

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Avant-propos   | 5         |
| Table des matières   | 19        |
| Table des figures  | 24        |
| Liste des tableaux   | 25        |
| <b>1 Cinématique des milieux continus</b>  | <b>27</b> |
| 1.1 Définition d'un milieu continu - Hypothèses de base  | 27        |
| 1.1.1 Notion de particule  | 27        |
| 1.1.2 Hypothèse de continuité  | 28        |
| 1.2 Repérage des milieux continus  | 28        |
| 1.2.1 Configuration de référence et configuration actuelle   | 29        |
| 1.2.2 Relation entre les configurations actuelle et de référence : la transformation du milieu continu | 31        |
| 1.2.3 Transformation linéaire tangente   | 32        |
| 1.2.4 Jacobien de la transformation  | 36        |
| 1.2.5 Champ des déplacements et champ des vitesses   | 39        |
| 1.3 Descriptions lagrangienne et eulérienne  | 40        |
| 1.3.1 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission   | 40        |
| 1.3.1.1 Définitions  | 40        |
| 1.3.1.2 Cas d'un mouvement permanent   | 42        |
| 1.3.2 Point de vue lagrangien et point de vue eulérien   | 43        |
| 1.4 Dérivée matérielle   | 43        |
| 1.4.1 Définition   | 43        |
| 1.4.2 Champ des accélérations  | 45        |
| 1.4.3 Dérivées matérielles du gradient et du jacobien de la transformation                             | 47        |
| 1.4.4 Dérivées d'intégrales sur des domaines matériels   | 49        |
| 1.4.4.1 Dérivée d'une intégrale de volume  | 49        |
| 1.4.4.2 Dérivée d'une intégrale de surface   | 50        |
| 1.4.4.3 Dérivée d'une intégrale curviligne   | 53        |
| 1.5 Équations de conservation de la masse  | 54        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 1.5.1    | Point de vue eulérien . . . . .  | 54        |
| 1.5.2    | Point de vue lagrangien . . . . .  | 56        |
| 1.6      | Récapitulatif des formules essentielles . . . . .                        | 58        |
| 1.6.1    | Repérage des milieux continus . . . . .                                  | 58        |
| 1.6.2    | Descriptions lagrangienne et eulérienne . . . . .                        | 58        |
| 1.6.3    | Dérivée matérielle . . . . .   | 59        |
| 1.6.4    | Équations de conservation de la masse . . . . .                          | 59        |
| 1.7      | Exercices et problèmes . . . . .   | 60        |
| 1.7.1    | Énoncés des exercices . . . . .  | 60        |
| E1.1     | Potentiel des accélérations . . . . .                                    | 60        |
| E1.2     | Théorème de Lagrange . . . . .   | 60        |
| E1.3     | Théorème de Lord Kelvin . . . . .  | 60        |
| E1.4     | Écoulement sphérique d'un fluide incompressible . . . . .                | 60        |
| E1.5     | Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique . . . . .                 | 61        |
| E1.6     | Traction-torsion d'une barre cylindrique . . . . .                       | 61        |
| E1.7     | Transformations infinitésimales . . . . .                                | 62        |
| E1.8     | Tassement d'un sol incompressible . . . . .                              | 62        |
| 1.7.2    | Énoncés des problèmes . . . . .  | 63        |
| P1.1     | Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant . . . . . | 63        |
| P1.2     | Étude d'un écoulement plan . . . . .                                     | 64        |
| P1.3     | Roulement sans glissement d'un disque indéformable . . . . .             | 64        |
| P1.4     | Un modèle de houle : la houle trochoïdale . . . . .                      | 65        |
| 1.7.3    | Indications et éléments de réponse . . . . .                             | 65        |
| E1.1     | Potentiel des accélérations . . . . .                                    | 65        |
| E1.2     | Théorème de Lagrange . . . . .   | 65        |
| E1.3     | Théorème de Lord Kelvin . . . . .  | 66        |
| E1.4     | Écoulement sphérique d'un fluide incompressible . . . . .                | 66        |
| E1.5     | Écoulement plan autour d'un pilier cylindrique . . . . .                 | 66        |
| E1.6     | Traction-torsion d'une barre cylindrique . . . . .                       | 66        |
| E1.7     | Transformations infinitésimales . . . . .                                | 67        |
| E1.8     | Tassement d'un sol incompressible . . . . .                              | 67        |
| P1.1     | Écoulement plan de fluide incompressible : fonction de courant . . . . . | 67        |
| P1.2     | Étude d'un écoulement plan . . . . .                                     | 67        |
| P1.3     | Roulement sans glissement d'un disque indéformable . . . . .             | 69        |
| P1.4     | Un modèle de houle : la houle trochoïdale . . . . .                      | 70        |
| <b>2</b> | <b>Déformations</b>  | <b>73</b> |
| 2.1      | Considérations intuitives . . . . .                                      | 73        |
| 2.2      | Tenseurs des déformations . . . . .                                      | 74        |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 2.2.1   | Tenseurs de Cauchy à droite et de Green-Lagrange . . . . .                                   | 75  |
| 2.2.1.1 | Tenseur de Cauchy à droite . . . . .   | 75  |
| 2.2.1.2 | Tenseur de Green-Lagrange . . . . .  | 77  |
| 2.2.1.3 | Décomposition en fonction du champ des déplacements . . . . .                                | 78  |
| 2.2.2   | Tenseurs de Cauchy à gauche et d'Almansi-Euler . . . . .                                     | 79  |
| 2.2.2.1 | Tenseur de Cauchy à gauche . . . . .   | 79  |
| 2.2.2.2 | Tenseur d'Almansi-Euler . . . . .  | 80  |
| 2.2.2.3 | Décomposition en fonction du champ des déplacements . . . . .                                | 81  |
| 2.2.3   | Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente . . . . .                       | 83  |
| 2.2.4   | Variations de longueur d'un vecteur matériel élémentaire . . . . .                           | 86  |
| 2.2.5   | Variations d'angle entre les directions de deux vecteurs matériels<br>élémentaires . . . . . | 90  |
| 2.2.6   | Variations de volume matériel élémentaire . . . . .  | 93  |
| 2.2.7   | Variations d'aire d'une surface matérielle élémentaire . . . . .                             | 94  |
| 2.3     | Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .                                   | 97  |
| 2.3.1   | Tenseurs des taux de déformation et de rotation . . . . .                                    | 97  |
| 2.3.2   | Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .                                   | 99  |
| 2.3.2.1 | Tenseurs lagrangiens . . . . .   | 99  |
| 2.3.2.2 | Tenseurs eulériens . . . . .   | 100 |
| 2.3.2.3 | Tenseurs mixtes . . . . .  | 101 |
| 2.4     | Cas des transformations infinitésimales . . . . .  | 102 |
| 2.4.1   | Définitions . . . . .  | 102 |
| 2.4.2   | Tenseurs des petites déformations et des petites rotations . . . . .                         | 104 |
| 2.4.3   | Variations de longueur . . . . .   | 108 |
| 2.4.4   | Variations d'angle droit . . . . .   | 110 |
| 2.4.5   | Variations de volume . . . . .   | 112 |
| 2.4.6   | Variations d'aire . . . . .  | 114 |
| 2.4.7   | Déviateur des déformations . . . . .   | 116 |
| 2.4.8   | Représentations géométriques d'un état de déformation plane . . . . .                        | 117 |
| 2.4.8.1 | Cercle de Mohr des déformations planes . . . . .   | 119 |
| 2.4.8.2 | Ellipse de Lamé des déformations planes . . . . .  | 121 |
| 2.4.9   | Équations de compatibilité des petites déformations . . . . .                                | 122 |
| 2.5     | Récapitulatif des formules essentielles . . . . .  | 126 |
| 2.5.1   | Tenseurs des déformations . . . . .  | 126 |
| 2.5.2   | Dérivées matérielles des tenseurs de déformation . . . . .                                   | 127 |
| 2.5.3   | Cas des transformations infinitésimales . . . . .  | 127 |
| 2.6     | Exercices et problèmes . . . . .   | 129 |
| 2.6.1   | Énoncés des exercices . . . . .  | 129 |
| E2.1    | Transformations linéaires planes . . . . .   | 129 |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| E2.2     | Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques . . . . .               | 129        |
| E2.3     | Déformation d'un tube épais . . . . .  | 130        |
| E2.4     | Quadriques directrices des dilatations . . . . .                               | 130        |
| E2.5     | Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes . . .                | 131        |
| E2.6     | Effet transversal dans une jauge d'extensométrie . . . . .                     | 131        |
| E2.7     | Extensométrie par jauges électriques . . . . .                                 | 132        |
| E2.8     | Écoulement irrotationnel de fluide incompressible . . . . .                    | 133        |
| E2.9     | Petites ou grandes transformations? . . . . .                                  | 133        |
| E2.10    | Mouvement de corps rigide . . . . .  | 134        |
| 2.6.2    | Énoncés des problèmes . . . . .  | 134        |
| P2.1     | Expansion plane homogène . . . . .   | 134        |
| P2.2     | Concentration plane homogène . . . . .   | 135        |
| P2.3     | Transformation tridimensionnelle homogène . . . . .                            | 137        |
| P2.4     | Transformation finie d'un tube épais . . . . .                                 | 138        |
| 2.6.3    | Indications et éléments de réponse . . . . .                                   | 139        |
| E2.1     | Transformations linéaires planes . . . . .                                     | 139        |
| E2.2     | Déformations en coordonnées cylindriques et sphériques . . . . .               | 139        |
| E2.3     | Déformation d'un tube épais . . . . .  | 139        |
| E2.4     | Quadriques directrices des dilatations . . . . .                               | 140        |
| E2.5     | Ellipse de Lamé et cercle de Mohr des déformations planes . . .                | 140        |
| E2.6     | Effet transversal dans une jauge d'extensométrie . . . . .                     | 140        |
| E2.7     | Extensométrie par jauges électriques . . . . .                                 | 140        |
| E2.8     | Écoulement irrotationnel de fluide incompressible . . . . .                    | 141        |
| E2.9     | Petites ou grandes transformations? . . . . .                                  | 142        |
| E2.10    | Mouvement de corps rigide . . . . .  | 142        |
| P2.1     | Expansion plane homogène . . . . .   | 143        |
| P2.2     | Concentration plane homogène . . . . .   | 144        |
| P2.3     | Transformation tridimensionnelle homogène . . . . .                            | 147        |
| P2.4     | Transformation finie d'un tube épais . . . . .                                 | 149        |
| <b>3</b> | <b>Contraintes</b> . . . . .   | <b>153</b> |
| 3.1      | Considérations intuitives . . . . .  | 153        |
| 3.1.1    | Fluide au repos . . . . .  | 153        |
| 3.1.2    | Poutre en traction simple . . . . .  | 155        |
| 3.2      | Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes . . . . .                       | 156        |
| 3.2.1    | Classification des actions mécaniques . . . . .                                | 156        |
| 3.2.1.1  | Actions mécaniques extérieures . . . . .                                       | 157        |
| 3.2.1.2  | Actions mécaniques intérieures : Définition du vecteur<br>contrainte . . . . . | 158        |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 3.2.2   | Tenseurs des contraintes . . . . .  | 161 |
| 3.2.2.1 | Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .                                     | 161 |
| 3.2.2.2 | Tenseurs des contraintes de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff . . . . .          | 167 |
| 3.2.3   | Relation fondamentale de la dynamique . . . . .                                 | 170 |
| 3.2.3.1 | Équations indéfinies eulériennes du mouvement . . . . .                         | 171 |
| 3.2.3.2 | Équations indéfinies lagrangiennes du mouvement . . . . .                       | 173 |
| 3.2.3.3 | Symétrie des tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff . . . . . | 175 |
| 3.3     | Dérivées matérielles des contraintes . . . . .                                  | 178 |
| 3.3.1   | Dérivées matérielles des tenseurs des contraintes . . . . .                     | 178 |
| 3.3.2   | Dérivée matérielle du vecteur contrainte . . . . .                              | 179 |
| 3.4     | Étude du tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .                            | 181 |
| 3.4.1   | Théorème de Cauchy . . . . .  | 181 |
| 3.4.2   | Directions principales des contraintes . . . . .                                | 182 |
| 3.4.3   | Déviateur des contraintes . . . . .   | 184 |
| 3.4.4   | Invariants scalaires du tenseur des contraintes . . . . .                       | 185 |
| 3.4.5   | Représentations géométriques d'un état de contrainte plane . . . . .            | 189 |
| 3.4.5.1 | Ellipse de Lamé des contraintes planes . . . . .                                | 190 |
| 3.4.5.2 | Cercle de Mohr des contraintes planes . . . . .                                 | 191 |
| 3.4.6   | Représentations géométriques d'un état de contrainte tridimensionnel . . . . .  | 194 |
| 3.4.6.1 | Ellipsoïde de Lamé des contraintes . . . . .                                    | 195 |
| 3.4.6.2 | Tricercle de Mohr des contraintes . . . . .                                     | 195 |
| 3.5     | Récapitulatif des formules essentielles . . . . .                               | 200 |
| 3.5.1   | Efforts intérieurs et tenseurs des contraintes . . . . .                        | 200 |
| 3.5.2   | Dérivées matérielles des contraintes . . . . .                                  | 200 |
| 3.5.3   | Étude du tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .                            | 201 |
| 3.6     | Exercices et problèmes . . . . .  | 202 |
| 3.6.1   | Énoncés des exercices . . . . .   | 202 |
| E3.1    | Solide d'isocontrainte . . . . .  | 202 |
| E3.2    | Essai de traction monoaxiale . . . . .  | 202 |
| E3.3    | États types de contrainte plane . . . . .                                       | 203 |
| E3.4    | Utilisation d'une plaque fissurée . . . . .                                     | 203 |
| E3.5    | État homogène de contrainte plane . . . . .                                     | 203 |
| E3.6    | Quadriques directrices des contraintes normales . . . . .                       | 204 |
| E3.7    | Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques . . . . .            | 204 |
| E3.8    | Contraintes au parement amont d'un barrage . . . . .                            | 205 |
| E3.9    | Boîte de Casagrande . . . . .   | 205 |
| 3.6.2   | Énoncés des problèmes . . . . .   | 206 |
| P3.1    | Contraintes dans une chaudière . . . . .  | 206 |

|          |         |  |            |
|----------|---------|--|------------|
|          | P3.2    | Contraintes dans un câble de précontrainte . . . . .                 | 207        |
|          | P3.3    | Contraintes dans une poutre en potence . . . . .                     | 208        |
| 3.6.3    |         | Indications et éléments de réponse . . . . .                         | 209        |
|          | E3.1    | Solide d'isocontrainte . . . . .                                     | 209        |
|          | E3.2    | Essai de traction monoaxiale . . . . .                               | 209        |
|          | E3.4    | Utilisation d'une plaque fissurée . . . . .                          | 209        |
|          | E3.5    | État homogène de contrainte plane . . . . .                          | 210        |
|          | E3.6    | Quadriques directrices des contraintes normales . . . . .            | 210        |
|          | E3.7    | Contrainte normale et contrainte tangentielle octaédriques . . .     | 211        |
|          | E3.8    | Contraintes au parement amont d'un barrage . . . . .                 | 211        |
|          | E3.9    | Boîte de Casagrande . . . . .  | 211        |
|          | P3.1    | Contraintes dans une chaudière . . . . .                             | 211        |
|          | P3.2    | Contraintes dans un câble de précontrainte . . . . .                 | 211        |
|          | P3.3    | Contraintes dans une poutre en potence . . . . .                     | 212        |
| <b>4</b> |         | <b>Prolégomènes à la rhéologie des corps continus</b>                | <b>213</b> |
| 4.1      |         | Considérations intuitives . . . . .                                  | 213        |
| 4.1.1    |         | Exemples de comportements de milieux solides . . . . .               | 214        |
|          | 4.1.1.1 | Comportement élastique . . . . .                                     | 214        |
|          | 4.1.1.2 | Comportement élastoplastique . . . . .                               | 215        |
| 4.1.2    |         | Exemples de comportements de milieux fluides . . . . .               | 216        |
|          | 4.1.2.1 | Fluide parfait . . . . .   | 216        |
|          | 4.1.2.2 | Fluide visqueux . . . . .  | 217        |
| 4.2      |         | Élasticité linéaire isotrope . . . . .                               | 218        |
|          | 4.2.1   | Approche en déformations . . . . .                                   | 219        |
|          | 4.2.2   | Approche en contraintes . . . . .                                    | 224        |
|          | 4.2.3   | Synthèse des deux approches . . . . .                                | 226        |
|          | 4.2.4   | Thermoélasticité linéaire isotrope . . . . .                         | 230        |
|          | 4.2.5   | Exemple de sollicitation thermomécanique . . . . .                   | 230        |
| 4.3      |         | Notion de critère de limite élastique . . . . .                      | 232        |
|          | 4.3.1   | Exemples de critères indépendants de la contrainte moyenne . . . . . | 233        |
|          |         | 4.3.1.1 Critère de Tresca . . . . .                                  | 233        |
|          |         | 4.3.1.2 Critère de Von-Mises . . . . .                               | 236        |
|          | 4.3.2   | Exemples de critères dépendants de la contrainte moyenne . . . . .   | 237        |
|          |         | 4.3.2.1 Critère de Mohr-Coulomb . . . . .                            | 237        |
|          |         | 4.3.2.2 Critère de Drucker-Prager . . . . .                          | 242        |
| 4.4      |         | Fluide visqueux newtonien . . . . .                                  | 243        |
|          | 4.4.1   | Relations de comportement . . . . .                                  | 243        |
|          | 4.4.2   | Application . . . . .  | 244        |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 4.5     | Un exemple de couplage rhéoptique : l'effet photoélastique . . . . .         | 246 |
| 4.5.1   | Matériaux photoélastiques . . . . .  | 247 |
| 4.5.1.1 | Polarisation rectiligne d'une onde lumineuse plane . . . . .                 | 247 |
| 4.5.1.2 | Matériaux parfaitement photoélastiques . . . . .                             | 247 |
| 4.5.2   | Photoélasticimétrie plane . . . . .  | 249 |
| 4.5.2.1 | Analyse rectiligne . . . . .   | 249 |
| 4.5.2.2 | Analyse circulaire . . . . .   | 251 |
| 4.6     | Récapitulatif des formules essentielles . . . . .                            | 255 |
| 4.6.1   | Élasticité linéaire isotrope . . . . .                                       | 255 |
| 4.6.2   | Notion de critère de limite élastique . . . . .                              | 255 |
| 4.6.3   | Fluide visqueux newtonien . . . . .  | 256 |
| 4.7     | Exercices et problèmes . . . . .   | 257 |
| 4.7.1   | Énoncés des exercices . . . . .  | 257 |
| E4.1    | Massif de sol pesant uniformément chargé . . . . .                           | 257 |
| E4.2    | Coin élastique . . . . .   | 257 |
| E4.3    | Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène . . . . .              | 258 |
| E4.4    | Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène . . . . .    | 259 |
| E4.5    | Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible . . . . . | 259 |
| E4.6    | Vernis craquelant . . . . .  | 260 |
| E4.7    | Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes . . . . .           | 261 |
| E4.8    | Rhéomètre de Couette . . . . .   | 262 |
| E4.9    | Distorsion pure . . . . .  | 263 |
| E4.10   | Expansion plane . . . . .  | 264 |
| 4.7.2   | Énoncés des problèmes . . . . .  | 264 |
| P4.1    | Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux . . . . .             | 264 |
| P4.2    | Torsion pure d'un cylindre . . . . .   | 265 |
| P4.3    | Matériau composite . . . . .   | 267 |
| P4.4    | Barrage poids . . . . .  | 268 |
| P4.5    | Fluide de Bingham . . . . .  | 270 |
| 4.7.3   | Indications et éléments de réponse . . . . .                                 | 271 |
| E4.1    | Massif de sol pesant uniformément chargé . . . . .                           | 271 |
| E4.2    | Coin élastique . . . . .   | 271 |
| E4.3    | Traction monoaxiale d'une poutre élastique hétérogène . . . . .              | 271 |
| E4.4    | Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène . . . . .    | 272 |
| E4.5    | Écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible . . . . . | 272 |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| E4.6     | Vernis craquelant . . . . .  | 273        |
| E4.7     | Critères de Tresca et de Von-Mises en contraintes planes . . . . . | 273        |
| E4.8     | Rhéomètre de Couette . . . . .                                     | 274        |
| E4.9     | Distorsion pure . . . . .  | 274        |
| E4.10    | Expansion plane . . . . .  | 274        |
| P4.1     | Torsion et sollicitation thermique d'un cylindre creux . . . . .   | 275        |
| P4.2     | Torsion pure d'un cylindre . . . . .                               | 276        |
| P4.3     | Matériau composite . . . . .                                       | 277        |
| P4.4     | Barrage poids . . . . .  | 278        |
| P4.5     | Fluide de Bingham . . . . .  | 279        |
| <b>5</b> | <b>Principes généraux et leurs applications</b>                    | <b>281</b> |
| 5.1      | Principes généraux . . . . .                                       | 281        |
| 5.1.1    | Rappels de résultats précédemment énoncés . . . . .                | 282        |
| 5.1.1.1  | Équation eulérienne de conservation de la masse . . . . .          | 282        |
| 5.1.1.2  | Équations indéfinies eulériennes du mouvement . . . . .            | 282        |
| 5.1.2    | Théorème d'Euler . . . . .   | 283        |
| 5.1.2.1  | Forme locale . . . . .   | 283        |
| 5.1.2.2  | Forme globale . . . . .  | 284        |
| 5.1.2.3  | Application . . . . .  | 285        |
| 5.1.3    | Puissances virtuelles et énergie cinétique . . . . .               | 287        |
| 5.1.3.1  | Théorème des puissances virtuelles . . . . .                       | 287        |
| 5.1.3.2  | Théorème de l'énergie cinétique . . . . .                          | 290        |
| 5.1.4    | Théorème des travaux virtuels . . . . .                            | 290        |
| 5.2      | Application aux fluides . . . . .                                  | 295        |
| 5.2.1    | Hydrostatique . . . . .  | 295        |
| 5.2.2    | Fluide parfait en mouvement — Théorème de Bernoulli . . . . .      | 296        |
| 5.2.3    | Fluide visqueux newtonien - Équations de Navier-Stokes . . . . .   | 298        |
| 5.3      | Application aux solides élastiques linéaires isotropes . . . . .   | 300        |
| 5.3.1    | Équations de Lamé-Navier . . . . .                                 | 300        |
| 5.3.2    | Énergie de déformation d'un solide élastique . . . . .             | 302        |
| 5.3.3    | Théorème de l'énergie potentielle . . . . .                        | 305        |
| 5.3.4    | Application . . . . .  | 309        |
| 5.4      | Récapitulatif des formules essentielles . . . . .                  | 314        |
| 5.4.1    | Principes généraux . . . . .                                       | 314        |
| 5.4.2    | Application aux fluides . . . . .                                  | 314        |
| 5.4.3    | Application aux solides élastiques linéaires isotropes . . . . .   | 315        |
| 5.5      | Exercices et problèmes . . . . .                                   | 316        |
| 5.5.1    | Énoncés des exercices . . . . .                                    | 316        |



|       |   |     |
|-------|---|-----|
| E5.1  | Équations indéfinies du mouvement . . . . .                           | 316 |
| E5.2  | Théorème d'Archimède . . . . .  | 316 |
| E5.3  | Réservoir cylindrique en rotation . . . . .                           | 316 |
| E5.4  | Principe du venturi . . . . .   | 317 |
| E5.5  | Tube de Pitot . . . . .   | 317 |
| E5.6  | Ajutage de Borda . . . . .  | 318 |
| E5.7  | Auget Pelton . . . . .  | 319 |
| E5.8  | Tube de Poiseuille . . . . .  | 320 |
| E5.9  | Viscosimètre plan-plan . . . . .                                      | 320 |
| E5.10 | Torsion d'un disque annulaire . . . . .                               | 321 |
| E5.11 | Sphère creuse sous pression . . . . .                                 | 322 |
| E5.12 | Vibrations longitudinales d'une poutre . . . . .                      | 323 |
| 5.5.2 | Énoncés des problèmes . . . . .                                       | 324 |
| P5.1  | Compression-confinement d'un cylindre creux . . . . .                 | 324 |
| P5.2  | Sertissage d'un cylindre . . . . .                                    | 325 |
| P5.3  | Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre) . . . . .          | 327 |
| P5.4  | Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné . . . . . | 328 |
| P5.5  | Pale d'hélicoptère . . . . .  | 329 |
| P5.6  | Action d'un jet sur un obstacle . . . . .                             | 330 |
| P5.7  | Écoulement dans une conduite de section carrée . . . . .              | 331 |
| P5.8  | Fluide visqueux sur un plan incliné . . . . .                         | 332 |
| P5.9  | Fluide visqueux non-newtonien . . . . .                               | 334 |
| P5.10 | Viscosimètre cône-plan . . . . .                                      | 335 |
| 5.5.3 | Indications et éléments de réponse . . . . .                          | 336 |
| E5.2  | Théorème d'Archimède . . . . .  | 336 |
| E5.3  | Réservoir cylindrique en rotation . . . . .                           | 336 |
| E5.4  | Principe du venturi . . . . .   | 336 |
| E5.5  | Tube de Pitot . . . . .   | 337 |
| E5.6  | Ajutage de Borda . . . . .  | 337 |
| E5.7  | Auget Pelton . . . . .  | 337 |
| E5.8  | Tube de Poiseuille . . . . .  | 337 |
| E5.9  | Viscosimètre plan-plan . . . . .                                      | 338 |
| E5.10 | Torsion d'un disque annulaire . . . . .                               | 338 |
| E5.11 | Sphère creuse sous pression . . . . .                                 | 338 |
| E5.12 | Vibrations longitudinales d'une poutre . . . . .                      | 339 |
| P5.1  | Compression-confinement d'un cylindre creux . . . . .                 | 339 |
| P5.2  | Sertissage d'un cylindre . . . . .                                    | 341 |
| P5.3  | Cylindre creux infini sous pression (pressiomètre) . . . . .          | 343 |
| P5.4  | Stabilité d'une couche pesante reposant sur un plan incliné . . . . . | 343 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| P5.5     | Pale d'hélicoptère . . . . .  | 344        |
| P5.6     | Action d'un jet sur un obstacle . . . . .   | 346        |
| P5.7     | Écoulement dans une conduite de section carrée . . . . .                                      | 346        |
| P5.8     | Fluide visqueux sur un plan incliné . . . . .   | 347        |
| P5.9     | Fluide visqueux non-newtonien . . . . .   | 348        |
| P5.10    | Viscosimètre cône-plan . . . . .  | 349        |
| <b>6</b> | <b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>   | <b>351</b> |
| 6.1      | Étude d'un problème modèle : La corde sur fondation élastique . . . . .                       | 352        |
| 6.1.1    | Le problème initial . . . . .   | 352        |
| 6.1.2    | Formulation variationnelle . . . . .  | 353        |
| 6.1.2.1  | Un théorème . . . . .   | 353        |
| 6.1.2.2  | Une définition . . . . .  | 355        |
| 6.1.3    | Méthodes de Galerkin . . . . .  | 357        |
| 6.1.3.1  | Écriture abstraite d'un problème variationnel . . . . .                                       | 357        |
| 6.1.3.2  | Formulation variationnelle approchée de Galerkin . . . . .                                    | 358        |
| 6.1.3.3  | Résolution numérique d'un problème approché de Galerkin . . . . .                             | 359        |
| 6.1.3.4  | Les méthodes de Galerkin . . . . .  | 360        |
| 6.1.4    | Construction d'un espace d'éléments finis . . . . .   | 360        |
| 6.1.4.1  | Premier outil : définition d'un élément fini . . . . .  | 361        |
| 6.1.4.2  | Deuxième outil : triangulation . . . . .  | 362        |
| 6.1.4.3  | Troisième outil : matrice de connectivité . . . . .   | 362        |
| 6.1.4.4  | Construction finale des fonctions $\psi_i, i \in \{1, \dots, M_h\}$ . . . . .                 | 363        |
| 6.1.4.5  | Résolution numérique d'un problème de Galerkin par la<br>méthode des éléments finis . . . . . | 365        |
| 6.2      | Étude du problème de l'élastostatique infinitésimale . . . . .                                | 368        |
| 6.2.1    | Le problème initial . . . . .   | 368        |
| 6.2.2    | Formulation variationnelle . . . . .  | 370        |
| 6.2.3    | Exemple numérique : équilibre d'un barrage poids élastique . . . . .                          | 372        |
| 6.2.3.1  | Choix d'un élément fini bidimensionnel . . . . .  | 373        |
| 6.2.3.2  | Triangulation . . . . .   | 374        |
| 6.2.3.3  | Matrice de connectivité . . . . .   | 375        |
| 6.2.3.4  | Expressions locales des déplacements, des déformations et des<br>contraintes . . . . .        | 377        |
| 6.2.3.5  | Résolution numérique . . . . .  | 380        |
| 6.3      | Exercices . . . . .   | 386        |
| 6.3.1    | Énoncés . . . . .   | 386        |
| E6.1     | Essai de compression œdométrique . . . . .  | 386        |
| E6.2     | Pale d'hélicoptère . . . . .  | 386        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| E6.3     | Poutre en flexion . . . . .   | 387        |
| 6.3.2    | Indications et éléments de réponse . . . . .                                  | 387        |
| E6.1     | Essai de compression œdométrique . . . . .                                    | 387        |
| E6.2     | Pale d'hélicoptère . . . . .  | 388        |
| E6.3     | Poutre en flexion . . . . .   | 389        |
| <b>A</b> | <b>Éléments de calcul tensoriel en bases orthonormées</b>                     | <b>391</b> |
| A.1      | Convention d'indice muet . . . . .  | 391        |
| A.2      | Tenseurs euclidiens en bases orthonormées . . . . .                           | 392        |
| A.3      | Tenseurs isotropes . . . . .  | 394        |
| A.4      | Tenseurs gradient et divergence . . . . .                                     | 395        |
| A.5      | Cas de l'espace $\mathbb{R}^3$ orthonormé . . . . .                           | 396        |
| <b>B</b> | <b>Formulaire</b>   | <b>399</b> |
| B.1      | Tenseurs de Kronecker $\delta$ et d'orientation $\epsilon$ . . . . .          | 399        |
| B.1.1    | Caractérisation . . . . .   | 399        |
| B.1.2    | Propriétés . . . . .  | 400        |
| B.2      | Opérateurs différentiels . . . . .  | 400        |
| B.2.1    | Caractérisation . . . . .   | 400        |
| B.2.2    | Propriétés . . . . .  | 402        |
| B.3      | Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques . . . . .                | 403        |
| B.3.1    | Coordonnées cartésiennes . . . . .  | 403        |
| B.3.2    | Coordonnées cylindriques . . . . .  | 406        |
| B.3.3    | Coordonnées sphériques . . . . .  | 408        |
| B.4      | Unités . . . . .  | 411        |
| B.4.1    | Unités de base et unités supplémentaires . . . . .                            | 411        |
| B.4.2    | Unités espace-temps . . . . .   | 412        |
| B.4.3    | Unités de mécanique et unités dérivées . . . . .                              | 412        |
| B.4.4    | Symboles des préfixes décimaux . . . . .                                      | 413        |
| B.5      | Extensométrie par rosettes de trois jauges . . . . .                          | 414        |
| <b>C</b> | <b>Ouvrages de référence</b>  | <b>415</b> |
| C.1      | Ouvrages de Mécanique des Milieux Continus et d'Élasticité . . . . .          | 415        |
| C.2      | Ouvrages de Mathématiques : Calcul Tensoriel et Calcul Variationnel . . . . . | 416        |
| C.3      | Ouvrages sur la Méthode des Éléments Finis . . . . .                          | 416        |
| C.4      | Ouvrages sur les Méthodes Expérimentales en Élasticité . . . . .              | 417        |
|          | <b>Index</b>  | <b>419</b> |