C. R. Acad. Sci. Paris, t. ???, Série II *b*, p. 1–6, 2001 - PXPP????.TEX -
Comportement des matériaux, rhéologie/*Behaviour of materials, rheology*
(Milieux granulaires, sols, milieux poreux/*Granular media, soils, porous media*)

Analyse contrastive de modèles incrémentaux et hypoplastiques

Patrick Royis [a]

[a] **Département Génie Civil et Bâtiment — URA CNRS 1652,**
ENTPE, rue Maurice Audin, F-69518 Vaulx-en-Velin Cedex
Courriel : patrick.royis@entpe.fr – Tél : +33 4 72 04 70 68 – Fax : +33 4 72 04 71 56

(Reçu le 17 avril 2001, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous établissons tout d'abord, dans cet article, deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une loi incrémentale exprimant le tenseur des taux de déformation en fonction de la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy puisse s'inverser en adoptant le formalisme général des modèles hypoplastiques lorsque l'état de contrainte se situe à l'intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite. Nous nous intéressons ensuite à l'interprétation physique de ces conditions en termes de réponse incrémentale du matériau. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

lois incrémentales / hypoplasticité.

Contrastive analysis of incremental and hypoplastic constitutive laws

Abstract. *In this paper we first establish two necessary and sufficient conditions in order that incremental constitutive equations expressing the strain rate tensor as a function of the Jaumann's derivative of the Cauchy's stress tensor can be inverted under the general form of hypoplastic models when the stress state is located inside the domain bounded by the limit state surface. We are then interested in the physical meaning of these conditions with regard to the incremental response of the material. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

incremental constitutive laws / hypoplasticity.

Abridged English version

In this paper we consider two classes of constitutive relations describing the non-linear and irreversible behaviour of non-viscous granular materials such as sand.

The first class [1][2] is given by incremental laws (1) where $\mathbf{D}$ is the strain rate tensor, $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ the Jaumann's derivative of the Cauchy's stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and $\mathbf{F}$ a second order tensorial function depending on the set $\mathcal{H}$ of memory parameters. This function is positively homogeneous of degree one with respect to $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ and is assumed to be invertible for any stress state $\boldsymbol{\sigma}$ located inside the domain bounded by the limit state surface.

Note présentée par Jean SALENÇON

S1620-7742(01)0????-?/FLA

The second class [3][4][5][6] corresponds to hypoplastic models (2) where $\|\mathbf{D}\|$ is the euclidian norm of $\mathbf{D}$ defined by $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$, $\mathbf{L}$ a fourth order invertible tensor and $\mathbf{N}$ a second order symmetric tensor, both of them depending on memory parameters $\mathcal{H}$.

Since relation (2) is invertible [7] for any stress state $\boldsymbol{\sigma}$ located inside the domain bounded by the limit state surface given here by $\|\mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}\| = 1$, hypoplastic constitutive equations can always be written as (1). On the other hand, for the same states of stress and after inversion of $\mathbf{F}$, incremental relations (1) do not necessarily take the form (2). More precisely, incremental constitutive equations such as (1) can be inverted under the form (2) when the stress state $\boldsymbol{\sigma}$ is located inside the domain bounded by the limit state surface if and only if $\mathbf{F}$ satisfies the conditions 1 and 2 given by theorem 2.2.

PROOF (DIRECT THEOREM) – Let $\mathcal{T}_n^4$ (resp$^{\mathrm{t}}$ $\mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}}$) be the space of the fourth order tensors (resp$^{\mathrm{t}}$ of the second order symmetric tensors) on the euclidian space $\mathbb{R}^n$, let $\check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}}$ be a given strain rate and $\mathbf{D} = \mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})$. Let us first assume that $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}:\mathbf{D} + \|\mathbf{D}\|\mathbf{N}$ with $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_n^4$, $\mathbf{N} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}}$, $\mathbf{L}$ invertible and $\|\mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}\| < 1$. By putting $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}:\check{\boldsymbol{\sigma}}$ and $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}$ we have $\|\mathbf{B}\| < 1$ and $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{B}$, that is to say $\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{A} - \|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\mathbf{B}$. By substituting $-\check{\boldsymbol{\sigma}}$ for $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ we have then $\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}}) = -\mathbf{A} - \|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\mathbf{B}$, which gives (3). Therefore, the relation 1 of theorem 2.2 holds since $\mathbf{D} = \mathbf{0} \Rightarrow \check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$.

Otherwise, it follows from $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{B}$ that $\|\mathbf{D}\|$ is a zero of the polynomial of the second degree $P(x) = (1 - \|\mathbf{B}\|^2)x^2 + 2(\mathbf{A},\mathbf{B})x - \|\mathbf{A}\|^2$. Since $\|\mathbf{B}\| < 1$, this polynomial has a unique positive zero given by (4), which leads to the expression (5) of $\mathbf{D} = \mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})$. By substituting $-\check{\boldsymbol{\sigma}}$ for $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ we get (6) and then (7), that is to say $\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\right) = \mathbf{J}_0:\check{\boldsymbol{\sigma}}$ with $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{L}^{-1}$. At last, from $\frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\|\mathbf{B}\|^2 \neq -1$ and lemma 2.1 it follows that $\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$ is invertible. Thus, the fourth order tensor $\mathbf{J}_0$ is also invertible, which establishes the relation 2 of theorem 2.2. □

PROOF (INVERSE THEOREM) – Let us now assume that relations 1 and 2 of theorem 2.2 hold. Let then $\mathbf{L} = \mathbf{J}_0^{-1}:(\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})$. As previously, from $\frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\|\mathbf{B}\|^2 \neq -1$ and lemma 2.1 it follows that $\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$ is invertible. Thus, $\mathbf{L}$ is invertible et we have $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{L}^{-1}$, so that after putting $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}:\check{\boldsymbol{\sigma}}$ the relation 2 becomes as (8). Equation (9) is then obtained from the relation 1 of theorem 2.2, according to the positive homogeneity of $\mathbf{F}$.

So the sum of equations (8) and (9) gives (10) whereas their inner product leads to (11) and (12). By substituting in (10) the expression (12) for $\|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|$ we get then (13), that is to say $\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1}:\check{\boldsymbol{\sigma}} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{B}$. Hence, after putting $\mathbf{N} = \mathbf{L}:\mathbf{B}$ we obtain(14). □

We are now interested in the physical meaning of the conditions 1 and 2 of theorem 2.2 with regard to the incremental response of the material. For that let us consider the restriction of the incremental constitutive relations (1) to the set of generalized triaxial paths. On such paths, the principal axes of the tensors $\mathbf{D}$ and $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ remain fixed and identical with the orthotropy axes of the material, at each material point and at every time. These tensors are then represented by diagonal matrices in the orthotropy frame and the same property holds for the tensor $\mathbf{B}$ involved by the condition 1 of theorem 2.2, so that one can associate these matrices with the vectors $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\check{\boldsymbol{\sigma}}}$ and $\underline{\mathbf{B}}$ of $\mathbb{R}^3$ defined by (15). Thus, the fourth order tensor $\mathbf{J}_0$ involved by the condition 2 of the same theorem can be associated with a second order tensor represented by the matrice $\underline{\underline{\mathbf{J}_0}}$ in the orthotropy frame.

Otherwise, let $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+$ and $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^-$ be the tangent constitutive matrices (16) where the column i of $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+$ (resp$^{\mathrm{t}}$ of $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^-$), $i \in \{1,2,3\}$, constitutes the response $\underline{\mathbf{D}}$ to the solicitation $\underline{\check{\boldsymbol{\sigma}}}$ defined by $\check{\sigma}_j = +\delta_{ij}$ (resp$^{\mathrm{t}}$ $\check{\sigma}_j = -\delta_{ij}$), $\forall j \in \{1,2,3\}$. The strictly positive quantities $E_i^{\pm}$, $i \in \{1,2,3\}$, and $\nu_{ij}^{\pm}$, $(i, j \neq i) \in \{1,2,3\}^2$, defining the components of these matrices are called “tangent moduli” and “tangent Poisson’s ratios”, respectively.

Thus, the condition 2 of theorem 2.2 involves $\underline{\underline{\mathbf{J}_0}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+ - \underline{\underline{\mathbf{R}}}^-\right)$, whereas the condition 1 of the same theorem gives the relations (17) which must be necessarily satisfied by the tangent moduli and Poisson’s ratios in order that incremental constitutive relations (1) can be inverted under the form (2) when the stress state $\boldsymbol{\sigma}$ is located inside the domain bounded by the limit state surface.

1. Introduction

De nombreux modèles incrémentaux [1][2] ont été développés depuis plus d'une vingtaine d'années pour décrire le comportement non linéaire et irréversible, même sous faibles sollicitations, de milieux granulaires tels que les sables. Plus récemment, les modèles de type hypoplastique [3][4][5][6] se sont attachés à la modélisation du comportement mécanique de tels matériaux.

Les lois incrémentales considérées dans cet article, non visqueuses et excluant la description de comportements radoucissants, adoptent la forme générale

$$\mathbf{D} \;=\; \mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}, \mathcal{H}) \tag{1}$$

où $\mathbf{D}$ désigne le tenseur des taux de déformation, $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et où $\mathbf{F}$ est une fonction tensorielle du second ordre dépendant de l'ensemble $\mathcal{H}$ des paramètres d'histoire au point matériel et à l'instant considérés, incluant notamment l'état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. Les milieux granulaires dont l'équation (1) décrit le comportement étant non visqueux, $\mathbf{F}$ est positivement homogène de degré 1 en $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$. Le principe de déterminisme lui impose par ailleurs d'être inversible pour tout état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ situé à l'intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite.

Les modèles hypoplastiques ont quant à eux pour expression

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \mathbf{L}(\mathcal{H})\!:\!\mathbf{D} + \|\mathbf{D}\|\mathbf{N}(\mathcal{H}) \tag{2}$$

où $\mathbf{L}$ est un tenseur inversible d'ordre 4 dépendant de l'ensemble $\mathcal{H}$ des paramètres d'histoire au point matériel et à l'instant considérés, $\mathbf{N}$ un tenseur symétrique du second ordre dépendant du même ensemble de paramètres et où $\|\mathbf{D}\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{D}$ définie par $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$, le symbole ":" représentant quant à lui le produit doublement contracté de deux tenseurs.

La relation (2) étant inversible [7] pour tout état de contrainte situé à l'intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite dont l'équation s'écrit ici $\|\mathbf{L}^{-1}\!:\!\mathbf{N}\| = 1$ (en effet, l'inversibilité de $\mathbf{L}$ et la condition $\|\mathbf{L}^{-1}\!:\!\mathbf{N}\| < 1$ assurent l'existence et l'unicité de $\|\mathbf{D}\|$ et donc celle de $\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1}\!:\!(\breve{\boldsymbol{\sigma}} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{N})$), une loi hypoplastique peut toujours s'écrire, pour de tels états de contrainte, sous la forme (1). A contrario, un modèle incrémental tel que (1) n'adopte pas nécessairement, pour ces mêmes états de contrainte et après inversion de $\mathbf{F}$, la forme (2).

Nous nous proposons, dans la section suivante, d'exhiber deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un modèle incrémental de type (1) puisse s'inverser sous la forme (2) lorsque l'état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ se situe à l'intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite.

2. Un résultat d'équivalence

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $p \in \mathbb{N}^\star$. Dans tout ce qui suit $\mathcal{T}_n^p$ désigne l'espace des tenseurs d'ordre p sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ orthonormé tandis que les symboles "$\otimes$", "." et ":" représentent respectivement le produit tensoriel de deux tenseurs, leur produit simplement contracté et leur produit doublement contracté. En particulier, l'espace $\mathcal{T}_n^2$ sera muni du produit scalaire $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\!:\!\mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$, $\forall\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_n^2$, ainsi que de la norme associée.

Etablissons tout d'abord, pour les besoins des développements qui suivent, le

LEMME 2.1. – *Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ un tenseur du second ordre sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ orthonormé et $\mathbf{I}_4$ le tenseur unité d'ordre 4 sur $\mathbb{R}^n$. Le tenseur $\mathbf{A}$ de même ordre défini par $\mathbf{A} = \mathbf{I}_4 + \alpha\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}$ est inversible si et seulement si $\alpha\|\mathbf{T}\|^2 \neq -1$ et a alors pour inverse $\mathbf{I}_4 - \frac{\alpha}{1+\alpha\|\mathbf{T}\|^2}\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}$.*

PREUVE – Si $\alpha\|\mathbf{T}\|^2 = -1$ on a $(\mathbf{I}_4 + \alpha\mathbf{T}\otimes\mathbf{T})\!:\!\mathbf{T} = \mathbf{T} + \alpha\|\mathbf{T}\|^2\mathbf{T} = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ ce qui montre que $\mathbf{A}$ n'est pas inversible. Supposons à présent $\alpha\|\mathbf{T}\|^2 \neq -1$. Soient alors $\beta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{I}_4 + \beta\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}$. De $\mathbf{A}\!:\!\mathbf{B} = \mathbf{B}\!:\!\mathbf{A} = \mathbf{I}_4 + (\alpha + \beta + \alpha\beta\|\mathbf{T}\|^2)\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}$ il découle que l'on a $\mathbf{A}\!:\!\mathbf{B} = \mathbf{B}\!:\!\mathbf{A} = \mathbf{I}_4$ si et seulement si $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha\|\mathbf{T}\|^2}$. Le tenseur $\mathbf{A}$ est donc inversible et a pour inverse $\mathbf{I}_4 - \frac{\alpha}{1+\alpha\|\mathbf{T}\|^2}\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}$. $\square$

Nous pouvons alors énoncer puis démontrer le

THÉORÈME 2.2. – *Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{T}_n^p$ l'espace des tenseurs d'ordre p sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ orthonormé. Soient par ailleurs $\mathcal{T}_n^{2s}$ le sous-espace de $\mathcal{T}_n^2$ constitué des tenseurs symétriques du second ordre, $\mathbf{F}$ une bijection de $\mathcal{T}_n^{2s}$ sur $\mathcal{T}_n^{2s}$ positivement homogène de degré 1 et $\mathbf{D} = \mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathcal{T}_n^{2s}$ l'image par $\mathbf{F}$ d'un élément $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ de $\mathcal{T}_n^{2s}$ quelconque mais fixé. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait, $\forall \mathbf{D} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, $\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}:\mathbf{D} + ||\mathbf{D}||\mathbf{N}$, avec $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_n^4$, $\mathbf{N} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, $\mathbf{L}$ inversible et $||\mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}|| < 1$, est que $\mathbf{F}$ satisfasse les relations*

1. $\exists \mathbf{B} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, $||\mathbf{B}|| < 1$ *et* $\frac{\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}})+\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})}{||\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}})||+||\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})||} = -\mathbf{B}$, $\forall \breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s\star}$
2. $\exists \mathbf{J}_0 \in \mathcal{T}_n^4$, $\mathbf{J}_0$ *inversible et* $\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})\right) = \mathbf{J}_0:\breve{\boldsymbol{\sigma}}$, $\forall \breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s}$

Ces deux relations étant satisfaites, on a alors $\mathbf{L} = \mathbf{J}_0^{-1}:\left(\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}\right)$ ainsi que $\mathbf{N} = \mathbf{L}:\mathbf{B}$.

PREUVE (THÉORÈME DIRECT) – Soit $\mathbf{D} = \mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathcal{T}_n^{2s}$ l'image par $\mathbf{F}$ d'un élément $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ de $\mathcal{T}_n^{2s}$ quelconque mais fixé. Supposons tout d'abord que l'on ait, $\forall \mathbf{D} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, $\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}:\mathbf{D} + ||\mathbf{D}||\mathbf{N}$, avec $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_n^4$, $\mathbf{N} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, $\mathbf{L}$ inversible et $||\mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}|| < 1$. Posons $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}:\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}:\mathbf{N}$. On a alors $||\mathbf{B}|| < 1$ et $\mathbf{D} = \mathbf{A} - ||\mathbf{D}||\mathbf{B}$ c'est-à-dire $\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{A} - ||\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}})||\mathbf{B}$. La substitution de $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ par $-\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ laissant $\mathbf{B}$ inchangé et transformant $\mathbf{A}$ en $-\mathbf{A}$, on a également $\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = -\mathbf{A} - ||\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})||\mathbf{B}$ ce qui donne

$$\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = -\left(||\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}})|| + ||\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})||\right)\mathbf{B} \qquad \forall \breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s} \tag{3}$$

De $\mathbf{D} = \mathbf{0} \Rightarrow \breve{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ on déduit ensuite $\breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s\star} \Rightarrow \mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ et l'on obtient donc, puisque $||\mathbf{B}|| < 1$, la relation 1 du théorème 2.2.

De $\mathbf{D} = \mathbf{A} - ||\mathbf{D}||\mathbf{B}$ on tire par ailleurs $||\mathbf{D}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{D}||^2||\mathbf{B}||^2 - 2||\mathbf{D}||(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ce qui montre que $||\mathbf{D}||$ est racine du trinôme du second degré en x : $P(x) = (1-||\mathbf{B}||^2)x^2 + 2(\mathbf{A},\mathbf{B})x - ||\mathbf{A}||^2$. Ce dernier ne possédant, puisque $||\mathbf{B}|| < 1$, qu'une unique racine positive on a alors nécessairement

$$||\mathbf{D}|| = \frac{\sqrt{(\mathbf{A},\mathbf{B})^2+||\mathbf{A}||^2(1-||\mathbf{B}||^2)}-(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-||\mathbf{B}||^2} \tag{4}$$

puis

$$\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{A} - \frac{\sqrt{(\mathbf{A},\mathbf{B})^2+||\mathbf{A}||^2(1-||\mathbf{B}||^2)}-(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B} \tag{5}$$

La substitution de $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ par $-\breve{\boldsymbol{\sigma}}$ laissant $\mathbf{B}$ inchangé et transformant $\mathbf{A}$ en $-\mathbf{A}$, on a aussi

$$\mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = -\mathbf{A} - \frac{\sqrt{(\mathbf{A},\mathbf{B})^2+||\mathbf{A}||^2(1-||\mathbf{B}||^2)}+(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B} \tag{6}$$

ce qui donne, puisque $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}:\breve{\boldsymbol{\sigma}}$,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})\right) &= \mathbf{A} + \tfrac{(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B} \\ &= \left(\mathbf{I}_4 + \tfrac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}\right):\left(\mathbf{L}^{-1}:\breve{\boldsymbol{\sigma}}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}})\right) = \mathbf{J}_0:\breve{\boldsymbol{\sigma}}$, $\forall \breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s}$, avec $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{L}^{-1}$.

De $\frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}||\mathbf{B}||^2 \neq -1$ et du lemme 2.1 on déduit enfin que $\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$ est inversible, son inverse n'étant par ailleurs autre que $\mathbf{I}_4 - \mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$. Le tenseur du quatrième ordre $\mathbf{J}_0$ est donc lui-même inversible et la relation 2 du théorème 2.2 est bien satisfaite.

PREUVE (THÉORÈME INVERSE) – On suppose à présent satisfaites les relations 1 et 2 du théorème 2.2. Soit alors $\mathbf{L} = \mathbf{J}_0^{-1}:(\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})$. De $\frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}||\mathbf{B}||^2 \neq -1$ et du lemme 2.1 on conclut comme précédemment à l'inversibilité de $\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}$. Le tenseur $\mathbf{L}$ est donc aussi inversible et l'on a $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{I}_4 + \frac{1}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}):\mathbf{L}^{-1}$, de sorte que la relation 2 devient, après avoir posé $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}:\breve{\boldsymbol{\sigma}}$,

$$\mathbf{F}(\breve{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathbf{F}(-\breve{\boldsymbol{\sigma}}) = 2\left(\mathbf{A} + \frac{(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-||\mathbf{B}||^2}\mathbf{B}\right) \qquad \forall \breve{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2s} \tag{8}$$

La relation 1 donne quant à elle, puisque $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ en vertu de l'homogénéité positive de $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}}) \;=\; -\left(\|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\| + \|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\right)\mathbf{B} \qquad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}} \tag{9}$$

On obtient alors, en sommant (8) et (9),

$$\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) \;=\; \mathbf{A} + \tfrac{(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}\left(\|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\| + \|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\right)\mathbf{B} \qquad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}} \tag{10}$$

tandis que le produit scalaire de ces mêmes équations fournit

$$\|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\|^2 - \|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|^2 \;=\; -2\left(\|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\| + \|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\right)\tfrac{(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-\|\mathbf{B}\|^2} \tag{11}$$

ce qui donne, puisque $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et que $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,

$$\|\mathbf{F}(-\check{\boldsymbol{\sigma}})\| \;=\; \|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\| + \tfrac{2(\mathbf{A},\mathbf{B})}{1-\|\mathbf{B}\|^2} \qquad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}} \tag{12}$$

Il vient alors, après avoir reporté (12) dans (10),

$$\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}}) \;=\; \mathbf{A} - \|\mathbf{F}(\check{\boldsymbol{\sigma}})\|\mathbf{B} \qquad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}} \tag{13}$$

c'est-à-dire $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1} : \check{\boldsymbol{\sigma}} - \|\mathbf{D}\|\mathbf{B}$ et l'on a donc bien, après avoir posé $\mathbf{N} = \mathbf{L} : \mathbf{B}$,

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} + \|\mathbf{D}\|\mathbf{N} \qquad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}_n^{2\mathrm{s}} \tag{14}$$

3. Considérations physiques

On s'intéresse ici à l'interprétation physique des conditions 1 et 2 du théorème 2.2 en termes de réponse incrémentale du matériau. Considérons pour cela la restriction des modèles incrémentaux de type (1) à la classe des chemins de sollicitation véritablement triaxiaux. Bien que l'existence de tels chemins ne soit pas acquise pour tout matériau, elle le reste néanmoins pour de nombreux corps déformables et nous supposerons ici, comme le suggèrent les observations expérimentales d'essais triaxiaux réalisés sur des échantillons de sable [1], qu'il en est ainsi pour les milieux granulaires considérés dans cet article.

Sur ces chemins de sollicitation véritablement triaxiaux, les directions principales des tenseurs $\mathbf{D}$ et $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ restent, en tout point matériel et à tout instant, fixes et confondues avec les directions d'orthotropie du matériau. Les matrices représentatives $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ et $\underline{\underline{\check{\boldsymbol{\sigma}}}}$ de ces tenseurs dans le repère d'orthotropie sont donc diagonales et il en est alors de même de celle $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ du tenseur $\mathbf{B}$ associé à la condition 1 du théorème 2.2, de sorte que leur correspondent les vecteurs $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\check{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$ de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\check{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \check{\sigma}_1 \\ \check{\sigma}_2 \\ \check{\sigma}_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Au tenseur du quatrième ordre $\mathbf{J}_0$ lié à la condition 2 du même théorème correspond alors un tenseur du second ordre dont nous désignerons par $\underline{\underline{\mathbf{J}_0}}$ la matrice représentative dans le repère d'orthotropie.

Introduisons par ailleurs les matrices

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^+} & \frac{-\nu_{12}^+}{E_2^+} & \frac{-\nu_{13}^+}{E_3^+} \\ \frac{-\nu_{21}^+}{E_1^+} & \frac{1}{E_2^+} & \frac{-\nu_{23}^+}{E_3^+} \\ \frac{-\nu_{31}^+}{E_1^+} & \frac{-\nu_{32}^+}{E_2^+} & \frac{1}{E_3^+} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\mathbf{R}}}^- = -\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^-} & \frac{-\nu_{12}^-}{E_2^-} & \frac{-\nu_{13}^-}{E_3^-} \\ \frac{-\nu_{21}^-}{E_1^-} & \frac{1}{E_2^-} & \frac{-\nu_{23}^-}{E_3^-} \\ \frac{-\nu_{31}^-}{E_1^-} & \frac{-\nu_{32}^-}{E_2^-} & \frac{1}{E_3^-} \end{bmatrix} \tag{16}$$

classiquement dénommées “matrices rhéologiques tangentes” et telles que la colonne i de $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+$ ($\mathrm{resp}^{\mathrm{t}}$ de $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^-$), $i \in \{1,2,3\}$, représente la réponse $\underline{\mathbf{D}}$ à la sollicitation $\underline{\breve{\boldsymbol{\sigma}}}$ définie par $\breve{\sigma}_j = +\delta_{ij}$ ($\mathrm{resp}^{\mathrm{t}}$ $\breve{\sigma}_j = -\delta_{ij}$), $\forall j \in \{1,2,3\}$. Les grandeurs physiques strictement positives E_i^+ et E_i^-, $i \in \{1,2,3\}$, ainsi que ν_{ij}^+ et ν_{ij}^-, $(i, j \neq i) \in \{1,2,3\}^2$, définissant les composantes de ces matrices sont respectivement les modules tangents et les coefficients de Poisson tangents associés à ces six sollicitations $\underline{\breve{\boldsymbol{\sigma}}}$ particulières.

La condition 2 du théorème 2.2 implique alors $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_0 = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+ - \underline{\underline{\mathbf{R}}}^-\right)$. Exprimons à présent la condition 1 de ce même théorème en choisissant comme sollicitations $\underline{\breve{\boldsymbol{\sigma}}}$ particulières les six taux de contrainte précédemment introduits et dont les réponses constituent les colonnes des matrices $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^+$ et $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^-$. On obtient alors les relations

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{E_1^+} - \frac{1}{E_1^-}\right) & = & \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\nu_{12}^-}{E_2^-} - \frac{\nu_{12}^+}{E_2^+}\right) & = & \frac{1}{\alpha_3}\left(\frac{\nu_{13}^-}{E_3^-} - \frac{\nu_{13}^+}{E_3^+}\right) & = & -B_1 \\
\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{E_2^+} - \frac{1}{E_2^-}\right) & = & \frac{1}{\alpha_3}\left(\frac{\nu_{23}^-}{E_3^-} - \frac{\nu_{23}^+}{E_3^+}\right) & = & \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\nu_{21}^-}{E_1^-} - \frac{\nu_{21}^+}{E_1^+}\right) & = & -B_2 \\
\frac{1}{\alpha_3}\left(\frac{1}{E_3^+} - \frac{1}{E_3^-}\right) & = & \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\nu_{31}^-}{E_1^-} - \frac{\nu_{31}^+}{E_1^+}\right) & = & \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\nu_{32}^-}{E_2^-} - \frac{\nu_{32}^+}{E_2^+}\right) & = & -B_3 \\
\multicolumn{7}{l}{\text{avec,} \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \quad \alpha_i = \frac{1}{E_i^+}(1 + \sum_{j\neq i} \nu_{ji}^{+2})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{E_i^-}(1 + \sum_{j \neq i} \nu_{ji}^{-2})^{\frac{1}{2}}}
\end{array}\right. \tag{17}$$

que doivent donc nécessairement satisfaire les modules et coefficients de Poisson tangents pour qu’un modèle incrémental de type (1) puisse s’inverser sous la forme (2) lorsque l’état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ se situe à l’intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite.

4. Conclusion

Nous avons établi, dans cet article, deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu’une loi incrémentale exprimant le tenseur des taux de déformation en fonction de la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy puisse s’inverser en adoptant le formalisme général des modèles hypoplastiques lorsque l’état de contrainte se situe à l’intérieur du domaine ayant pour frontière la surface limite.

Ces conditions imposent alors aux composantes des matrices rhéologiques tangentes certaines relations de compatibilité dont la pertinence vis-à-vis des observations expérimentales reste à présent à vérifier.

Références bibliographiques

[1] Darve F., Une formulation incrémentale des lois rhéologiques — Application aux sols, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1978.

[2] Chambon R., Contribution à la modélisation non linéaire du comportement des sols, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1981.

[3] Kolymbas D., A constitutive law of the rate type for soils — Position, calibration and prediction, in: Gudehus et al. (Eds.), Constitutive Relations for Soils, Grenoble, 1984, p. 419-437.

[4] Chambon R., Une classe de lois de comportement incrémentalement non linéaires pour les sols non visqueux, résolution de quelques problèmes de cohérence, C. R. Acad. Sci. 308(II) (1989) 1571-1576.

[5] Wu W., Bauer E., A simple hypoplastic constitutive model for sand, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech. 18 (1994) 833-862.

[6] Gudehus G., A comprehensive constitutive equation for granular materials, Soils and Foundations 36(1) (1996) 1-12.

[7] Niemunis A., Hypoplasticity vs Elastoplasticity — selected topics, In D. Kolymbas (Eds.), Modern approaches to plasticity, A.A. Balkema, 1993, p. 277-307.