Du bien posé d'une classe de problèmes variationnels de la physique mathématique

Patrick ROYIS

31 août 2022

Résumé

Parmi les questions relatives à la fiabilité des calculs par éléments finis, celle de l'existence et de l'unicité de la solution des prolèmes variationnels sur lesquels se fonde cette méthode est de première importance. C'est pourqoi nous proposons, dans cet article, d'établir des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution d'une classe de problèmes variationnels de la physique mathématique. Notons qu'alors ces résultats prouvent l'unification, du point de vue mathématique, des théories de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Mots-clés Formulation variationnelle — Existence et unicité — Méthodes d'éléments finis

1 Position du problème

Parmi les questions relatives à la fiabilité des calculs par éléments finis, celle de l'existence et de l'unicité de la solution des prolèmes variationnels sur lesquels se fonde cette méthode est de première importance. En effet, en s'étendant aux problèmes approchés issus de la discrétisation spatio-temporelle, de tels résultats théoriques contribuent à asseoir la robustesse des logiciels de calcul et, par conséquent, la fiabilité des approximations numériques qu'ils fournissent. C'est pourqoi nous proposons, dans cet article, d'établir des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution d'une classe de problèmes variationnels de la physique mathématique. Notons qu'alors ces résultats prouvent l'unification, du point de vue mathématique, des théories de la gravitation et de l'électromagnétisme.

De façon plus précise, nous considérons les problèmes adoptant la forme

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccll} \multicolumn{6}{l}{\text{Trouver } (\lambda,\mu)\in V\times M \text{ tel que}} \\ a(\lambda,\mathbf{u}) & - & b(\mathbf{u},\mu) & = & l(\mathbf{u}) & \forall\mathbf{u}\in V \\ b(\lambda,\mathbf{v}) & + & c(\mu,\mathbf{v}) & = & h(\mathbf{v}) & \forall\mathbf{v}\in M \end{array}\right.$$

où V et M sont deux espaces de Hilbert, de duaux tologiques respectifs V' et M', où $a : V\times V \mapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue par rapport au second argument mais non linéaire par rapport au premier, où $b : V \times M \mapsto \mathbb{R}$ et $c : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ sont deux formes bilinéaires continues, de constantes de continuité respectives c_b et c_c, tandis que l et h sont, respectivement, des éléments de V' et M'.

2 Notations — Résultat préliminaire

Let E un espace de Hilbert (par exemple V ou M) de dual topologique E'. Désignons par $(.,.)_E$ produit scalaire de E, par $\|.\|_E$ la norme associée et pat $\|.\|_{E'}$ la nome duale. Étant donné $g \in E'$, l'on désigne par $\mathbf{g}$ l'unique élément de E tel que $(\mathbf{g}, \mathbf{w})_E = g(\mathbf{w})$ $\forall \mathbf{w} \in E$ dont l'existence est garantie par le théorème de repésentation de Riesz, avec de plus. $\|\mathbf{g}\|_E = \|g\|_{E'}$. L'application ainsi construite est alors un isomorphisme isométrique de E sur E'.

Comme la forme a est linéaire et continue par rapport au second argument, il existe un unique operateur $A : V \mapsto V'$ tel que l'on ait, $\forall \lambda \in V$, $A\lambda(\mathbf{u}) = a(\lambda, \mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u} \in V$. L'on désigne alors par $\mathbf{A} : V \mapsto V$ l'opérateur (non linéaire comme A) qui à tout $\lambda \in V$ associe l'unique élément $\mathbf{A}\lambda \in V$ associé à $A\lambda$ par isomorphisme isométrique de Riesz.

Introduisons par ailleurs les opérateurs linéaires et continus $B \in \mathcal{L}(V; M')$, ${}^tB \in \mathcal{L}(M; V')$ et $C \in \mathcal{L}(M; M')$ respectivement définis par

$$\begin{array}{rcrcll} \forall \mathbf{u} \in V & : & B\mathbf{u}(\mu) & = & b(\mathbf{u}, \mu) & \forall \mu \in M \\ \forall \mathbf{v} \in M & : & {}^tB\mathbf{v}(\lambda) & = & b(\lambda, \mathbf{v}) & \forall \lambda \in V \\ \forall \mu \in M & : & C\mu(\mathbf{v}) & = & c(\mu, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in M \end{array}$$

à partir desquels l'on construit, en les composant, comme nous l'avons fait pour A, isomorphisme isométrique de Riesz, les opérateurs linéaires et continus $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(V; M)$, ${}^t\mathbf{B} \in \mathcal{L}(M; V)$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(M; M)$.

Soit enfin K le noyau de B (ou, ce qui revient au même, celui de $\mathbf{B}$), soit $K^\perp$ l'orthogonal de K dans V et soit K° le polaire de K dans V'.

L'on a alors le

Lemme 1 *[5] Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe $\beta \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que* $\displaystyle\inf_{\mu \in M^\star} \sup_{\lambda \in V^\star} \frac{b(\lambda, \mu)}{\|\lambda\|_V \|\mu\|_M} \geq \beta$.
2. *l'opérateur B est un isomorphisme de $K^\perp$ sur M'. De plus, $\|B\lambda\|_{M'} \geq \beta\|\lambda\|_V$, $\forall \lambda \in K^\perp$.*
3. *L'opérateur ${}^tB$ est un isomorphisme de M sur K°. De plus, $\|{}^tB\mu\|_{V'} \geq \beta\|\mu\|_M$, $\forall \mu \in M$.*

La condition inf-sup de la proposition 1 du lemme 1 est aussi appelée condition LBB, l'acronyme LBB étant construit à partie des initiales des noms de la mathématicienne russe Ladyzhenskaya [6] et des mathématiciens thcéco-étasunien Babuška [1] et italien Brezzi [2][3].

Enfin, concluons cette section en établissant le

Théorème 1 *Soit E un espace de Hilbert, soit $f : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ et soit K un sous-espace fermé de E. L'on suppose que la forme f est linéaire et continue par rapport à son second argument, de sorte qu'il existe un operateur $\mathbf{F} : E \mapsto E$ tel que $f(\eta, \mathbf{w}) = (\mathbf{F}\eta, \mathbf{w})_E$ $\forall(\eta, \mathbf{w}) \in E \times E$. L'on suppose de plus que $\mathbf{F}$ satisfait les deux propriétés suivantes.*

1. $\exists c_f \in \mathbb{R}^{+\star} : \|\mathbf{F}\eta - \mathbf{F}\eta'\|_E \leq c_f \|\eta - \eta'\|_E \quad \forall(\eta, \eta') \in K \times K$
2. $\exists \alpha_f \in \mathbb{R}^{+\star} : (\mathbf{F}\eta - \mathbf{F}\eta', \eta - \eta')_E \geq \alpha_f \|\eta - \eta'\|_E^2 \quad \forall(\eta, \eta') \in K \times K$

Alors, $\forall g \in E'$, le problème

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \eta \in K \text{ tel que} \\ \quad f(\eta, \mathbf{w}) \quad = \quad g(\mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{w} \in K \end{array} \right.$$

possède unique solution $\eta \in K$.

Preuve du théorème 1. Soit ρ un réel strictement positif. L'on a

$$\begin{array}{rcl} f(\eta, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in K & \Leftrightarrow & (\mathbf{F}\eta, \mathbf{w})_E = (\mathbf{g}, \mathbf{w})_E \quad \forall \mathbf{w} \in K \\ & \Leftrightarrow & (\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta + \eta - \eta, \mathbf{w})_E = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in K \\ & \Leftrightarrow & \eta = \mathbf{P}_K(\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta + \eta) \end{array}$$

où $\mathbf{P}_K$ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur K. Posons alors, $\forall \eta \in K$, $\mathbf{S}\eta = \mathbf{P}_K(\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta + \eta)$. L'idée est d'ajuster la constante ρ de façon telle que $\mathbf{S}$ soit une contraction stricte.

Remarquons que l'on a, $\forall(\eta, \eta') \in K \times K$,

$$\begin{array}{rcl} \|\mathbf{S}\eta - \mathbf{S}\eta'\|_E^2 & = & \|\mathbf{P}_K(\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta + \eta) - \mathbf{P}_K(\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta' + \eta')\|_E^2 \\ & \leq & \|(\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta + \eta) - (\rho\mathbf{g} - \rho\mathbf{F}\eta' + \eta')\|_E^2 \\ & = & \|\eta - \eta' - \rho(\mathbf{F}\eta - \mathbf{F}\eta')\|_E^2 \\ & = & \|\eta - \eta'\|_E^2 + \rho^2\|\mathbf{F}\eta - \mathbf{F}\eta'\|_E^2 - 2\rho(\mathbf{F}\eta - \mathbf{F}\eta', \eta - \eta')_E \\ & \leq & \|\eta - \eta'\|_E^2(1 + \rho^2 c_f^2 - 2\rho\alpha_f) \end{array}$$

ce qui donne

$$\|\mathbf{S}\eta - \mathbf{S}\eta'\|_E \leq k\|\eta - \eta'\|_E \quad \forall(\eta, \eta') \in K \times K$$

avec $k = \sqrt{1 + \rho^2 c_f^2 - 2\rho\alpha_f}$. Ainsi, si $\rho \in]0, 2\frac{\alpha_f}{c_f^2}[$ alors $k \in]0, 1[$ et $\mathbf{S}$ est une contraction stricte, ce qui achève la preuve du théorème 1. $\square$

Pour conclure, remarquons que le théorème 1 peut également être prouvé grâce au théorème de Minty-Browder [7][4] fondé sur les propriétés de continuité, de monotonie et de coercivité de l'opérateur $\mathbf{F}$. En effet, la condition 1 du théorème 1 entraîne la continuité de $\mathbf{F}$, tandis que la condition 2 implique sa monotonie et sa coercivité.

3 Résultats d'existence et d'unicité

3.1 Première classe de problèmes : $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M)}$

Dans cette première classe, où $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M)}$, se trouvent, par exemple, les problèmes d'évolution quasistatique de solides incompressibles au comportement non linéaire soumis à des transformations infinitésimales, ou encore ceux de propagation d'ondes électromagnétiques loin des sources. Pour les premiers, λ est alors le champ des déplacements ou des vitesses, et μ est celui des pressions. Pour les seconds, λ est le champ magnétique et μ est le champ électrique. Enfin, l'on a aussi $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M)}$u lorsq'une formulation variationnelle mixte est utilisée pour modéliser les transformations quasistatiques et infinitésimales de solides déformables. Dans ce cas, λ est le champ des contraintes de Cauchy tandis que μ est celui des déplacements.

Prouvons à présent le

Théorème 2 *L'on suppose que la forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup du lemme 1. L'on suppose de plus que, $\forall(\lambda_1, \lambda_0, \lambda_0') \in K^\perp \times K \times K$, l'opérateur* $\mathbf{A}$ *satisfait les deux propriétés suivantes*

1. $\exists c_a \in \mathbb{R}^{+\star} : \|\mathbf{A}[\lambda_1 + \lambda_0] - \mathbf{A}[\lambda_1 + \lambda_0']\|_V \leq c_a \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V$
2. $\exists \alpha_a \in \mathbb{R}^{+\star} : (\mathbf{A}[\lambda_1 + \lambda_0] - \mathbf{A}[\lambda_1 + \lambda_0'], \lambda_0 - \lambda_0')_V \geq \alpha_a \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V^2$

Alors, $\forall(l, h) \in V' \times M'$, le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{lllll} \text{Trouver } (\lambda, \mu) \in V \times M \text{ tel que} & & & & \\ a(\lambda, \mathbf{u}) & - \; b(\mathbf{u}, \mu) & = & l(\mathbf{u}) & \forall \mathbf{u} \in V \\ b(\lambda, \mathbf{v}) & & = & h(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in M \end{array} \right.$$

possède une unique solution $(\lambda, \mu) \in V \times M$.

Preuve du théorème 2. Remarquons tout d'abord que

$$b(\lambda, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}) \; \forall \mathbf{v} \in M \Leftrightarrow B\lambda = h$$

D'après la deuxième proposition du lemme 1, il existe alors un unique $\lambda_1 \in K^\perp$ tel que $B\lambda_1 = h$. Alors, $B\lambda = h \Leftrightarrow \lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ avec $\lambda_0 \in K$, de sorte que (P) est equivalent au problème

$$(P_{11}) \left\{ \begin{array}{lllll} \text{Trouver } (\lambda_0, \mu) \in K \times M \text{ tel que} & & & & \\ a(\lambda_0 + \lambda_1, \mathbf{u}) & - \; b(\mathbf{u}, \mu) & = & l(\mathbf{u}) & \forall \mathbf{u} \in V \end{array} \right.$$

Mainenant, si (P_{11}) possède une solution, alors λ_0 nécessairement solution de

$$(P_{12}) \left\{ \begin{array}{llll} \text{Trouver } \lambda_0 \in K \text{ tel que} & & & \\ a(\lambda_0 + \lambda_1, \mathbf{u}) & = & l(\mathbf{u}) & \forall \mathbf{u} \in K \end{array} \right.$$

Posons, $\forall(\lambda_0, \mathbf{u}) \in K \times K$, $f(\lambda_0, \mathbf{u}) = a(\lambda_0 + \lambda_1, \mathbf{u})$. L'on obtient alors, $\forall \lambda_0 \in K$, $f(\lambda_0, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}\lambda_0, \mathbf{u})_V \; \forall \mathbf{u} \in V$, avec $\mathbf{F}\lambda_0 = \mathbf{A}[\lambda_0 + \lambda_1]$.

De plus, les propriétés 1 and 2 satisfaites par l'opérateur $\mathbf{A}$ garantissent que

$$\begin{array}{l} \|\mathbf{F}\lambda_0 - \mathbf{F}\lambda_0'\|_V \leq c_a \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V \quad \forall(\lambda_0, \lambda_0') \in K \times K \\ (\mathbf{F}\lambda_0 - \mathbf{F}\lambda_0', \lambda_0 - \lambda_0')_V \geq \alpha_a \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V^2 \quad \forall(\lambda_0, \lambda_0') \in K \times K \end{array}$$

Il découle alors du théorème 1 que (P_{12}) possède une unique solution $\lambda_0 \in K$.

De plus, $a(\lambda_0+\lambda_1,\mathbf{u}) = l(\mathbf{u})\ \forall \mathbf{u}\in K \Leftrightarrow A[\lambda_0+\lambda_1]-l\in K^\circ$. L'existence et l'unicité de μ est ensuite assurée par la troisième proposition du lemme 1, puisque la solution (λ_0,μ) of (P_{11}) satisfait la relation ${}^tB\mu = A[\lambda_0+\lambda_1]-l$.

Ainsi, $(\lambda=\lambda_0+\lambda_1,\mu)$ est l'unique solution of (P), ce qui achève la peuve du théorème 2. □

3.2 Deuxième classe de problèmes : c est coercive

Dans cette deuxième classe se trouvent, par exemple, les problèmes de couplage hydromécaique tels que la consolidation de massifs argileux. Le champ λ est alors celui des déplacements, μ celui de la pression intersticielle, et la forme bilinéaire c, non nulle cette fois, est alors continue et coercive.

L'on a alors le

Théorème 3 *L'on suppose que la forme bilinéaire et continue c est coercive, c'est-à-dire qu'il existe un réel α_c strictement positif tel que $c(\mathbf{v},\mathbf{v})\ \geq \alpha_c\|\mathbf{v}\|_M^2$ $\forall \mathbf{v}\in M$. Supposons de plus que l'opérateur $\mathbf{A}$ satisfait les deux propriétés suivantes*

1. $\exists c_a\in\mathbb{R}^{+\star} : \|\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'\|_V \leq c_a\|\lambda-\lambda'\|_V \quad \forall(\lambda,\lambda')\in V\times V$
2. $\exists \alpha_a\in\mathbb{R}^{+\star} : (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda',\lambda-\lambda')_V \geq \alpha_a\|\lambda-\lambda'\|_V^2 \quad \forall(\lambda,\lambda')\in V\times V$

Alors, $\forall(l,h)\in V'\times M'$, le problème

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccl} \multicolumn{5}{l}{\text{Trouver } (\lambda,\mu)\in V\times M \text{ tel que}}\\ a(\lambda,\mathbf{u}) & - & b(\mathbf{u},\mu) & = & l(\mathbf{u}) \qquad \forall\mathbf{u}\in V\\ b(\lambda,\mathbf{v}) & + & c(\mu,\mathbf{v}) & = & h(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in M \end{array}\right.$$

possède une unique solution $(\lambda,\mu)\in V\times M$.

Preuve du théorème 3. Posons $E=V\times M$, $\eta=(\lambda,\mu)\in E$ ainsi que $\mathbf{w}=(\mathbf{u},\mathbf{v})\in E$. Alors E, muni du produit scalaire $(\eta,\mathbf{w})_E=(\lambda,\mathbf{u})_V+(\mu,\mathbf{v})_M$, est un espace de Hibert. Introduisons par ailleurs les formes $f:E\times E\mapsto\mathbb{R}$ et $g:E\mapsto\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{array}{rcl} f(\eta,\mathbf{w}) & = & a(\lambda,\mathbf{u})-b(\mathbf{u},\mu)+b(\lambda,\mathbf{v})+c(\mu,\mathbf{v}) \quad \forall(\eta,\mathbf{w})\in E\times E\\ g(\mathbf{w}) & = & l(\mathbf{u})+h(\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{w}\in E \end{array}$$

Alors, le problème (P) est équivalent à

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Trouver } \eta\in E \text{ tel que}}\\ f(\eta,\mathbf{w}) & = & g(\mathbf{w}) \qquad \forall\mathbf{w}\in E \end{array}\right.$$

Remarquons que $(l,h)\in V'\times M' \Longrightarrow g\in E'$. En effet, soient c_l and c_h les constantes de continuité de l and h, respectivement. L'on a alors, $\forall\mathbf{w}=(\mathbf{u},\mathbf{v})\in E$,

$$|g(\mathbf{w})|\leq|l(\mathbf{u})|+|h(\mathbf{v})|\leq c_l\|\mathbf{u}\|_V+c_h\|\mathbf{v}\|_M\leq(c_l+c_h)\|\mathbf{w}\|_E$$

L'on a aussi, $\forall(\eta,\mathbf{w})\in E\times E$,

$$\begin{array}{rcl} f(\eta,\mathbf{w}) & = & a(\lambda,\mathbf{u})-b(\mathbf{u},\mu)+b(\lambda,\mathbf{v})+c(\mu,\mathbf{v}) \\ & = & (\mathbf{A}\lambda,\mathbf{u})_V-(^{\mathbb{R}mt}\mathbf{B}\mu,\mathbf{u})_V+(\mathbf{B}\lambda,\mathbf{v})_M+(\mathbf{C}\mu,\mathbf{v})_M \\ & = & (\mathbf{A}\lambda-\,^t\mathbf{B}\mu,\mathbf{u})_V+(\mathbf{B}\lambda+\mathbf{C}\mu,\mathbf{v})_M \end{array}$$

ce qui prouve que $f(\eta,\mathbf{w})=(\mathbf{F}\eta,\mathbf{w})_E\ \forall(\eta,\mathbf{w})\in E\times E$, où $\mathbf{F}:E\mapsto E$ est défini par $\mathbf{F}\eta=(\mathbf{A}\lambda-\,^t\mathbf{B}\mu,\mathbf{B}\lambda+\mathbf{C}\mu)\ \ \forall\eta=(\lambda,\mu)\in E$. Il ne reste alors plus qu'à prouver que l'opérateur $\mathbf{F}$ satisfait les hypothèses du théorème 1.

Pour cela soient $\eta=(\lambda,\mu)$ et $\eta'=(\lambda',\mu')$ des éléments donnés de E. L'on

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta' & = & ((\mathbf{A}\lambda-\,^t\mathbf{B}\mu)-(\mathbf{A}\lambda'-\,^t\mathbf{B}\mu'),(\mathbf{B}\lambda+\mathbf{C}\mu)-(\mathbf{B}\lambda'+\mathbf{C}\mu')) \\ & = & (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'-\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu'],\mathbf{B}[\lambda-\lambda']+\mathbf{C}[\mu-\mu']) \end{array}$$

Ainsi,

$$\|\mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta'\|_E^2=\left\|\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'-\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu']\right\|_V^2+\|\mathbf{B}[\lambda-\lambda']+\mathbf{C}[\mu-\mu']\|_M^2$$

ce qui donne

$$\begin{array}{rcl} \|\mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta'\|_E & \leq & \|\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'-\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu']\|_V+\|\mathbf{B}[\lambda-\lambda']+\mathbf{C}[\mu-\mu']\|_M \\ & \leq & \|\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'\|_V+\|\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu']\|_V+\|\mathbf{B}[\lambda-\lambda']\|_M+\|\mathbf{C}[\mu-\mu']\|_M \\ & \leq & c_a\|\lambda-\lambda'\|_V+c_b\|\mu-\mu'\|_M+c_b\|\lambda-\lambda'\|_V+c_c\|\mu-\mu'\|_M \\ & \leq & (c_a+2c_b+c_c)\|\eta-\eta'\|_E \end{array}$$

Ainsi, $\|\mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta'\|_E\leq c_f\|\eta-\eta'\|_E$ avec $c_f=c_a+2c_b+c_c$.

Il découle alors de la coercivité de c que $(\mathbf{C}\mathbf{v},\mathbf{v})_M\geq\alpha_c\|\mathbf{v}\|_M^2$, $\forall\mathbf{v}\in M$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta',\eta-\eta')_E & = & (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'-\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu'],\lambda-\lambda')_V \\ & & +(\mathbf{B}[\lambda-\lambda']+\mathbf{C}[\mu-\mu'],\mu-\mu')_M \\ & = & (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda',\lambda-\lambda')_V+(\mathbf{C}[\mu-\mu'],\mu-\mu')_M \\ & & -(\,^t\mathbf{B}[\mu-\mu'],\lambda-\lambda')_V+(\mathbf{B}[\lambda-\lambda'],\mu-\mu')_M \\ & = & (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda',\lambda-\lambda')_V+(\mathbf{C}[\mu-\mu'],\mu-\mu')_M \\ & & -b(\lambda-\lambda',\mu-\mu')+b(\lambda-\lambda',\mu-\mu') \\ & = & (\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda',\lambda-\lambda')_V+(\mathbf{C}[\mu-\mu'],\mu-\mu')_M \\ & \geq & \alpha_a\|\lambda-\lambda'\|_V^2+\alpha_c\|\mu-\mu'\|_M^2 \end{array}$$

Alors, $(\mathbf{F}\eta-\mathbf{F}\eta',\eta-\eta')_E\geq\alpha_f\|\eta-\eta'\|_E^2$ avec $\alpha_f=\min\{\alpha_a,\alpha_c\}>0$.

Ainsi, les hypotèses du théorème 1 sont satisfaites, ce qui achève la preuve du théorème 3. □

3.3 Troisième classe de problèmes : c est non coercive

L'on rencontre, dans cette classe, les problèmes de grandes transformations (i.e. grands déplacements, grandes déformations et grandes rotations) de solides élastoviscoplastiques, pour les quels λ est the le champ des taux objectifs de contrainte et μ celui des vitesses [8]. La forme bilnéaire c demeure continue mais est cette fois non-coercive, de sorte que l'on a alors le

Théorème 4 *L'on suppose que la forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup du lemme 1. L'on suppose de plus que l'opérateur $\mathbf{A}$ satisfait, $\forall(\lambda,\lambda')\in V\times V$ et $\forall(\lambda_1,\lambda_0,\lambda_0')\in K^\perp\times K\times K$, les deux propriétés suivantes*

1. $\exists c_a\in\mathbb{R}^{+\star}:\|\mathbf{A}\lambda-\mathbf{A}\lambda'\|_V\leq c_a\|\lambda-\lambda'\|_V$
2. $\exists\alpha_a\in\mathbb{R}^{+\star}:(\mathbf{A}[\lambda_1+\lambda_0]-\mathbf{A}[\lambda_1+\lambda_0'],\lambda_0-\lambda_0')_V\geq\alpha_a\|\lambda_0-\lambda_0'\|_V^2$

L'on suppose enfin que $\frac{c_a c_c}{\beta^2}(1+\frac{c_a}{\alpha_a})<1$. Alors, $\forall(l,h)\in V'\times M'$, le problème

$$(P)\left\{\begin{array}{lllll}\text{Trouver }(\lambda,\mu)\in V\times M\text{ tel que} & & & & \\ a(\lambda,\mathbf{u}) & - & b(\mathbf{u},\mu) & = & l(\mathbf{u}) \qquad \forall\mathbf{u}\in V\\ b(\lambda,\mathbf{v}) & + & c(\mu,\mathbf{v}) & = & h(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in M\end{array}\right.$$

possède une unique solution $(\lambda,\mu)\in V\times M$.

Preuve du théorème 4. Soit, pour μ donné dans M, le problème

$$(P_\mu)\left\{\begin{array}{lllll}\text{Trouver }(\mathbf{S}\mu,\mathbf{T}\mu)\in V\times M\text{ tel que} & & & & \\ a(\mathbf{S}\mu,\mathbf{u}) & - & b(\mathbf{u},\mathbf{T}\mu) & = & l(\mathbf{u}) \qquad \forall\mathbf{u}\in V\\ b(\mathbf{S}\mu,\mathbf{v}) & + & c(\mu,\mathbf{v}) & = & h(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in M\end{array}\right.$$

Il est aisé de voir que le problème (P_μ) possède une unique solution $(\mathbf{S}\mu,\mathbf{T}\mu)$ dans $V\times M$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 2 après avoir remplacé h par $h-C\mu\in M'$ et c par $0_{\mathcal{L}(M\times M)}$. Il s'ensuit alors immédiatement que (P) possède une unique solution $(\lambda,\mu)\in V\times M$ si et seulement si l'application $\mathbf{T}:M\mapsto M$ qui associe $\mathbf{T}\mu$ à μ admet un unique point fixe. Montrons que c'est bien le cas dès lors que $\frac{c_a c_c}{\beta^2}(1+\frac{c_a}{\alpha_a})<1$.

Pour cela soient μ et μ' des éléments donnés de M et soient $(\mathbf{S}\mu,\mathbf{T}\mu)$ (resp^t $(\mathbf{S}\mu',\mathbf{T}\mu')$) $\in V\times M$ l'unique solution de (P_μ) (resp^t $(P_{\mu'})$). Comme l'opérateur B est, d'après la deuxième proposition du lemme 1, un isomorphisme de $K^\perp$ sur M', il existe un unique λ_1 (resp^t λ_1') $\in K^\perp$ tel que $B\lambda_1=h-C\mu$ (resp^t $B\lambda_1'=h-C\mu'$). L'on a alors $B[\lambda_1-\lambda_1']=-C[\mu-\mu']$ ainsi que

$$\|C[\mu-\mu']\|_{M'}=\|B[\lambda_1-\lambda_1']\|_{M'}\geq\beta\|\lambda_1-\lambda_1'\|_V$$

ce qui donne, compte tenu de la continuité de l'opérateur linéaire C,

$$\|\lambda_1-\lambda_1'\|_V\leq\frac{c_c}{\beta}\|\mu-\mu'\|_M \tag{1}$$

Il vient alors $\mathbf{S}\mu=\lambda_1+\lambda_0$ (resp^t $\mathbf{S}\mu'=\lambda_1'+\lambda_0'$) avec λ_0 (resp^t λ_0') $\in K$. De plus, $\forall\mathbf{u}\in K$, $a(\mathbf{S}\mu,\mathbf{u})=a(\mathbf{S}\mu',\mathbf{u})=l(\mathbf{u})$ ce qui donne, $\forall\mathbf{u}\in K$,

$$\begin{array}{ll} & a(\mathbf{S}\mu,\mathbf{u})=a(\mathbf{S}\mu',\mathbf{u})\\ \Leftrightarrow & (\mathbf{A}[\lambda_0+\lambda_1],\mathbf{u})_V=(\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1'],\mathbf{u})_V\\ \Leftrightarrow & (\mathbf{A}[\lambda_0+\lambda_1]-\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1],\mathbf{u})_V=(\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1']-\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1],\mathbf{u})_V\end{array}$$

Posons alors $\mathbf{u}=\lambda_0-\lambda_0'$. Il vient

$$(\mathbf{A}[\lambda_0+\lambda_1]-\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1],\lambda_0-\lambda_0')_V=(\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1']-\mathbf{A}[\lambda_0'+\lambda_1],\lambda_0-\lambda_0')_V$$

de sorte que l'on obtient, compte tenu des propriétés de l'opérateur **A**,

$$\alpha_a \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V^2 \leq c_a \|\lambda_1 - \lambda_1'\|_V \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V$$

c'est-à-dire

$$\|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V \leq \frac{c_a}{\alpha_a} \|\lambda_1 - \lambda_1'\|_V \tag{2}$$

L'on a par ailleurs $A[\mathbf{S}\mu] - {}^tB[\mathbf{T}\mu] = l$ (resp^t $A[\mathbf{S}\mu'] - {}^tB[\mathbf{T}\mu'] = l$) et donc $A[\mathbf{S}\mu] - A[\mathbf{S}\mu'] = {}^tB[\mathbf{T}\mu - \mathbf{T}\mu']$, ce qui donne, compte tenu de la troisième proposition du lemme 1, $\|A[\mathbf{S}\mu] - A[\mathbf{S}\mu']\|_{V'} \geq \beta \|\mathbf{T}\mu - \mathbf{T}\mu'\|_M$.

L'on a également

$$\|A[\mathbf{S}\mu] - A[\mathbf{S}\mu']\|_{V'} = \|\mathbf{A}[\mathbf{S}\mu] - \mathbf{A}[\mathbf{S}\mu']\|_V \leq c_a \|\mathbf{S}\mu - \mathbf{S}\mu'\|_V$$

de sorte que l'on obtient

$$\|\mathbf{T}\mu - \mathbf{T}\mu'\|_M \leq \frac{c_a}{\beta} \|\mathbf{S}\mu - \mathbf{S}\mu'\|_V \tag{3}$$

Enfin, de $\mathbf{S}\mu = \lambda_0 + \lambda_1$ (resp^t $\mathbf{S}\mu' = \lambda_0' + \lambda_1'$) il découle que

$$\|\mathbf{S}\mu - \mathbf{S}\mu'\|_V \leq \|\lambda_0 - \lambda_0'\|_V + \|\lambda_1 - \lambda_1'\|_V \tag{4}$$

Finalement, en combinant (1), (2), (3) and (4) l'on a

$$\|\mathbf{T}\mu - \mathbf{T}\mu'\|_M \leq k \|\mu - \mu'\|_M$$

avec $k = \frac{c_a c_c}{\beta^2}(1 + \frac{c_a}{\alpha_a})$, ce qui achève la preuve du théorème 4 puisque l'opérateur **T** est une contraction stricte dès lors que la constante k satisfait $k < 1$. □

Références

[1] Babuška I. The finite element method avec Lagrangian multipliers. *Numer. Math.,* 1973 ; **20** :179–192.

[2] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problèmes arising from Lagrange multipliers. *R.A.I.R.O., Anal. Numer.,* 1974 ; **R2** :129–151.

[3] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid finite Element Methods.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[4] Browder F.E. Non linear elliptic boundary value problèmes. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 1963 ; **69** :862–874.

[5] Girault V, Raviart PA. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] Ladyzhenskaya O. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Gordon & Breach, 1969.

[7] Minty G.J. Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces. *Duke. Math. J.,* 1962 ; **29** :341–346.

[8] Royis P, Royis H. A rate-type mixed finite element method for large transformations of non-viscous continua. *Mechanics Research Communications* 1998 ; **25**(4) :467–472.