$ . Si  $f$  est différentiable au point  $x = x_i e_i \in \Omega$  et si  $i \in \{1, \dots, n\}$  est un indice quelconque mais fixé, on désigne par  $\partial_i f(x)$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$  au point  $x$

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Dans ce cas, le gradient de  $f$  au point  $x$  est le tenseur du premier ordre  $\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x f$  de composantes  $g_i = \partial_i f(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a donc

$$\mathbf{grad}_x f = \partial_i f(x) \mathbf{e}_i$$

Ce tenseur s'identifie au vecteur  $g$  de  $E$  ayant les mêmes composantes  $g_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à cette base. On a alors

$$df(x) = \mathbf{g}(dx) = \langle g, dx \rangle = \partial_i f(x) dx_i$$

Soit à présent  $\mathbf{t}$  une fonction tensorielle d'ordre  $p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , définie sur  $\Omega$ . On a donc  $\mathbf{t} = t_{ij\dots kl}(x) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ , où les composantes  $t_{ij\dots kl}$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , de  $\mathbf{t}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  sont des fonctions des variables  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $\mathbf{t}$  est différentiable au point  $x$  et si  $m \in \{1, \dots, n\}$  est un indice quelconque mais fixé, on désigne par  $\partial_m \mathbf{t}(x)$  la dérivée partielle de  $\mathbf{t}$  par rapport à la variable  $x_m$  au point  $x$ . Cette dérivée est le tenseur d'ordre  $p$  dont les composantes relativement à la base  $\mathcal{B}$  sont

$$\partial_m t_{ij\dots kl}(x) = \frac{\partial t_{ij\dots kl}}{\partial x_m}(x) \quad (i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$$

Le gradient de  $\mathbf{t}$  au point  $x$  est alors le tenseur d'ordre  $p + 1$   $\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x \mathbf{t}$  de composantes  $g_{ij\dots klm} = \partial_m t_{ij\dots kl}(x)$ ,  $(i, j, \dots, k, l, m) \in \{1, \dots, n\}^{p+1}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a donc

$$\mathbf{grad}_x \mathbf{t} = \partial_m t_{ij\dots kl}(x) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m$$

ainsi que

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}(x) &= g_{ij\dots klm} dx_m \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\ &= \partial_m t_{ij\dots kl}(x) dx_m \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

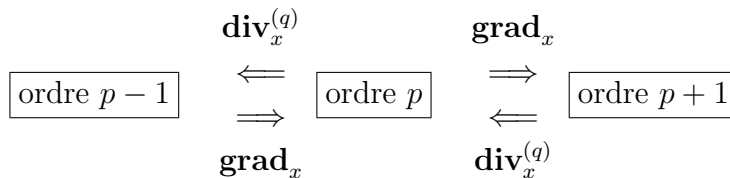
On considère à présent un champ tensoriel du premier ordre  $\mathbf{u}$  défini sur  $\Omega$  de composantes  $u_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ , fonctions des variables  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  (on a vu que ce champ tensoriel s'identifie à un champ vectoriel ayant les mêmes composantes relativement à cette base). Si  $\mathbf{u}$  est différentiable au point  $x$ , sa divergence en ce point est alors le scalaire  $d = \operatorname{div}_x \mathbf{u} = \partial_i u_i(x)$ .

De façon plus générale, soit  $\mathbf{t} = t_{ij\dots kl}(x) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  une fonction tensorielle d'ordre  $p$  définie sur  $\Omega$  de composantes  $t_{ij\dots kl}$ ,  $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ , relativement à la base  $\mathcal{B}$ , fonctions des variables  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $\mathbf{t}$  est différentiable au point  $x$ , on peut alors définir  $n$  tenseurs d'ordre  $p - 1$  appelés divergences de  $\mathbf{t}$  au point  $x$  et notés  $\mathbf{d}^{(q)}$  ou  $\mathbf{div}_x^{(q)} \mathbf{t}$ ,  $q \in \{1, \dots, n\}$ . Les composantes de  $\mathbf{d}^{(q)}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  sont données par  $d_{ij\dots rt\dots kl}^{(q)} = \partial_s t_{ij\dots rst\dots kl}(x)$ ,  $(i, j, \dots, r, t, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^{p-1}$ ,  $q$  désignant ici le rang de l'indice  $s$  sur lequel porte la sommation. On a donc


$$\mathbf{div}_x^{(q)} \mathbf{t} = \partial_s t_{ij\dots rst\dots kl}(x) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_t \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

Si par exemple  $p = 2$ , on obtiendra, selon les valeurs de  $q \in \{1, 2\}$ , deux tenseurs du premier ordre s'identifiant aux vecteurs de composantes (relativement à la base  $\mathcal{B}$ )  $\partial_i t_{ij}(x)$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , d'une part, et  $\partial_j t_{ij}(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , d'autre part.

Le schéma suivant illustre le principe de mise en œuvre des opérateurs gradient et divergence.



## A.5 Cas de l'espace $\mathbb{R}^3$ orthonormé

 [tabA5.html](#) On se restreint ici au cas de l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}^3$  muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ , et l'on introduit le tenseur d'orientation  $\epsilon$ . Les composantes de ce



tenseur d'ordre 3, invariants dans tout changement de repère orthonormé **direct**, sont données par

$$\forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (3, 2, 1) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Le tenseur d'orientation  $\epsilon$  permet d'exprimer simplement les composantes du produit vectoriel  $z = x \wedge y$ ,  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad z_i = (x \wedge y)_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

ainsi que le produit mixte  $(x|y|z) = x \cdot (y \wedge z)$ ,  $(x, y, z) \in E^3$ ,

$$(x|y|z) = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

Enfin, si  $\mathbf{u}$  est un champ vectoriel défini sur un ouvert  $\Omega$  de  $E = \mathbb{R}^3$  et différentiable au point  $x \in \Omega$ , et si  $\mathbf{w}$  désigne le rotationnel de  $\mathbf{u}$  au point  $x$ , il vient

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad w_i = (\mathbf{rot}_x \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k(x)$$



# Annexe B

## Formulaire

Dans toute cette annexe, nous désignerons par  $\mathcal{S}^\circ = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma)$  le système constitué par les trois vecteurs de base d'un repère orthonormé direct, quelconque mais donné dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^3$  lié à l'observateur  $\mathcal{O}$ . Fixe dans  $\mathcal{R}$  si l'on se rapporte à un système de coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2$  et  $x_3$  pour lesquelles nous aurons alors  $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$ , ce repère sera local lorsque nous nous référerons à un jeu de coordonnées curvilignes, et l'on aura par exemple  $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{r, \theta, z\}$  en cas d'utilisation des coordonnées cylindriques  $r, \theta$  et  $z$  (figure B.2 page 406), ou encore  $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{r, \theta, \varphi\}$  pour les coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\varphi$  (figure B.3 page 408).

Soit par ailleurs  $\Omega$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$ , et soient  $a$  et  $b$  deux constantes réelles données. Nous désignerons alors par  $p : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  (resp<sup>t</sup>  $q : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ) un champ scalaire, par  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{w} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ ) un champ vectoriel et par  $\mathbf{t} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^9$  (resp<sup>t</sup>  $\mathbf{s} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^9$ ) un champ tensoriel du second ordre, ces différents champs quelconques mais fixés étant toutefois suffisamment réguliers pour que les opérations de dérivation par rapport aux variables d'espace que nous serons amenés à effectuer aient un sens.

### B.1 Tenseurs de Kronecker $\delta$ et d'orientation $\epsilon$

#### B.1.1 Caractérisation

Rappelons tout d'abord ici l'expression des composantes de ces tenseurs relativement au système de vecteurs orthonormés direct  $\mathcal{S}^\circ = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma)$

$$\forall (i, j) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \quad \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\forall (i, j, k) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^3 \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (\alpha, \beta, \gamma) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (\gamma, \beta, \alpha) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

## B.1.2 Propriétés

On a

$$\left\{ \begin{array}{lll} \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta} & \iff & \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \quad \forall (i, k) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \\ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\epsilon} & \iff & \epsilon_{ijk} \delta_{kl} = \epsilon_{ijl} \quad \forall (i, j, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^3 \\ \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} & \iff & \delta_{ij} \epsilon_{jkl} = \epsilon_{ikl} \quad \forall (i, k, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^3 \\ \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} & \iff & \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0 \quad \forall i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} & \iff & \delta_{ij} \epsilon_{ijk} = 0 \quad \forall k \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} = 2\boldsymbol{\delta} & \iff & \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} = 2\delta_{il} \quad \forall (i, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \end{array} \right.$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} & \forall (k, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikl} = -2\delta_{jl} & \forall (j, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{jil} = -2\delta_{kl} & \forall (k, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{kil} = 2\delta_{jl} & \forall (j, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{kjl} = -2\delta_{il} & \forall (i, l) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} & \forall (i, j, l, m) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^4 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} = \delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km} & \forall (i, k, l, m) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^4 \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} & \forall (j, k, l, m) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^4 \end{array} \right.$$

## B.2 Opérateurs différentiels

### B.2.1 Caractérisation

– Gradient  $\mathbf{grad}_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x p \iff dp = \mathbf{g} \cdot \overrightarrow{dx}$$

– Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \iff d\mathbf{v} = \mathbf{g} \cdot \overrightarrow{dx}$$

– Partie symétrique  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_x \mathbf{v} + {}^t \mathbf{grad}_x \mathbf{v})$$

– Partie antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_x \mathbf{v} - {}^t \mathbf{grad}_x \mathbf{v})$$

– Divergence  $\text{div}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\text{div}_x \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{grad}_x \mathbf{v})$$

- Laplacien  $\Delta_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\Delta_x p = \operatorname{div}_x(\mathbf{grad}_x p)$$

- Rotationnel  $\mathbf{rot}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = -\epsilon : \omega(\mathbf{v})$$

- Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x \mathbf{t} \iff d\mathbf{t} = \mathbf{g} \cdot \overrightarrow{dx}$$

- Divergences  $\mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t}$  et  $\mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

Soit, relativement au système de vecteurs orthonormés direct  $\mathcal{S}^\circ = (\overrightarrow{e_\alpha}, \overrightarrow{e_\beta}, \overrightarrow{e_\gamma})$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{grad}_x \mathbf{t} = g_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  le tenseur du troisième ordre gradient de  $\mathbf{t}$ . On a alors

$$\begin{cases} \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t} = g_{ijj} \overrightarrow{e_i} \\ \mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} = g_{iji} \overrightarrow{e_j} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t} = g_{ijk} \delta_{jk} \overrightarrow{e_i} \\ \mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} = g_{ijk} \delta_{ik} \overrightarrow{e_j} \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t} = \mathbf{grad}_x \mathbf{t} : \delta \\ \mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} = (\mathbf{grad}_x \mathbf{t}) : \delta \end{cases}$$

et l'on a donc également

$$\mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} = \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t}$$

de sorte qu'il vient, si  $\mathbf{t}$  est un tenseur du second ordre symétrique,

$$\mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} = \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t} = \mathbf{grad}_x \mathbf{t} : \delta \quad \forall \mathbf{t} : \Omega \mapsto \mathbb{R}_{\text{sym}}^9$$

- Laplacien  $\Delta_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\Delta_x \mathbf{v} = \mathbf{div}_x^{(2)}(\mathbf{grad}_x \mathbf{v})$$

## B.2.2 Propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_x(ap + bq) = a \mathbf{grad}_x p + b \mathbf{grad}_x q \\ \mathbf{grad}_x(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + b \mathbf{grad}_x \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + b \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \\ \boldsymbol{\omega}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) + b \boldsymbol{\omega}(\mathbf{w}) \\ \operatorname{div}_x(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \operatorname{div}_x \mathbf{v} + b \operatorname{div}_x \mathbf{w} \\ \Delta_x(ap + bq) = a \Delta_x p + b \Delta_x q \\ \mathbf{rot}_x(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \mathbf{rot}_x \mathbf{v} + b \mathbf{rot}_x \mathbf{w} \\ \mathbf{grad}_x(a\mathbf{t} + b\mathbf{s}) = a \mathbf{grad}_x \mathbf{t} + b \mathbf{grad}_x \mathbf{s} \\ \operatorname{div}_x^{(q)}(a\mathbf{t} + b\mathbf{s}) = a \operatorname{div}_x^{(q)} \mathbf{t} + b \operatorname{div}_x^{(q)} \mathbf{s} \quad \forall q \in \{1, 2\} \\ \Delta_x(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a \Delta_x \mathbf{v} + b \Delta_x \mathbf{w} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x \mathbf{rot}_x \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{rot}_x \mathbf{grad}_x p = \mathbf{0} \\ \Delta_x \mathbf{v} = \mathbf{grad}_x \operatorname{div}_x \mathbf{v} - \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x \mathbf{v} \\ \Delta_x \mathbf{grad}_x p = \mathbf{grad}_x \Delta_x p \\ \Delta_x \operatorname{div}_x \mathbf{v} = \operatorname{div}_x \Delta_x \mathbf{v} \\ \Delta_x \mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{rot}_x \Delta_x \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_x(pq) = p \mathbf{grad}_x q + q \mathbf{grad}_x p \\ \Delta_x(pq) = p \Delta_x q + q \Delta_x p + 2 \mathbf{grad}_x p \cdot \mathbf{grad}_x q \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_x(p\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{grad}_x p + p \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \\ \operatorname{div}_x(p\mathbf{v}) = p \operatorname{div}_x \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_x p \\ \mathbf{rot}_x(p\mathbf{v}) = p \mathbf{rot}_x \mathbf{v} + \mathbf{grad}_x p \wedge \mathbf{v} \\ \Delta_x(p\mathbf{v}) = p \Delta_x \mathbf{v} + \Delta_x p \mathbf{v} + 2 \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_x p \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{w} \\ \Delta_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \Delta_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \Delta_x \mathbf{w} + 2 \mathbf{grad}_x \mathbf{v} : \mathbf{grad}_x \mathbf{w} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot}_x \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}_x \mathbf{w} \\ \mathbf{rot}_x(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \operatorname{div}_x \mathbf{w} - \mathbf{w} \operatorname{div}_x \mathbf{v} + \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{grad}_x \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x^{(2)}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \operatorname{div}_x \mathbf{w} \\ \operatorname{div}_x^{(1)}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{grad}_x \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \operatorname{div}_x \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_x(\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{t} \\ \mathbf{grad}_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_x \mathbf{t} \\ \operatorname{div}_x(\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{t} : \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + \operatorname{div}_x^{(1)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \\ \operatorname{div}_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{t} : \mathbf{grad}_x \mathbf{v} + \operatorname{div}_x^{(2)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x^{(2)}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{t} \cdot \operatorname{div}_x^{(2)} \mathbf{s} + \operatorname{grad}_x \mathbf{t} : \mathbf{s} \\ \operatorname{div}_x^{(1)}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) = \operatorname{div}_x^{(1)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{s} + (\operatorname{grad}_x \mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) : \mathbf{t} \\ \operatorname{grad}_x(\mathbf{t} : \mathbf{s}) = \mathbf{t} : \operatorname{grad}_x \mathbf{s} + \mathbf{s} : \operatorname{grad}_x \mathbf{t} \end{cases}$$

## B.3 Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

### B.3.1 Coordonnées cartésiennes

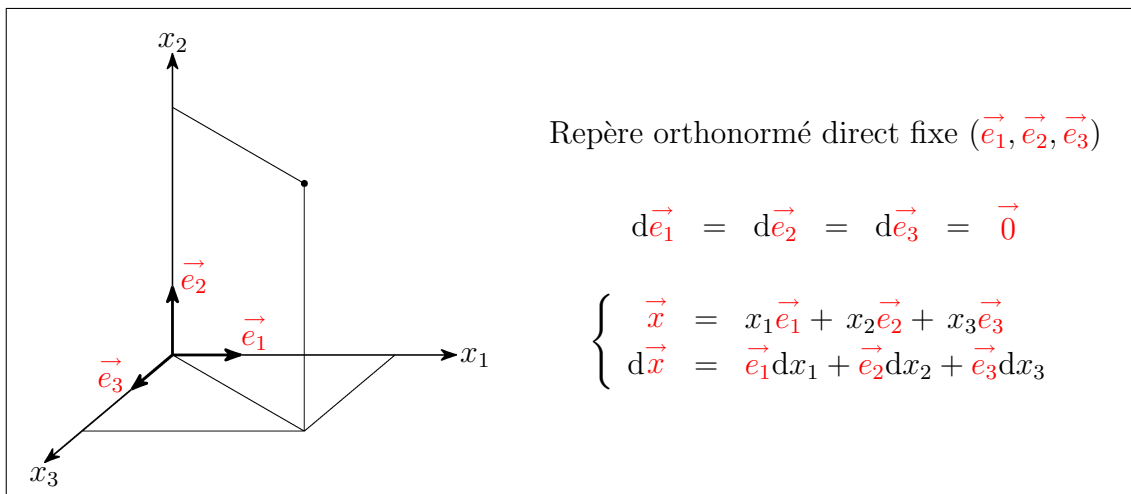


FIG. B.1 – Coordonnées cartésiennes

Vecteur  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Tenseur du second ordre  $\mathbf{t}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= t_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + t_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &+ t_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + t_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &+ t_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + t_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + t_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

– Gradient  $\operatorname{grad}_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\operatorname{grad}_x p = \partial_1 p \vec{e}_1 + \partial_2 p \vec{e}_2 + \partial_3 p \vec{e}_3$$

- Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\mathbf{grad}_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{bmatrix}$$

- Partie symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \partial_1 v_1 & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \\ \varepsilon_{22} = \partial_2 v_2 & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) \\ \varepsilon_{33} = \partial_3 v_3 & \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\partial_3 v_2 + \partial_2 v_3) \end{cases}$$

- Partie antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2) \\ \omega_{13} = \frac{1}{2}(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \\ \omega_{23} = \frac{1}{2}(\partial_3 v_2 - \partial_2 v_3) \end{cases}$$

- Divergence  $\operatorname{div}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$$

- Laplacien  $\Delta_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\Delta_x p = \partial_{11}^2 p + \partial_{22}^2 p + \partial_{33}^2 p$$

- Rotationnel  $\mathbf{rot}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{v} = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \vec{e}_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \vec{e}_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \vec{e}_3$$

- Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre



comp <sup>tes</sup> sur		comp <sup>tes</sup> sur		comp <sup>tes</sup> sur	
$\partial_1 t_{11}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{11}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{11}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{12}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{12}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{12}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{13}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{13}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{13}$	$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{21}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{21}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{21}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{22}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{22}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{22}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{23}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{23}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{23}$	$\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{31}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{31}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{31}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{32}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{32}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{32}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3$
$\partial_1 t_{33}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$	$\partial_2 t_{33}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$	$\partial_3 t_{33}$	$\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$

– Divergences  $\mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t}$  et  $\mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

$$\left[ \mathbf{div}_x^{(1)} \mathbf{t} \right] = \begin{bmatrix} \partial_1 t_{11} + \partial_2 t_{21} + \partial_3 t_{31} \\ \partial_1 t_{12} + \partial_2 t_{22} + \partial_3 t_{32} \\ \partial_1 t_{13} + \partial_2 t_{23} + \partial_3 t_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \mathbf{div}_x^{(2)} \mathbf{t} \right] = \begin{bmatrix} \partial_1 t_{11} + \partial_2 t_{12} + \partial_3 t_{13} \\ \partial_1 t_{21} + \partial_2 t_{22} + \partial_3 t_{23} \\ \partial_1 t_{31} + \partial_2 t_{32} + \partial_3 t_{33} \end{bmatrix}$$

– Laplacien  $\Delta_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\left[ \Delta_x \mathbf{v} \right] = \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 v_1 + \partial_{22}^2 v_1 + \partial_{33}^2 v_1 \\ \partial_{11}^2 v_2 + \partial_{22}^2 v_2 + \partial_{33}^2 v_2 \\ \partial_{11}^2 v_3 + \partial_{22}^2 v_3 + \partial_{33}^2 v_3 \end{bmatrix}$$

– Équations indéfinies eulériennes du mouvement

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} + \rho b_1 = \rho \gamma_1 \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} + \rho b_2 = \rho \gamma_2 \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} + \rho b_3 = \rho \gamma_3 \end{cases}$$

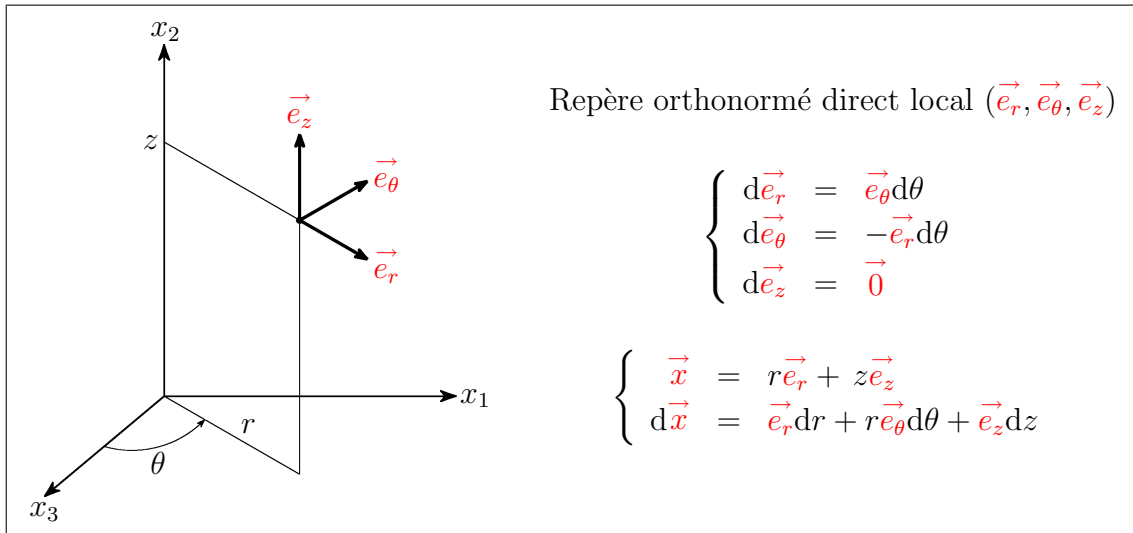


FIG. B.2 – Coordonnées cylindriques

### B.3.2 Coordonnées cylindriques

Vecteur  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$$

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$

Tenseur du second ordre  $\mathbf{t}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & t_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + t_{r\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{rz} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z \\ & + t_{\theta r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + t_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{\theta z} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \\ & + t_{zr} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + t_{z\theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} t_{rr} & t_{r\theta} & t_{rz} \\ t_{\theta r} & t_{\theta\theta} & t_{\theta z} \\ t_{zr} & t_{z\theta} & t_{zz} \end{bmatrix}$$

– Gradient  $\mathbf{grad}_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\mathbf{grad}_x p = \partial_r p \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta p \vec{e}_\theta + \partial_z p \vec{e}_z$$

– Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\mathbf{grad}_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} \partial_\theta v_r - \frac{1}{r} v_\theta & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{1}{r} v_r & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}$$

– Partie symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \partial_r v_r & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\partial_\theta v_r + \partial_r v_\theta - \frac{1}{r}v_\theta) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\partial_\theta v_\theta + \frac{1}{r}v_r & \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(\partial_z v_r + \partial_r v_z) \\ \varepsilon_{zz} = \partial_z v_z & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(\partial_z v_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta v_z) \end{cases}$$

– Partie antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{r\theta} & \omega_{rz} \\ -\omega_{r\theta} & 0 & \omega_{\theta z} \\ -\omega_{rz} & -\omega_{\theta z} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{r\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\partial_\theta v_r - \partial_r v_\theta - \frac{1}{r}v_\theta) \\ \omega_{rz} = \frac{1}{2}(\partial_z v_r - \partial_r v_z) \\ \omega_{\theta z} = \frac{1}{2}(\partial_z v_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta v_z) \end{cases}$$

– Divergence  $\operatorname{div}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r}\partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z + \frac{1}{r}v_r$$

– Laplacien  $\Delta_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\Delta_x p = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r p) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 p + \partial_{zz}^2 p$$

– Rotationnel  $\operatorname{rot}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\operatorname{rot}_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta \\ \partial_z v_r - \partial_r v_z \\ \partial_r v_\theta + \frac{1}{r}v_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta v_r \end{bmatrix}$$

– Gradient  $\operatorname{grad}_x \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

comp <sup>tes</sup> sur		composantes sur		comp <sup>tes</sup> sur	
$\partial_r t_{rr}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{rr} - t_{r\theta} - t_{\theta r})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{rr}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{r\theta}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{r\theta} + t_{rr} - t_{\theta\theta})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{r\theta}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{rz}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{rz} - t_{\theta z})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{rz}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{\theta r}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{\theta r} + t_{rr} - t_{\theta\theta})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{\theta r}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{\theta\theta}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{\theta\theta} + t_{r\theta} + t_{\theta r})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{\theta\theta}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{\theta z}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{\theta z} + t_{rz})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{\theta z}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{zr}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{zr} - t_{z\theta})$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{zr}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{z\theta}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}(\partial_\theta t_{z\theta} + t_{zr})$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{z\theta}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z$
$\partial_r t_{zz}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r}\partial_\theta t_{zz}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta$	$\partial_z t_{zz}$	$\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$

- Divergences  $\mathbf{div}_x^{(1)}\mathbf{t}$  et  $\mathbf{div}_x^{(2)}\mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

$$\left[ \mathbf{div}_x^{(1)}\mathbf{t} \right] = \begin{bmatrix} \partial_r t_{rr} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{\theta r} + \partial_z t_{zr} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) \\ \partial_r t_{r\theta} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{\theta\theta} + \partial_z t_{z\theta} + \frac{1}{r}(t_{r\theta} + t_{\theta r}) \\ \partial_r t_{rz} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{\theta z} + \partial_z t_{zz} + \frac{1}{r}t_{rz} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \mathbf{div}_x^{(2)}\mathbf{t} \right] = \begin{bmatrix} \partial_r t_{rr} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{r\theta} + \partial_z t_{rz} + \frac{1}{r}(t_{rr} - t_{\theta\theta}) \\ \partial_r t_{\theta r} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{\theta\theta} + \partial_z t_{\theta z} + \frac{1}{r}(t_{r\theta} + t_{\theta r}) \\ \partial_r t_{zr} + \frac{1}{r}\partial_\theta t_{z\theta} + \partial_z t_{zz} + \frac{1}{r}t_{zr} \end{bmatrix}$$

- Laplacien  $\Delta_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\left[ \Delta_x \mathbf{v} \right] = \begin{bmatrix} \Delta v_r - \frac{1}{r^2}(v_r + 2\partial_\theta v_\theta) \\ \Delta v_\theta - \frac{1}{r^2}(v_\theta - 2\partial_\theta v_r) \\ \Delta v_z \end{bmatrix}$$

- Équations indéfinies eulériennes du mouvement

$$\begin{cases} \partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r}\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho b_r = \rho \gamma_r \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho b_\theta = \rho \gamma_\theta \\ \partial_r \sigma_{rz} + \frac{1}{r}\partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \rho b_z = \rho \gamma_z \end{cases}$$

### B.3.3 Coordonnées sphériques

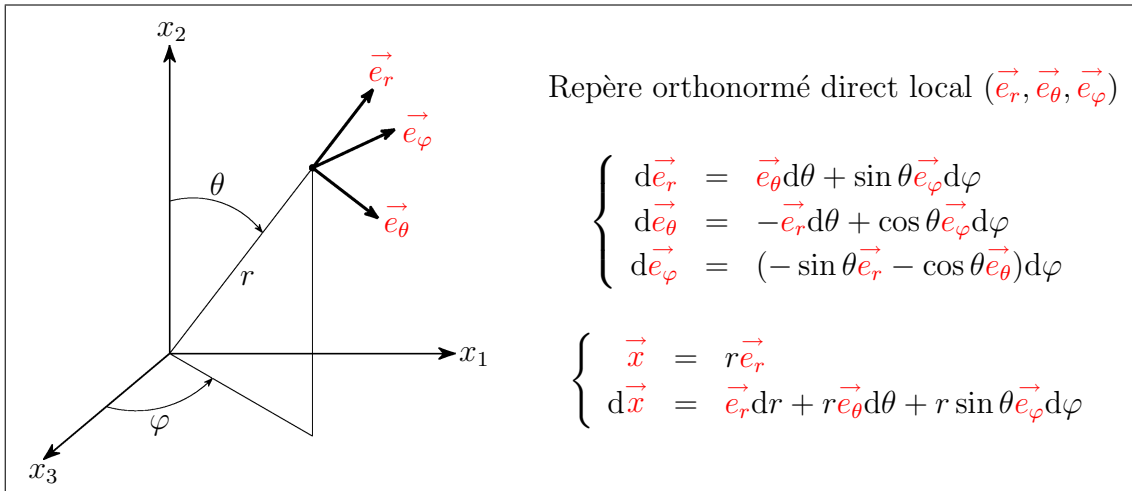


FIG. B.3 – Coordonnées sphériques

Vecteur  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{bmatrix}$$

Tenseur du second ordre  $\mathbf{t}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & t_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + t_{r\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{r\varphi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi \\ & + t_{\theta r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + t_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{\theta\varphi} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi \\ & + t_{\varphi r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r + t_{\varphi\theta} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta + t_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} t_{rr} & t_{r\theta} & t_{r\varphi} \\ t_{\theta r} & t_{\theta\theta} & t_{\theta\varphi} \\ t_{\varphi r} & t_{\varphi\theta} & t_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

– Gradient  $\mathbf{grad}_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\mathbf{grad}_x p = \partial_r p \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta p \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi p \vec{e}_\varphi$$

– Gradient  $\mathbf{grad}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\mathbf{grad}_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} \partial_\theta v_r - \frac{1}{r} v_\theta & \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_r - \frac{1}{r} v_\varphi \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{1}{r} v_r & \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\theta - \frac{\cot \theta}{r} v_\varphi \\ \partial_r v_\varphi & \frac{1}{r} \partial_\theta v_\varphi & \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r} (v_r + \cot \theta v_\theta) \end{bmatrix}$$

– Partie symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\varphi} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{\theta\varphi} & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \partial_r v_r & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \partial_\theta v_r + \partial_r v_\theta - \frac{1}{r} v_\theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{1}{r} v_r & \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_r + \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r} v_\varphi \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r} (v_r + \cot \theta v_\theta) & \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\theta + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\varphi - \cot \theta v_\varphi) \right) \end{cases}$$

– Partie antisymétrique  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$  du gradient d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{r\theta} & \omega_{r\varphi} \\ -\omega_{r\theta} & 0 & \omega_{\theta\varphi} \\ -\omega_{r\varphi} & -\omega_{\theta\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \partial_\theta v_r - \partial_r v_\theta - \frac{1}{r} v_\theta \right) \\ \omega_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_r - \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r} v_\varphi \right) \\ \omega_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\theta - \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\varphi + \cot \theta v_\varphi) \right) \end{cases}$$

– Divergence  $\operatorname{div}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r} (2v_r + \cot \theta v_\theta)$$

– Laplacien  $\Delta_x p$  d'un champ scalaire  $p$

$$\Delta_x p = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r p) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \left( \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta p \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi p \right)$$

– Rotationnel  $\operatorname{rot}_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\operatorname{rot}_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} [\partial_\theta (\sin \theta v_\varphi) - \partial_\varphi v_\theta] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi v_r - \partial_r (r v_\varphi) \right] \\ \frac{1}{r} [\partial_r (r v_\theta) - \partial_\theta v_r] \end{bmatrix}$$

– Gradient  $\operatorname{grad}_x \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

comp <sup>tes</sup>	sur	composantes	sur
$\partial_r t_{rr}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{rr} - t_{r\theta} - t_{\theta r})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{r\theta}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{r\theta} + t_{rr} - t_{\theta\theta})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{r\varphi}$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{r\varphi} - t_{\theta\varphi})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\theta r}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{\theta r} + t_{rr} - t_{\theta\theta})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\theta\theta}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{\theta\theta} + t_{r\theta} + t_{\theta r})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\theta\varphi}$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{\theta\varphi} + t_{r\varphi})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\varphi r}$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{\varphi r} - t_{\varphi\theta})$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\varphi\theta}$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} (\partial_\theta t_{\varphi\theta} + t_{\varphi r})$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$
$\partial_r t_{\varphi\varphi}$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r$	$\frac{1}{r} \partial_\theta t_{\varphi\varphi}$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta$

composantes	sur
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{rr} - \frac{1}{r} (t_{r\varphi} + t_{\varphi r})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{r\theta} - \frac{1}{r} (\cot \theta t_{r\varphi} + t_{\varphi\theta})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{r\varphi} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\varphi\varphi} + \cot \theta t_{r\theta})$	$\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\theta r} - \frac{1}{r} (t_{\theta\varphi} + \cot \theta t_{\varphi r})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\theta\theta} - \frac{\cot \theta}{r} (t_{\theta\varphi} + t_{\varphi\theta})$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\theta\varphi} + \frac{1}{r} (t_{\theta r} + \cot \theta (t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi}))$	$\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi r} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\varphi\varphi} + \cot \theta t_{\theta r})$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi\theta} + \frac{1}{r} (t_{r\theta} + \cot \theta (t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi}))$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi$
$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} (t_{r\varphi} + t_{\varphi r} + \cot \theta (t_{\theta\varphi} + t_{\varphi\theta}))$	$\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$

– Divergences  $\operatorname{div}_x^{(1)} \mathbf{t}$  et  $\operatorname{div}_x^{(2)} \mathbf{t}$  d'un champ tensoriel  $\mathbf{t}$  du second ordre

$$[\operatorname{div}_x^{(1)} \mathbf{t}] = \begin{bmatrix} \partial_r t_{rr} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{\theta r} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi r} + \frac{1}{r} (2t_{rr} - t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi} + \cot \theta t_{\theta r}) \\ \partial_r t_{r\theta} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi\theta} + \frac{1}{r} (t_{\theta r} + 2t_{r\theta} + \cot \theta (t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi})) \\ \partial_r t_{r\varphi} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{\theta\varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} (t_{\varphi r} + 2t_{r\varphi} + \cot \theta (t_{\varphi\theta} + t_{\theta\varphi})) \end{bmatrix}$$

$$\left[ \operatorname{div}_x^{(2)} \mathbf{t} \right] = \begin{bmatrix} \partial_r t_{rr} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{r\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{r\varphi} + \frac{1}{r} (2t_{rr} - t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi} + \cot \theta t_{r\theta}) \\ \partial_r t_{\theta r} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\theta\varphi} + \frac{1}{r} (t_{r\theta} + 2t_{\theta r} + \cot \theta (t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi})) \\ \partial_r t_{\varphi r} + \frac{1}{r} \partial_\theta t_{\varphi\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi t_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} (t_{r\varphi} + 2t_{\varphi r} + \cot \theta (t_{\theta\varphi} + t_{\varphi\theta})) \end{bmatrix}$$

– Laplacien  $\Delta_x \mathbf{v}$  d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$

$$[\Delta_x \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \Delta v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_r + \partial_\theta (\sin \theta v_\theta) + \partial_\varphi v_\varphi) \\ \Delta v_\theta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} (\frac{1}{2} v_\theta - \sin^2 \theta \partial_\theta v_r + \cos \theta \partial_\varphi v_\varphi) \\ \Delta v_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} (\frac{1}{2} v_\varphi - \sin \theta \partial_\varphi v_r - \cos \theta \partial_\varphi v_\theta) \end{bmatrix}$$

– Équations indéfinies eulériennes du mouvement

$$\begin{cases} \partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \cot \theta \sigma_{r\theta}) + \rho b_r = \rho \gamma_r \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \sigma_{\theta\varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + \cot \theta (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) + \rho b_\theta = \rho \gamma_\theta \\ \partial_r \sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{\theta\varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2 \cot \theta \sigma_{\theta\varphi}) + \rho b_\varphi = \rho \gamma_\varphi \end{cases}$$

## B.4 Unités

### B.4.1 Unités de base et unités supplémentaires

Grandeur physique	Unité		
	nom	symbole	dimension
Unités de base			
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Durée	seconde	s	T
Intensité	ampère	A	I
Température	kelvin	K	$\theta$
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J
Unités supplémentaires			
Angle plan	radian	rad	
Angle solide	stéradian	sr	

### B.4.2 Unités espace-temps

Grandeur physique	Unité		
	nom	symbole	dimension
Unités espace-temps			
Aire	mètre carré	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>
Volume	mètre cube	m <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>
Vitesse	mètre par seconde	m.s <sup>-1</sup>	LT <sup>-1</sup>
Vitesse angulaire	radian par seconde	rad.s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
Accélération	mètre par seconde carrée	m.s <sup>-2</sup>	LT <sup>-2</sup>
Accélération angulaire	radian par seconde carrée	rad.s <sup>-2</sup>	T <sup>-2</sup>
Fréquence	hertz	Hz	T <sup>-1</sup>
Fréquence de rotation	seconde à la puissance -1	s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
Pulsation	radian par seconde	rad.s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
Longueur d'onde	mètre	m	L

### B.4.3 Unités de mécanique et unités dérivées

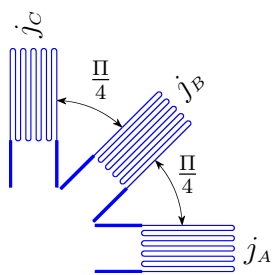
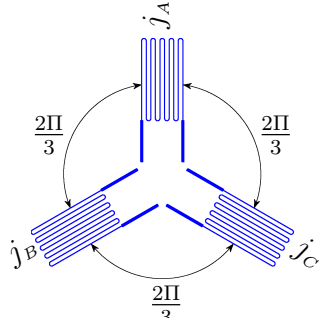
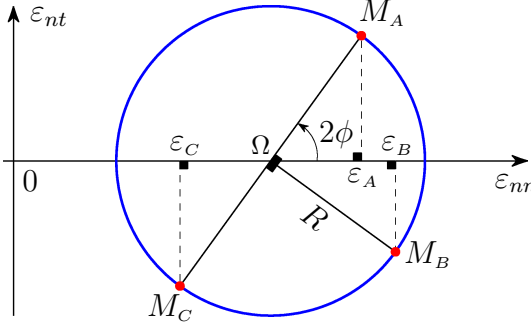
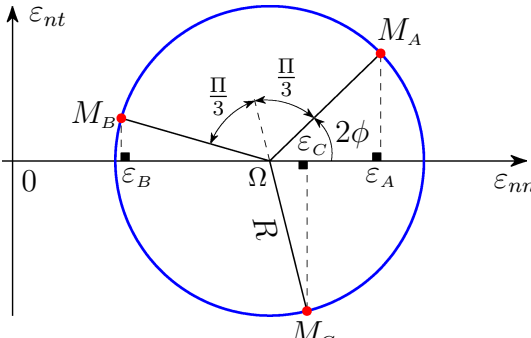
Grandeur physique	Unité		
	nom	symbole	dimension
Unités de mécanique			
Force	newton	N	LMT <sup>-2</sup>
Pression - Contrainte	pascal	Pa	L <sup>-1</sup> MT <sup>-2</sup>
Travail	joule	J	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>
Puissance	watt	W	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup>
Unités dérivées			
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg.m <sup>-3</sup>	L <sup>-3</sup> M
Masse linéique	kilogramme par mètre	kg.m <sup>-1</sup>	L <sup>-1</sup> M
Quantité de mouvement	kilogramme mètre par seconde	kg.m.s <sup>-1</sup>	LMT <sup>-1</sup>
Moment d'inertie dynamique	kilogramme mètre carré	kg.m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup> M
Moment d'une force	newton - mètre	N.m	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>
Moment quadratique	mètre bicarré	m <sup>4</sup>	L <sup>4</sup>
Viscosité dynamique	pascal seconde	Pa.s	L <sup>-1</sup> MT <sup>-1</sup>
Viscosité cinématique	mètre carré par seconde	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
Tension superficielle	newton par mètre	N.m <sup>-1</sup>	MT <sup>-2</sup>
Débit en volume	mètre cube par seconde	m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup>	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>



### B.4.4 Symboles des préfixes décimaux

MULTIPLES				SOUS-MULTIPLES			
Facteur	Préfixe	Symbole	Nombre	Facteur	Préfixe	Symbole	Nombre
$10^1$	déca	da	Dix	$10^{-1}$	déci	d	Dixième
$10^2$	hecto	h	Cent	$10^{-2}$	centi	c	Centième
$10^3$	kilo	k	Mille	$10^{-3}$	milli	m	Millième
$10^6$	méga	M	Million	$10^{-6}$	micro	$\mu$	Millionième
$10^9$	giga	G	Milliard	$10^{-9}$	nano	n	Milliardième
$10^{12}$	téra	T	Billion	$10^{-12}$	pico	p	Billionième
$10^{15}$	péta	P	Billiard	$10^{-15}$	femto	f	Billiardième
$10^{18}$	exa	E	Trillion	$10^{-18}$	atto	a	Trillionième
$10^{21}$	zetta	Z	Trilliard	$10^{-21}$	zepto	z	Trilliardième
$10^{24}$	yotta	Y	Quadrillion	$10^{-24}$	yocto	y	Quadrillionième

## B.5 Extensométrie par rosettes de trois jauges

Rosette de trois jauges à 45 degrés	Rosette de trois jauges à 120 degrés
	
<p>On désigne par <math>\phi</math> l'angle orienté de la direction des brins de fils de la jauge <math>j_A</math> vers la direction principale majeure <math>\vec{i}_1</math> de déformation, par <math>\Omega</math> l'abscisse du centre du cercle de Mohr et par <math>R</math> son rayon, comme illustré ci-dessous.</p>	
	
<p>Soient <math>\varepsilon_A</math>, <math>\varepsilon_B</math> et <math>\varepsilon_C</math> les dilatations respectivement mesurées par les jauges <math>j_A</math>, <math>j_B</math> et <math>j_C</math>. On a alors :</p>	
$\Omega = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2}$ $R = \sqrt{\frac{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_B)^2}{2}}$ $\cos 2\phi = \frac{\varepsilon_A - \Omega}{R} \text{ et } \sin 2\phi = \frac{\varepsilon_B - \Omega}{R}$	$\Omega = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3}$ $R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}{3}}$ $\cos 2\phi = \frac{\varepsilon_A - \Omega}{R} \text{ et } \sin 2\phi = \frac{\varepsilon_C - \varepsilon_B}{\sqrt{3}R}$
<p>Les déformations principales majeure <math>\varepsilon_1</math> et mineure <math>\varepsilon_2</math> sont ensuite données par</p> $\varepsilon_1 = \Omega + R \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \Omega - R$	

# Annexe C

## Ouvrages de référence

### C.1 Ouvrages de Mécanique des Milieux Continus et d'Élasticité

1. Bacon C. et Pouyet J. *Mécanique des solides déformables*. Hermès. 2000.
2. Bamberger Y. *Mécanique de l'ingénieur, Tome 1 : Systèmes de corps rigides*. Hermann. 1981.
3. Bamberger Y. *Mécanique de l'ingénieur, Tome 2 : Milieux déformables*. Hermann. 1981.
4. Boudet R. et Chauvin A. *Mécanique des milieux continus*. Hermès. 1996.
5. Desjardins D. et Touzet-Cortina M. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Dunod. 1999.
6. Duc J. et Bellet D. *Mécanique des solides réels - Élasticité*. Cepadues. 1976.
7. Dugdale D.S. et Ruiz C. *Élasticité à l'usage des ingénieurs et des physiciens*. Ediscience. 1972.
8. Fung J.C. *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall. 1965.
9. Germain P. *Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1 : Théorie générale*. Masson. 1973.
10. Germain P. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson. 1997.
11. Halphen B. et Huet C. *Cours de matériaux de construction - déformabilité*. Presses de l'ENPC. 1979.
12. Halphen B. et Salençon J. *Cours de calcul des structures anélastiques*. Presses de l'ENPC. 1980.
13. Hug M. *Mécanique des fluides appliquée*. Eyrolles. 1975.
14. Landau L.D. et Lifshitz. *Théorie de l'élasticité, Tome 7*. Éditions de Moscou. 1967.
15. Leboiteux H. *La mécanique des solides réels*. Beranger. 1960.

16. Love A. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover. 1944.
17. Lure A.J. *Three dimensional problems of the theory of elasticity*. Interscience. 1964.
18. Mandel J. *Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1 : Généralités - Mécanique des fluides*. Gauthier-Villars. 1966.
19. Mandel J. *Cours de mécanique des milieux continus, Tome 2 : Mécanique des solides*. Gauthier-Villars. 1966.
20. Mandel J. *Propriété mécaniques des matériaux*. Eyrolles. 1978.
21. Milne-Thomson L.M. *Systèmes élastiques plans*. Dunod. 1968.
22. Muskhelishvili N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Nordhoff Ltd. 1963.
23. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Pergamon Press. 1961.
24. Salençon J. *Mécanique des milieux continus, Tome 1*. Ellipses. 1988.
25. Salençon J. *Mécanique des milieux continus, Tome 2*. Ellipses. 1988.
26. Sechler E.E. *Elasticity in engineering*. Dover Publ. 1952.
27. Sedov L. *Mécanique des milieux continus*. Éditions de Moscou. 1975.
28. Sokolnikoff I.S. *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill. 1956.
29. Solomon L. *Élasticité linéaire*. Masson. 1968.
30. Timoshenko S. et Goodier J. *Théorie de l'élasticité*. Beranger. 1961.
31. Truesdell C. *Continuum mechanics - The mechanical foundations of elasticity and fluids dynamics, Volume 1*. Gordon and Breach, Science Publishers Inc. 1966.

## C.2 Ouvrages de Mathématiques : Calcul Tensoriel et Calcul Variationnel

1. Brillouin L. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Masson. 1960.
2. Lichnerowicz A. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin. 1967.
3. Lichnerowicz A. *Algèbre et analyse linéaire*. Masson. 1960.
4. Rektorys K. *Variational methods in mathematical science and engineering*. Reidel Pub. 1980.

## C.3 Ouvrages sur la Méthode des Éléments Finis

1. Dhatt G. et Touzot G. *Une présentation de la méthode des éléments finis, 2<sup>ème</sup> édition*. Maloine. 1984.
2. Zienkiewicz O.C. *The finite element method, Volume 1 : Basic formulation and linear problems, 4<sup>th</sup> edition*. McGraw-Hill. 1989.

## C.4 Ouvrages sur les Méthodes Expérimentales en Élasticité

1. Avril J. *Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes*. Vishay-Micromesures. 1974.
2. Durelli A.J. *Applied stress analysis*. Prentice Hall. 1967.
3. Pirard A. *La photoélasticité*. Dunod. 1967.



# Index

## A

Accélération(s)  
  en variables d'Euler, 46  
  en variables de Lagrange, 45  
  potentiel des, 60  
  puissance des quantités d', 56, 290  
  torseur des quantités d', 56, 170

Actions mécaniques  
  extérieures, 157  
    à distance, 157  
    de contact, 157  
    torseur des, 170, 285  
  intérieures, 158

Admissible  
  champ de contrainte statiquement, 291, 302  
  champ des déplacements cinématiquement, 305

Ajutage de Borda, 318

Almansi-Euler  
  tenseur de déformation d', 81

Analyseur, 250

Angle  
  de frottement interne, 237  
  de Lode, 187

Antithixotropie, 218

Arbelon, 197

Archimède  
  théorème d', 316

Assemblage, 367, 382

Auget Pelton, 319

## B

Bernoulli  
  théorème de, 297

Bingham  
  fluide de, 270

Biréfringence, 246, 248

Boîte de Casagrande, 205

Borda  
  ajutage de, 318

Boussinesq  
  tenseur de contrainte de, 169

## C

Calcul tensoriel  
  éléments de, 391

Casagrande  
  boîte de, 205

Cauchy  
  champ des contraintes de, 281  
  tenseur de contrainte de, 166  
  tenseur de déformation de  
    à droite, 76  
    à gauche, 80  
  théorème de, 182

Cercle de Mohr  
  des contraintes planes, 193  
  des déformations planes, 120

Champ  
  de déplacement virtuel, 291, 302  
  de vitesse virtuel, 288  
  des accélérations, 45, 281  
  des contraintes de Cauchy, 281  
    statiquement admissible, 291, 302

- des densités massiques de forces, 281
- des densités surfaciques de forces, 282
- des déplacements, 39, 281
  - cinématiquement admissible, 305
- des masses volumiques, 281
- des petites déformations, 282
- des taux de déformation, 282
- des vitesses, 40, 281
- Cinétique
  - énergie, 56, 290
  - théorème de l'énergie, 290
  - torseur, 55, 173, 285
- Cisaillement, 160, 192
  - maximum, 199, 233
  - module de, 223, 225
- Coefficient
  - de dilatation thermique linéaire, 230
  - de Poisson, 220
- Cohésion, 237
- Comportement
  - élastique, 214
  - élastique linéaire, 215
  - élastique linéaire isotrope, 220
  - élastique non linéaire, 214
  - élastoplastique, 216
  - instantané, 214
  - réversible, 214
- Configuration
  - actuelle, 30
  - de référence, 29
  - initiale, 29
- Confinement, 237
- Conservation de la masse
  - équation eulérienne de, 54, 282
  - équation lagrangienne de, 56
  - hypothèse de, 54
- Continuité
  - de la transformation, 32
  - du corps matériel, 28
- Contrainte(s)
  - de cisaillement, 160, 192, 223, 225
  - directions principales de, 183
  - invariants scalaires des, 185
  - moyenne, 167, 185, 223, 225
  - normale, 156, 160
    - de compression, 160
    - de traction, 160
  - octaédrique, 204
  - partie déviatorique des, 184
  - partie isotrope des, 184
  - planes, 189
  - principales, 183
  - purement déviatorique, 184
  - purement isotrope, 184
  - repère principal de, 183
  - statiquement admissible, 291, 302
  - tangentielle(s), 156, 160, 192
    - octaédrique, 204
    - réciprocité des, 182
- Tenseur de contrainte
  - de Boussinesq, 169
  - de Cauchy, 166
  - de Piola-Kirchhoff, 170
  - isotrope, 295
  - vecteur, 154, 158, 159
  - visqueuses, 217, 243
- Convention
  - d'Einstein, 391
  - d'indice muet, 391
- Coordonnées
  - cartésiennes, 403
  - cylindriques, 406
  - sphériques, 408
- Cosserat
  - milieu de, 178
- Couette
  - rhéomètre de, 217, 262
- Coulomb



- module de cisaillement de, 223, 225
- Couplage
  - rhéoptique, 246
  - thermoélastique, 230
- Critère de limite élastique, 232
  - de Drücker-Prager, 242
  - de Mohr-Coulomb, 237
  - de Tresca, 233
    - en contraintes planes, 261
  - de Von-Mises, 236
    - en contraintes planes, 261
- D**
- Décomposition polaire, 83
- Déformation(s)
  - directions principales de, 85, 106
  - équations de compatibilité des, 123
  - irréversible, 215
  - jauges de, 131, 132, 220
  - non recouvrable, 215
  - partie déviatorique des, 117
  - partie isotrope des, 116
  - permanente, 215
  - planes, 117
  - plastique, 215
  - principales, 106
  - purement déviatorique, 117
  - purement isotrope, 117
  - recouvrable, 215
  - repère principal de, 106
  - résiduelle, 214
  - Tenseur de déformation
    - d'Almansi-Euler, 81
    - de Cauchy à droite, 76
    - de Cauchy à gauche, 80
    - de Green-Lagrange, 78
  - Tenseur des petites déformations, 104
- Degré de liberté, 361, 374
- Demi-distorsion, 91, 93, 111, 112
- Déplacement(s), 39
  - champ virtuel de, 291, 302
  - cinématiquement admissible, 305
  - décomposition du champ des, 107
  - gradient du champ des, 78, 82, 104
- Dérivée matérielle, 43
  - d'une grandeur physique scalaire, 44
  - d'une intégrale curviligne, 53
  - d'une intégrale de surface, 50
  - d'une intégrale de volume, 49
  - de l'inverse de la transformation linéaire
    - tangente, 48
  - de la transformation linéaire tangente, 47
  - des tenseurs de contrainte, 178
  - des tenseurs de déformation
    - eulériens, 100
    - lagrangiens, 99
    - mixtes, 101
  - du jacobien de la transformation, 48
  - du vecteur contrainte, 179
- Déviateur
  - des contraintes, 184, 223, 225
  - des déformations, 116, 223, 225
- Dilatation
  - linéique, 86, 87, 89, 108, 109
  - surfactive, 95–97, 115, 116
  - thermique, 230
  - volumique, 93, 94, 113, 223, 225
- Directions principales
  - de contrainte, 183
  - de déformation, 85, 106
- Distorsion, 91, 93, 111, 223, 225
  - pure, 263
- Domaine
  - élastique, 232
  - matériel, 36
  - matériel élémentaire, 36, 74
- Droite intrinsèque, 238
- Drücker-Prager

- critère de limite élastique de, 242
- Dynamique
- puissance, 290
  - relation fondamentale de la, 170
  - torseur, 56, 170
  - viscosité, 244
- E**
- Écoulement
- irrotationnel, 40
  - laminaire, 244
  - permanent, 42
  - plan, 61, 64
  - sphérique, 60
- Écrouissage, 216
- Effet photoélastique, 246
- Einstein
- convention d', 391
- Élasticité
- domaine d', 232
  - linéaire, 215
  - linéaire isotrope, 218
    - homogène, 300
  - non linéaire, 214
- Élément(s) fini(s)
- définition d'un, 361
  - espace d', 360
  - linéaire de Lagrange
    - bidimensionnel, 373
    - monodimensionnel, 362
  - méthode des, 351
  - nœuds d'un, 361, 374
- Ellipse de Lamé
- des contraintes planes, 191
  - des déformations planes, 122
- Énergie
- cinétique, 56, 290
    - théorème de l', 290
  - de déformation élastique, 304
  - locale de déformation élastique, 226, 303
  - potentielle, 306
    - théorème de l', 306
- Équation(s)
- de compatibilité des petites déformations, 123
  - de conservation de la masse
    - en variables d'Euler, 54, 282
    - en variables de Lagrange, 56
  - de Lamé-Navier, 301
  - de Maxwell-Neumann, 248
  - de Navier-Stokes, 299
  - indéfinies de l'équilibre, 173
  - indéfinies du mouvement
    - en variables d'Euler, 172, 282, 405, 408, 411
    - en variables de Lagrange, 174
- Équilibre
- équations indéfinies de l', 173
- Euler
- accélération en variables d', 46
  - équation de conservation de la masse en variables d', 54, 282
  - équations indéfinies du mouvement en variables d', 172, 282, 405, 408, 411
  - théorème d'
    - forme globale, 285
    - forme locale, 284
  - variables d', 30
  - vitesse en variables d', 40
- Extensométrie par jauges, 131, 132, 414
- F**
- Facette, 154, 159
- Fluide
- au repos, 153, 295
  - barotrope, 217
  - de Bingham, 270
  - parfait, 216, 296
  - visqueux, 217
  - visqueux newtonien, 217, 243

- homogène, 298
- homogène et incompressible, 300
- incompressible, 244
- visqueux non-newtonien, 334
- Fonction de courant, 63
- Formulation variationnelle, 355, 371
- Frange
  - isochrome, 251
  - isocline, 251
  - ordre de, 251
- G**
- Galerkin
  - méthode de, 351, 360
  - problème approché de, 358
- Gradient
  - de la transformation, 33
  - des déplacements, 78, 82, 104
  - des vitesses, 47, 97
- Green-Lagrange
  - tenseur de déformation de, 78
- H**
- Homogène
  - fluide visqueux newtonien, 298
  - incompressible, 300
  - matériau, 73
  - solide élastique linéaire isotrope, 300
  - transformation, 36
- Hooke
  - loi de, 218
- Hydrostatique, 295
  - pression, 295
- I**
- Incompressible
  - fluide visqueux newtonien, 244
  - homogène, 300
  - matériau élastique, 223, 229
  - milieu, 48, 114
- sol, 62
- Inverse
  - de la transformation, 32
  - de la transformation linéaire tangente, 34
- Irrotationnel
  - écoulement, 40
- Isochromes, 251
- Isoclines, 251
- Isotrope
  - comportement élastique linéaire, 220
  - contrainte purement, 184
  - déformation purement, 117
  - élasticité linéaire, 218
    - homogène, 300
  - matériau, 73
  - tenseur, 394
    - d'ordre 2, 394
    - d'ordre 4, 224, 244, 395
  - tenseur de contrainte, 295
  - thermoélasticité linéaire, 230
- J**
- Jacobien
  - de la transformation, 36
  - signe du, 38
- Jauges
  - de déformation, 131, 132, 220
  - extensométrie par, 131, 132, 414
  - rosettes de trois, 132, 414
- K**
- Kelvin
  - théorème de Lord, 60
- Kronecker
  - tenseur de, 399
- L**
- Lagrange
  - accélération en variables de, 45

- élément fini linéaire de
  - bidimensionnel, 373
  - monodimensionnel, 362
- équation de conservation de la masse en variables de, 56
- équations indéfinies du mouvement en variables de, 174
- théorème de, 60
- variables de, 29
- vitesse en variables de, 39
- Lamé
  - ellipse de
    - des contraintes planes, 191
    - des déformations planes, 122
  - ellipsoïde de, 195
  - modules de, 224
- Lamé-Navier
  - équations de, 301
- Lames quart-d'onde, 252
- Lignes d'émission, 41
- Lignes de courant, 41
- Limite élastique, 215
  - critère de, 232
    - de Drücker-Prager, 242
    - de Mohr-Coulomb, 237
    - de Tresca, 233
    - de Von-Mises, 236
- Lode
  - angle de, 187
- Loi de Hooke, 218
- M**
- Maillage, 362
- Masse
  - conservation de la, 54
  - volumique, 28
- Matériau (voir "Milieu...")
  - composite, 267
- Matrice de connectivité, 362, 376, 377
- Maxwell-Neumann
  - équations de, 248
- Méthode
  - de Galerkin, 351, 360
  - des éléments finis, 351
- Microdéformation, 88
- Milieu
  - cohérent, 237
  - continu, 28
  - de Cosserat, 178
  - élastique incompressible, 223, 229
  - granulaire, 237
  - homogène, 73
  - incompressible, 48, 114
  - isotrope, 73
  - photoélastique, 247
  - pulvérulent, 237
  - purement cohérent, 237
  - thixotrope, 218
- Module
  - d'élasticité linéaire isotrope, 220
  - d'Young, 215, 220
  - de cisaillement de Coulomb, 223, 225
  - de compressibilité volumétrique, 223
- Modules de Lamé, 224
- Mohr
  - cercle de
    - des contraintes planes, 193
    - des déformations planes, 120
  - tricerclé de, 197
- Mohr-Coulomb
  - critère de limite élastique de, 237
- Mouvement
  - de corps rigide, 134
  - équations indéfinies du, 172, 174, 282, 405, 408, 411
  - irrotationnel, 40
  - permanent, 42
  - torseur des quantités de, 55, 173, 285

**N**

Navier-Stokes

équations de, 299

Normale

à une facette, 154, 159

à une surface élémentaire, 95

contrainte, 156, 160

sortante, 157, 162, 164

**O**

Oedomètre, 309

Opérateurs différentiels

caractérisation des, 400

propriétés des, 402

**P**

Particule, 27

Pelton

auget, 319

Petite rotation, 107

Photoélasticimétrie plane, 249

Photoélastique

constante, 248

effet, 246

matériau, 247

Piola-Kirchhoff

tenseur de contrainte de, 170

Pitot

tube de, 317

Plan déviatorique, 187

Point de vue

eulérien, 30, 43

lagrangien, 29, 43

Poiseuille

tube de, 320

Poisson

coefficient de, 220

Polariscope

circulaire, 252

plan, 250

Polariseur, 250

Potentiel(le)

des accélérations, 60

des vitesses, 63

énergie, 306

théorème de l'énergie, 306

Pressiomètre, 327

Pression

hydrostatique, 295

Problème

approché de Galerkin, 358

aux limites, 352

Puissance(s)

des quantités d'accélération, 56, 290

dynamique, 290

virtuelle(s), 288

théorème des, 289

**Q**

Quadriques directrices

des contraintes normales, 204

des dilatations, 130

**R**

Repère principal

de contrainte, 183

de déformation, 106

Rhéomètre

cône-plan, 335

de Couette, 217, 262

plan-plan, 320

**S**

Surface limite, 232

**T**

Tenseur

d'ordre  $p$ , 392

d'ordre 2, 394

antisymétrique, 394

symétrique, 394

- d'orientation, 396, 399
- de contrainte
  - de Boussinesq, 169
  - de Cauchy, 166
  - de Piola-Kirchhoff, 170
- de contrainte isotrope, 295
- de contrainte plane, 190
- de déformation
  - d'Almansi-Euler, 81
  - de Cauchy à droite, 76
  - de Cauchy à gauche, 80
  - de Green-Lagrange, 78
- de déformation plane, 118
- de Kronecker, 399
- des petites déformations, 104
- des petites rotations, 104
- des taux de déformation, 98
- des taux de rotation, 98
- divergence, 396
- gradient, 396
- gradient des déplacements, 78, 82, 104
- gradient des vitesses, 47, 97
- isotrope, 394
  - d'ordre 2, 394
  - d'ordre 4, 224, 244, 395
- Théorème
  - d'Archimède, 316
  - d'Euler
    - forme globale, 285
    - forme locale, 284
  - de Bernoulli, 297
  - de Cauchy, 182
  - de l'énergie cinétique, 290
  - de l'énergie potentielle, 306
  - de Lagrange, 60
  - de Lord Kelvin, 60
  - des puissances virtuelles, 289
  - des travaux virtuels, 292, 370
    - corrolaire au, 294, 295
- Thermoélasticité linéaire isotrope, 230
- Thixotropie, 218
- Torseur
  - cinétique, 55, 173, 285
  - des actions mécaniques extérieures, 170, 285
  - des quantités d'accélération, 56, 170
  - des quantités de mouvement, 55, 173, 285
  - dynamique, 56, 170
- Tourbillon des vitesses, 98
- Trajectoire, 41
- Transformation, 32
  - affine, 36
  - continuité de la, 32
  - gradient de la, 33
  - homogène, 36
  - infinitésimale, 102
  - inverse de la, 32
  - jacobien de la, 36
  - linéaire, 36, 73
  - linéaire tangente, 33
    - inverse de la, 34
  - plane, 129, 134, 135
  - relative à l'instant  $t$ , 31
  - signe du jacobien de la, 38
- Travail
  - des actions extérieures, 302
  - virtuel, 292
- Travaux virtuels
  - théorème des, 292, 370
- Tresca
  - critère de limite élastique de, 233
- Triangulation, 362, 374
- Tricercle de Mohr des contraintes, 197
- Trisectrice, 186
- Tube de Pitot, 317
- Tube de Poiseuille, 320

## U

Unités, 411

## V

Variables

d'Euler, 30

de Lagrange, 29

Variations

d'aire, 74, 94, 114

d'angle, 90

d'angle droit, 74, 90, 110

de longueur, 74, 86, 108

de produit scalaire, 78, 81

de volume, 38, 74, 93, 112

Vecteur contrainte, 154, 158, 159

Venturi, 317

Vernis craquelant, 260

Virtuel(s)(le)(les)

champ de déplacement, 291, 302

champ de vitesse, 288

puissance, 288

théorème des puissances, 289

théorème des travaux, 292, 370

travail, 292

Viscosimètre

cône-plan, 335

de Couette, 217, 262

plan-plan, 320

Viscosité

dynamique de cisaillement, 244

dynamique de volume, 244

Vitesse(s)

champ virtuel de, 288

en variables d'Euler, 40

en variables de Lagrange, 39

gradient du champ des, 47, 97

potentiel des, 63

Von-Mises

critère de limite élastique de, 236

## Y

Young

module d', 215, 220